Gráfelmélet/Diszkrét Matematika MSc hallgatók számára

Gráfok metszési paramétere és alkalmazásai

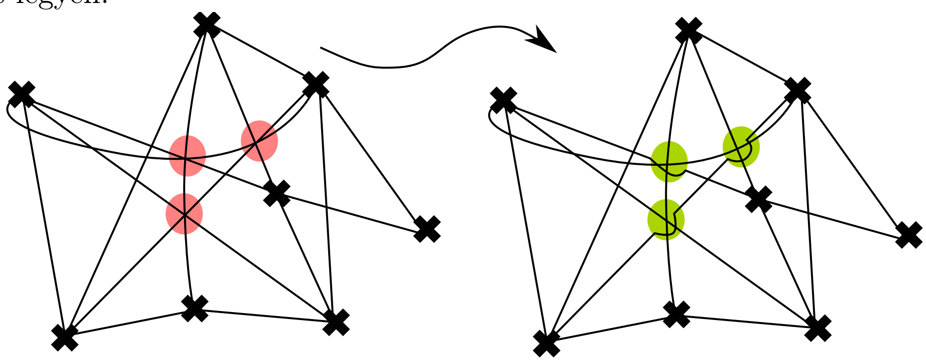
2017. Előadó: Hajnal Péter

1. Gráfok metszési száma

Az előadás a metszési szám nevű gráfparaméterről szól. Ez egy olyan gráfparaméter, amely egy adott gráfról megmondja, hogy „milyen messze” van a síkgráfoktól. (Síkgráfok esetén a paraméter 0 lesz.)

Definíció. A G gráf egy λ lerajzolását *regulárisnak* nevezünk, ha a lerajzolásban nincs három élgörbe közös belső ponttal.

A regularitás egy technikai feltétel. Egy lerajzolás ha megsérti ezt a feltételt, akkor kis lokális változtatással elérhetjük, hogy lényegében ugyanaz a lerajzolás már reguláris legyen.

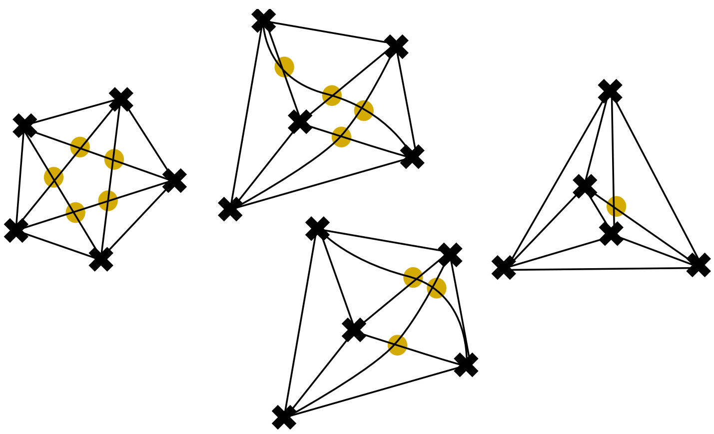


Definíció. Legyen G egy gráf λ egy reguláris lerajzolása.

$$x(G,\lambda) = |\{P \in \mathbb{R}^2 : \ P\text{-n több élgörbe áthalad}\}|.$$

Megjegyzés. Egy lerajzolás metszési számát definiálhattuk volna úgy is, hogy a regularitást nem tesszük fel. Ekkor azon nem-csúcs pontokat, amin több élgörbe halad át súlyozottan kell számolni. Ha egy ilyen ponton k élgörbe halad át, akkor súlya $\binom{k}{2}$.

Példa. $G = K_5$ esetén több lerajzolást vettünk:

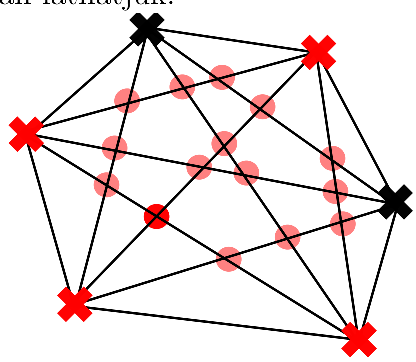


A különböző lerajzolásokhoz különböző metszési szám tartozik: $x(K_5, \lambda) = 5$, $x(K_5, \lambda') = 4$, $x(K_5, \lambda''') = 3$, $x(K_5, \lambda'''') = 1$.

Megjegyzés. $x(G, \lambda) = 0$ akkor és csak akkor, ha λ a G gráf szép lerajzolása.

Példa. $G = K_n$, a λ lerajzolás legyen olyan, hogy a csúcsok egy konvex n-szög csúcsaira illeszkedjenek. Azért, hogy reguláris lerajzoláshoz jussunk, kissé perturbáljuk véletlenül a csúcsokat. Továbbá az élgörbék legyenek szakaszok. Az így kapott λ lerajzolásra $x(K_n, \lambda) = \binom{n}{4}$. Hiszen a metszések és a csúcsnégyesek között bijekció létesíthető.

K_6 esetét az alábbi ábrán láthatjuk.

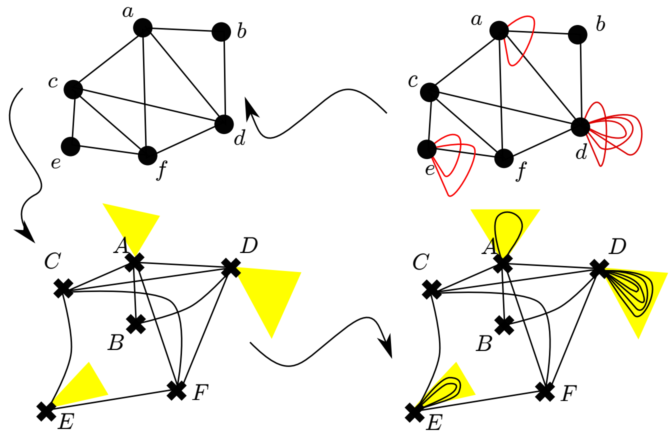


Észrevétel. Ha $R \subseteq G$, akkor a G egy λ lerajzolása megszorítható R-re (λ értelmezési tartományát leszűkítjük a részgráf csúcsaira, éleire). Jelölésben: $\lambda|_R$.

1. Következmény. *Legyen H egy n pontú egyszerű gráf ($H \subseteq K_n$) ekkor $x(H, \lambda|_H) \leq \binom{n}{4} = O(n^4)$, ahol λ a teljes gráf korábbi lerajzolása.*

Észrevétel. Legyen G és G_0 két gráf, G-ből úgy kapjuk G_0-at, hogy G-ből hurokéleket hagyunk el (vagy fordítva: G_0-ból úgy kapjuk G-t, hogy hurokéleket adunk hozzá). Ekkor G_0 tetszőleges λ lerajzolása kiterjeszthető G egy $\widehat{\lambda}$ lerajzolására úgy, hogy ne keletkezzen további metszés, azaz $x(G, \widehat{\lambda}) = x(G_0, \lambda)$.

Tekintsük a G_0 gráf λ lerajzolását egy x csúcs környékén. Elég kis környezetben az x-ben összefutó élek egy csillag alakzatot alkotnak, amely ágai között „elég hely van” tetszőleges számú hurokélnek.



Észrevétel. Legyen G egy gráf. Legyen G_0 az az egyszerű gráf, amit G-ből úgy kapunk, hogy elhagyjuk a hurokéleket és minden párhuzamos élseregből egyetlen élet tartunk meg. (Vagy fordítva: A G_0 egyszerű gráfból úgy kapjuk G-t, hogy hurokéleket adunk hozzá vagy/és létező élek mellé párhuzamos élt adunk hozzá.) Ekkor G_0 tetszőleges λ szép lerajzolása kiterjeszthető G egy $\widehat{\lambda}$ szép lerajzolására. Azaz $x(G_0, \lambda) = 0$ esetén $x(G, \widehat{\lambda}) = 0$.

Tekintsük a G_0 gráf λ lerajzolását egy e élgörbe környékén. Ennek lesz egy kis holdacska szabad környezete, ahol „elég hely van” tetszőleges számú párhuzamosélnek. A hurokélek hozzáadása az előző észrevétel alapján megoldható.

Definíció (Metszési szám).

$$x(G) = \min\{x(G, \lambda) : \ \lambda \text{ reguláris}\}.$$

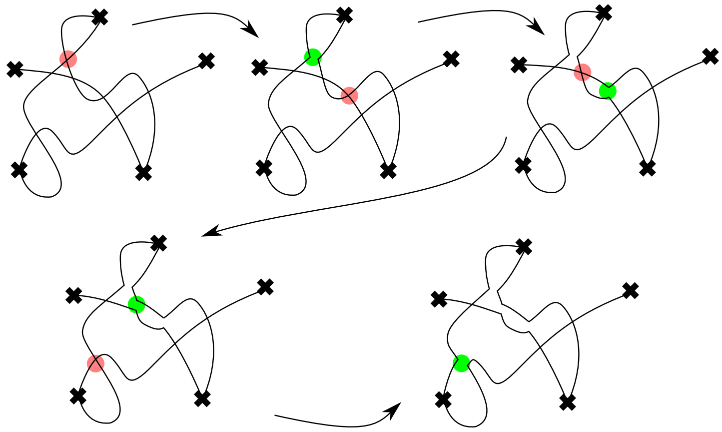
Észrevétel. $x(G) = 0$ akkor és csak akkor, ha G síkgráf.

Példa. $x(K_5) = x(K_{3,3}) = 1$.

Megjegyzés. Egy n pontú G egyszerű gráf esetén $x(G) = O(n^4)$.

A fogalom a XX. század 40-es éveiben született, amikor Turán Pál munkaszolgálatosként egy téglagyárban dolgozott. Feladata csillék tologatása volt kemencék és vasúti kocsik között. A kemencék és a felrakodó helyek páronként össze voltak kötve a csillék síneivel. A munka lenehezebb része két sín találkozáskor volt, amikor a csillék megzökkentek. Természetes volt a kérdés: olyan sínrendszer tervezése, amely n kemencét és m felrakodó helyet köt össze és minimális számú sín-talákozással rendelkezik. Azaz a kérdés $x(K_{n,m})$ meghatározása. Később vetették fel $x(K_n)$ meghatározásának problémáját. Habár mindkét esetben sejtik az optimális lerajzolást, a sejtés mind a mai napig központi nyitott kérdés.

Észrevétel. Ha e és f két él, közös v csúccsal rendelkeznek és élgörbéik átmetszik egymást, akkor nem gazdaságos a lerajzolás. v szomszédjai felöl v felé haladva az átmetszés helyett „váltsanak görbét az élek”. Ekkor ugyanazon gráf egy lerajzolását kapjuk, az eredeti λ lerajzolást λ'-re cserélhetjük. Közben eggyel csökkent a metszési szám.



Definíció. Egy λ lerajzolás V-szép lerajzolás, ha az összefutó élgörbék nem metszik át egymást.

Megjegyzés. A G gráf tetszőleges λ lerajzolásához található olyan λ' V-szép lerajzolás, amelyre $x(G, \lambda') \leq x(G, \lambda)$.

Emlékeztető (BSc-s tétel, az Euler-tétel következménye). Legyen G egyszerű síkgráf. Ha $|V| \geq 3$, akkor $|E| \leq 3|V| - 6$.

2. Lemma (triviális becslés a metszési számra). *Legyen G egy egyszerű gráf és λ tetszőleges reguláris lerajzolása, ekkor*

$$x(G, \lambda) \geq |E| - 3|V|.$$

Bizonyítás. Legyen R részgráfja G-nek úgy, hogy $V(G) = V(R)$ és $E(R)$ egy olyan maximális élhalmaz, hogy $\lambda|_R$-ben az élgörbék szépen legyenek lerajzolva. Ekkor az emlékeztetőből adódik, hogy $|E(R)| \leq 3|V|$. Így $|E(G)| - |E(R)|$, azaz legalább $|E(G)| - 3|V|$ darab él van, ami nincs R-ben.

Ezek mindegyikére (külön-külön) a λ-élgörbéjét $(R, \lambda|_R)$-hoz adva metszésnek kell keletkezni (R választása miatt). Ezek mind különböző metszések (valemely R-beli és különböző $E(G) - E(R)$-beli élek között vannak). Ezekből következik. hogy

$$x(G, \lambda) \geq |E(G)| - 3|V|.$$

■

A nagyon egyszerű becslésnek nagyon mély következmény elsz, ha az alábbi módon alkalmazzuk.

3. Tétel (Metszési lemma). *Ha G egyszerű gráf és $|E| \geq 4|V|$, akkor*

$$x(G) \geq \frac{1}{64} \frac{|E|^3}{|V|^2}.$$

Megjegyzés. Egyszerű gráfunkra vonatkozó élbecslés garantálja, hogy G nem síkgráf, azaz $x(G) \geq 1$.

4. Következmény.

$$x(K_n) \geq \frac{1}{64}\frac{\binom{n}{2}^3}{n^2} = \frac{1}{128}n^4 + O(n^3) = \Omega(n^4).$$

Megjegyzés. Az Ω jelölés jelentése: alsó becslés egy rejtett (pozitív) konstanssal. (Ahogy O egy felső becslés egy rejtett (pozitív) konstanssal.) Ha a nagyságrendben alsó és felső becslés is adható pozitív konstansokkal, akkor a Θ jelölést használjuk. Eredményeink tömör összefoglalása: $x(K_n) = \Theta(n^4)$. Megjegyezzük, hogy $x(K_n)$ aszimptotikája (vagy még inkább pontos értéke) mind a mai napig megoldatlan.

Bizonyítás. Legyen λ a G-nek tetszőleges V-szép lerajzolása. Vegyük azt az $\underline{R}$ véletlen feszített részgráfot, amelyet úgy kapunk, hogy minden csúcsra függetlenül döntünk: p valószínűséggel meghagyjuk, illetve $1-p$ valószínűséggel eltöröljük a csúcsot. (p-t később határozzuk meg.)

Alkalmazzuk a lemmát $\underline{R}$-re. Ekkor

$$x(\underline{R}, \lambda|_{\underline{R}}) \geq |E(\underline{R})| - 3|V(\underline{R})|.$$

Vegyük mindkét oldal várható értékét. Az egyenlőtlenség természetesen a várható értékek között is fennáll:

$$\mathbb{E}(x(\underline{R}, \lambda|_{\underline{R}})) \geq \mathbb{E}(|E(\underline{R})|) - 3\mathbb{E}(|V(\underline{R})|).$$

Nézzük a várható értékeket! A bal oldalon két metsző él megmaradása szükséges, amihez 4 pont megmaradása kell. A jobb oldalon az élekhez 2 pont megmaradása kell, a pontokhoz pedig egy. Az egyes pontok megmaradásának valószínűsége p, különböző pontok megmaradása független események. Ebből:

$$p^4 x(G, \lambda) \geq p^2|E(G)| - 3p|V(G)|.$$

p értéke pozitív lesz, így egyenlőtlenségünket leoszthatjuk p^4-nel.

$$x(G, \lambda) \geq \frac{|E(G)|}{p^2} - \frac{3|V(G)|}{p^3}.$$

Válasszuk p-t $\frac{4|V|}{|E|}$-nek. (Ez feltételünk alapján legfeljebb 1.) Ekkor

$$x(G, \lambda) \geq \frac{1}{16}\frac{|E|^3}{|V|^2} - \frac{3}{64}\frac{|E|^3}{|V|^2} = \frac{1}{64}\frac{|E|^3}{|V|^2}.$$

Ha λ egy optimális lerajzolás, akkor kapjuk a tétel állítását. ■

Megjegyzés. Az $\frac{1}{64}$ együttható a bizonyításból adódott. Több odafigyeléssel javítható, de optimális értéke nem ismert.

2. A metszési lemma geometriai alkalmazása: Szemerédi–Trotter-tétel

Definíció. Legyen $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^2$ egy véges síkbeli ponthalmaz és $\mathcal{E}$ egy véges síkbeli egyenes halmaz.

$$I(\mathcal{P}, \mathcal{E}) = |\{(P, e) : P \in \mathcal{P},\ e \in \mathcal{E} \text{ és } P\, I\, e\}|,$$

ahol $P\, I\, e$ az jelöli, hogy a P pont illeszkedik az e egyenesre.

5. Tétel (Szemerédi–Trotter-tétel).

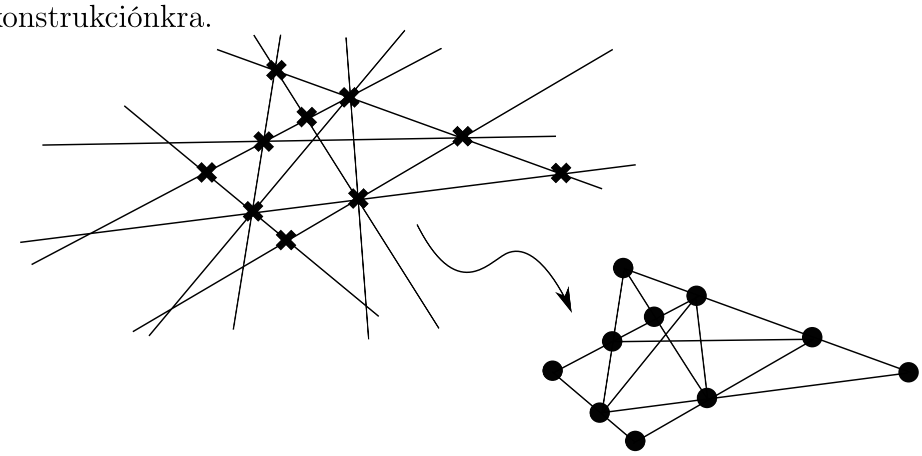
$$I(\mathcal{P}, \mathcal{E}) \leq 4(|P||E|)^{2/3} + 4|\mathcal{P}| + |\mathcal{E}|.$$

Megjegyzés. A felső becslés nagyságrendjét átírhatjuk:

$$\mathcal{O}(|P|^{2/3}|\mathcal{E}^{2/3} + |\mathcal{P}| + |\mathcal{E}|) = \mathcal{O}(\max\{|\mathcal{P}^{2/3}|\mathcal{E}|^{2/3}, |\mathcal{P}|, |\mathcal{E}|\}).$$

Megjegyezzük, hogy tetszőeges p és e poitív egészekre megadható olyan p elemű $\mathcal{P}$ ponthalmaz és e elemű $\mathcal{E}$ egyeneshalmaz, hogy a köztük lévő illeszkedés legalább ezred része legyen a felső becslésnek. Azaz a felső becslés nagyságrendje optimális.

Bizonyítás. Készítsünk egy gráfot $\mathcal{P}$-ből és $\mathcal{E}$-ből. Feltehető, hogy minden $e \in \mathcal{E}$ egyenes áthalad $\mathcal{P}$-beli ponton. $\mathcal{P}$ elemei lesznek a csúcsok. Gráfunk egyszerű lesz. Két csúcs, $P, Q \in \mathcal{P}$ akkor és csak akkor szomszédos, ha egy $e \in \mathcal{E}$ egyenesre illeszkednek és ezen nincs közöttük más $\mathcal{P}$-beli pont. Az alábbi ábra egy példát mutat konstrukciónkra.



Ekkor $V = |\mathcal{P}|$. Az élek számát is kifejezhetjük a kiinduló geometriai konfigurációnk paramétereiből: $k \geq 1$ esetén, ha egy egyenesre k darab $\mathcal{P}$-beli pont esik, akkor ezen az egyenes $k-1$ éllel járul gráfunkhoz.Az így összeszámolt részeredmémyeket összeadva minden egyenesre, kapjuk hogy $|E| = I(\mathcal{P}, \mathcal{E}) - |\mathcal{E}|$. Legyen λ gráfunk azon lerajzolása, ahol minden csúcs $\mathcal{P}$-beli helye által reprezentált és az élgörbék egyenes szakaszok (így minden élgörbe a megfelelő két végpont szomsédságát bizonyító $\mathcal{E}$-beli egyenes egy szakasza). Továbbá $x(G) \leq x(G, \lambda) \leq \binom{|\mathcal{E}|}{2} \leq |\mathcal{E}|^2$.

1. eset: $|E| < 4|V|$. Azaz $I(\mathcal{P}, \mathcal{E}) - |\mathcal{E}| < 4|\mathcal{P}|$.
2. eset: $|E| \geq 4|V|$. Ekkor a metszési lemma alkalmazható:

$$|\mathcal{E}|^2 \geq \binom{|\mathcal{E}|}{2} \geq x(G, p) \geq \frac{1}{64} \frac{(I(\mathcal{P}, \mathcal{E}) - |\mathcal{E}|)^3}{|\mathcal{P}|^2}.$$

Ebből rendezéssel, adódik, hogy

$$4|\mathcal{P}|^{2/3}|\mathcal{E}|^{2/3} \geq I(\mathcal{P}, \mathcal{E}) - |\mathcal{E}|.$$

Mindkét esetben igaz a bizonyítandó. ■

3. Kombinatorikus számelmélet: additív kombinatorika

Definíció. $A, B \subset \mathbb{R}$ véges halmazok. $A + B = \{a + b : \ a \in A \text{ és } b \in B\}$ és $A \cdot B = \{a \cdot b : \ a \in A \text{ és } b \in B\}$. (Azaz a szokásos komplexus összeadás és szorzás műveletét vizsgáljuk.)

$A + A$-t, illetve $A \cdot A$-t az A halmaz összeghalmazának, illetve szorzathalmazának nevezzük.
Kérdés: Milyen nagy, illetve kicsi lehet $|A + A|$ és $|A \cdot A|$? A továbbiakban legyen $|A| = n$.

$|A+A|$ és $|A \cdot A|$ legfeljebb $\binom{n}{2} + n$. Legyen A egy véletlenül választott n elemszámú számhalmaz, ekkor $A + A$ és $A \cdot A$ is majdnem biztosan $\binom{n}{2} + n$ elemű lesz.

Becsüljük $|A + A|$ minimumát. Legyen A olyan, hogy elemei $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$.

- Alsó becslés: $a_1 + a_1 < a_1 + a_2 < \ldots a_1 + a_n < a_2 + a_n < \ldots < a_n + a_n$. alapján mindig lesz legalább $2n - 1$ különböző érték $A + A$-ban.
- Felső becslés: Ha A számtani sorozat, akkor $|A + A| = 2n - 1$.

Becsülhetjük $|A \cdot A|$ minimumát. $|A \cdot A|$ lehet $2n-1$, például geometriai sorozatnál. Lineáris alsó becslés is adható: Ehhez vegyük A-nak egy nagy részét amely azonos előjelű (ez választható legalább $\lfloor (n-1)/2 \rfloor$ elemszámúnak). Majd a kiválasztott elemek abszolút értékeinek logaritmusára alkalmazzuk az additív rész alsó becslését.

A maximális elemszámmal szemben a minimális elemszámnál az összeghalmaz és a szorzathalmaz esetén teljesen más típusú halmazok lesznek extremálisak (számtani, illetve mértani sorozatok). Van-e olyan halmaz, ahol az összeghalmaz és a szorzathalmaz egyszerre kicsi lesz?

Erdős Pál kérdése: Mit tudunk mondani az A számhalmaz $\max\{|A + A|, |A \cdot A|\}$ paraméteréről?

Sejtés (Erdős—Szemerédi-sejtés). Minden pozitív ϵ-ra

$$\min_{\substack{A \\ A \subseteq \mathbb{R}, |A|=n}} \max\{|A + A|, |A \cdot A|\} = \Omega(n^{2-\varepsilon}).$$

A sejtés mind a mai napig nyitott. Mi egy rész eredményt bizonyítunk (amelynél már erősebb becslések is ismertek).

6. Tétel (Elekes György). *Elég nagy n-re*

$$\min_{\substack{A \\ A\subseteq\mathbb{R},|A|=n}} \max\{|A+A|,|A\cdot A|\} \geq \frac{1}{10}n^{5/4},$$

azaz tetszőleges n-elemű A számhalmazra $\max\{|A+A|,|A\cdot A|\} = \Omega(n^{5/4})$.

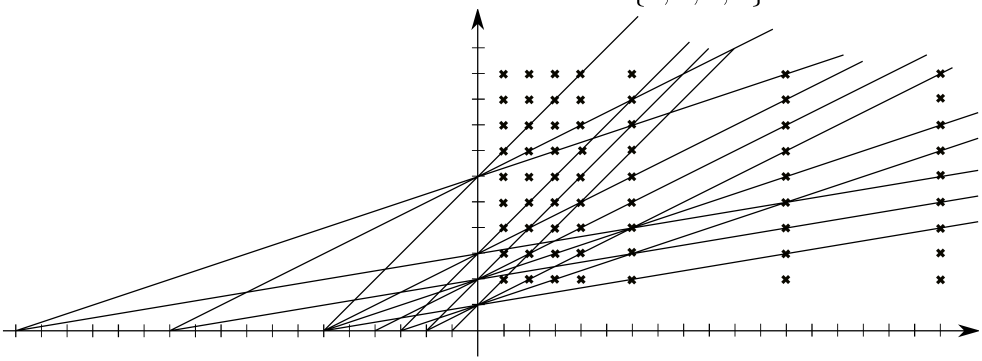
Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $0 \notin A$.

Definiálunk egy síkbeli ponthalmazt és egyeneshalmazt:

$$\mathcal{P}_A = \{(\pi,\sigma) : \pi \in A\cdot A,\ \sigma \in A+A\},$$

$$\mathcal{E}_A = \{e_{a,a'} :\ y = \frac{1}{a}\cdot x + a',\ a,a' \in A\}.$$

A következő ábrán a konstrukció látható az $A = \{1,2,3,6\}$ esetben.



Számoljuk ki a pont- és egyeneshalmazunk azon paramétereit, amik a Szemerédi—Trotter-tételben szerepet játszanak:

- $|\mathcal{P}_A| = |A\cdot A|\cdot|A+A|$.
- Az $e_{a,a'}$ egyenletét tengelymetszetes alakba írjuk: $\frac{1}{a'}\cdot y - \frac{1}{a\cdot a'}\cdot x = 1$. Látható, hogy a tengelymetszetek (azaz a geometriai ponthalmaz) és (a,a') kölcsönösen meghatározzák egymást. Azaz $|\mathcal{E}_A| = |A|^2$.
- Mennyi az illeszkedések száma? Az $e_{a,a'}$ egyenesre illeszkednek az $(a\cdot a_1, a_1 + a')$, $(a\cdot a_2, a_2+a'),\ldots$, ahol $A = \{a_1,a_2,\ldots\}$. Ebből $I(\mathcal{P},\mathcal{E}) \geq |A||\mathcal{E}| = |A|^3$.

Használjuk fel a Szemerédi—Trotter-tételt:

$$n^3 = |A|^3 \leq I(\mathcal{P},\mathcal{E}) \leq 4|A\cdot A|^{2/3}\cdot|A+A|^{2/3}\cdot(|A|^2)^{2/3} + 4|A\cdot A||A+A| + |A|^2.$$

Tudjuk, hogy $|A|^2 = n^2 \leq \frac{1}{3}n^3$, ha n elég nagy. Feltehető, hogy $4|A+A||A\cdot A| \leq \frac{1}{3}n^3$, hiszen más esetben a bizonyítandónál erősebb állításunk lenne. A jobb oldal utolsó két tagját a bal oldalra víve, a bal oldalon még legalább $1/3\cdot n^3$ marad:

$$\frac{1}{3}n^3 \leq 4|A\cdot A|^{2/3}|A+A|^{2/3}\cdot n^{4/3}.$$

Ezekután egyszerű rendezés vezet el a bizonyítás befejezéséhez:

$$\frac{1}{12}n^{5/3} \leq |A \cdot A|^{2/3}|A + A|^{2/3}.$$

$$0{,}15 \cdot n^{5/4} \leq \sqrt{|A \cdot A||A + A|} \leq \max\{|A \cdot A|, |A + A|\}.$$

■