Gráfelmélet/Diszkrét Matematika MSc hallgatók számára

Gráfok magasabb fokú összefüggősége

2017. Előadó: Hajnal Péter

1. Menger tételei (emlékeztető)

Az Algoritmuselmélet tárgyban szerepel a folyamok elmélete (ott megtalálhatók a szükséges definíciók). A következő tétel a folyamok alaptétele.

1. Tétel. *Legyen $\mathcal{H}$ egy hálózat és f egy folyam benne. Ekkor a következők ekvivalensek:*

(i) f egy maximális értékű folyam a $\mathcal{H}$ hálózatban.

(ii) A $\mathcal{H}$ hálózatban nincs f-re vonatkozó javító út.

(iii) A $\mathcal{H}$ hálózatban van olyan forrás/nyelő vágás, amely kapacitása megegyzik f értékével.

Ennek a tételnek egy nyilvánvaló következménye a Maximális-folyam-minimális-vágás (röviden MFMC) tétel.

2. Következmény. *Legyen $\mathcal{H} : (\overrightarrow{G}, c, s, t)$ egy hálózat. Ekkor*

$$\max\{\acute{e}(f) : \ f \text{ folyam } \mathcal{H}\text{-ban}\} = \min\{c(\mathcal{V}) : \ \mathcal{V} \text{ forrás/nyelő vágás } \mathcal{H}\text{-ban}\}.$$

Az alaptétel egy másik következménye a Ford—Fulkerson-algoritmus, amely garantálja, hogy ha a $\mathcal{H}$ hálózatban minden él kapacitása egész ($c : E(\overrightarrow{G}) \to \mathbb{Z}$), akkor van olyan optimális folyam is, amelyben minden élen egész anyagmennyiség folyik.

Ha az MFMC tételt és a fenti megállapítást alkalmazzuk egy $\overrightarrow{G}$ irányított gráfra s/t forrás/nyelő csúccsal, amelyben minden él kapacitása 1, akkor kapjuk Menger tételét.

3. Tétel. *Legyen $\overrightarrow{G}$ egy tetszőleges irányított gráf két kitüntetett s, t csúccsal. Ekkor*

$$\max\{k : P_1, P_2, \dots, P_k \text{ él-diszjunkt } \overrightarrow{st} \text{ utak } \overrightarrow{G}\text{-ben}\} = \\ \min\{|S| : \ S \subset E(G) \text{ forrás}\to\text{nyelő szeparáló élhalmaz}\}.$$

Ebből könnyű három másik változatát is levezetni Menger tételének az alap (irányított, éldiszjunkt változat) formája mellett.

4. Tétel (Menger tételei). *Legyen $\overrightarrow{G}$ egy tetszőleges irányított gráf két kitüntetett s, t csúccsal. Ekkor*

(i)

$$\max\{k : P_1, P_2, \dots, P_k \text{ él-diszjunkt } \overrightarrow{st} \text{ utak } \overrightarrow{G}\text{-ben}\} = \\ \min\{|S| : \ S \subset E(G) \text{ forrás/nyelő szeparáló élhalmaz}\}.$$

(ii)

$$\max\{k : P_1, P_2, \ldots, P_k \textit{ belső-csúcs-diszjunkt } \overrightarrow{st} \textit{ utak } \overrightarrow{G}\textit{-ben}\} =$$
$$\min\{|U| : U \subset V(\overrightarrow{G}) - \{s,t\} \textit{ forrás}\rightarrow\textit{nyelő szeparáló csúcshalmaz}\}.$$

Legyen G egy tetszőleges irányítatlan gráf két kitüntetett s, t csúccsal. Ekkor

(iii)

$$\max\{k : P_1, P_2, \ldots, P_k \textit{ él-diszjunkt } st \textit{ utak } G\textit{-ben}\} =$$
$$\min\{|S| : S \subset E(G) \textit{ forrás/nyelő szeparáló élhalmaz}\}.$$

(iv)

$$\max\{k : P_1, P_2, \ldots, P_k \textit{ belső-csúcs-diszjunkt } st \textit{ utak } G\textit{-ben}\} =$$
$$\min\{|U| : U \subset V(G) - \{s,t\} \textit{ forrás/nyelő szeparáló csúcshalmaz}\}.$$

Megjegyezzük, hogy a belcső-csúcs-diszjunkt utak esetében ha létezik $\overrightarrow{st}$ vagy st él, akkor a tétel érdektelen: Megfelelő szeparáló U halmaz nem létezik, a P_i utak ugyanazon egy élű út (belső csúcs nélkül) lehetnek. Azaz mindkét optimalizálási feladat optimuma ∞. Érdemes az s és t közötti élek hiányát feltenni.

2. Gráfok magasabb fokú összefüggése

Definíció. Legyen k egy pozitív egész. G gráf *k-szorosan élösszefüggő* ($k$élöf), ha tetszőleges k-nál kisebb elemszámú élhalmazát elhagyva a kapott gráf összefüggő lesz. Formulával:

$$\text{Minden } F \subseteq E(G) \text{ élhalmazra } |F| < k \text{ esetén } G - F \text{ összefüggő.}$$

A feltételnek teljesülni kell $F = \emptyset$ esetén is, azaz alapgráfunk összefüggő. Az összefüggőségnek meg kell maradnia, ha valódi élelhagyás történik.

Definíció. Egy G gráf *k-szorosan (pont)összefüggő* ($k$öf.), ha tetszőleges k-nál kisebb elemszámú csúcshalmazát elhagyva a kapott gráf összefüggő és $|V(G)| > k$. Formálisan

$$\text{Minden } U \subseteq V(G) \text{ csúcshalmazra } |U| < k \text{ esetén } G - U \text{ összefüggő, továbbá } |V| > k.$$

A pontszámra adott technikai feltétel szerepe, hogy a gráf elegendően nagy legyen: a csúcsok elhagyása után is legalább két pont maradjon.

Példa. A fák nem kétszeresen élösszefüggőek, ha van élük. A körök kétszeresen élösszefüggőek, és így kétszeresen összefüggőek is, de nem háromszorosan összefüggőek. A $k+1$ ponttú gráfok közül csak a teljes gráf k-összefüggő.

Megjegyzés. A következő diagram a különböző összefüggőségi fogalmak viszonyait foglalja össze. Azon gráfosztályok között, amelyek tartalmazása nem vezethető le a diagramból nincs is tartalmazás.

$$\begin{array}{ccccccccc}
1\text{öf} & \Leftarrow & 2\text{öf} & \Leftarrow & 3\text{öf} & \Leftarrow \ \ldots \ \Leftarrow & k\text{öf} & \Leftarrow \\
\Updownarrow^{*} & & & & & & & \\
\text{öf} & & \Big\Downarrow & & \Big\Downarrow & & \Big\Downarrow & \\
\Updownarrow & & & & & & & \\
1\text{élöf} & \Leftarrow & 2\text{élöf} & \Leftarrow & 3\text{élöf} & \Leftarrow \ \ldots \ \Leftarrow & k\text{élöf} & \Leftarrow
\end{array}$$

A vízszintes sorokban levő kapcsolatok a definíciók alapján nyilvánvalóak. A függőleges nyilakkal jelölt kapcsolatok egy kicsit nehezebbek. A csillagozott ekvivalencia csak korlázottan igaz. 1-szeresen összefüggőségben a legalább két pontúság is feltétel, összefüggőségnél nem. A többi függőleges implikáció az alábbi lemmából következik.

5. Lemma. *Legyen e egy G gráf tetszőleges éle és v egy tetszőleges pontja. Legyen $k \geq 2$.*

(a) Ha G k-szorosan élösszefüggő, akkor $G - e$ $(k-1)$-szeresen élösszefüggő.

(b) Ha G k-szorosan összefüggő, akkor $G - v$ $(k-1)$-szeresen összefüggő.

(c) Ha G k-szorosan élösszefüggő, akkor $G - v$-nek tetszőleges számú komponense lehet.

(d) Ha G k-szorosan összefüggő, akkor $G - e$ $(k-1)$-szeresen összefüggő.

Célunk, hogy belássuk a többszörösen összefüggő gráfok következő jellemzését.

6. Tétel. *(i) Egy G gráf akkor és csak akkor k-szorosan élösszefüggő, ha tetszőleges két pontja között létezik k darab páronként éldiszjunkt út.*

(ii) Egy G gráf akkor és csak akkor k-szorosan összefüggő, ha tetszőleges két pontja között létezik k darab út, amelyek belső pontjainak halmaza páronként diszjunktak (Útjaink pontfüggetlenek), továbbá $|V(G)| > k$.

A két állítás egy-egy iránya egyszerű: a megfelelő utak létezése garantálja a megfelelő összefüggőséget. Valóban: Tegyük fel, hogy a gráfunk megfelelő ritkítása után nem összefüggő gráfot kapunk, azaz két maradék pont között — x és y — nem lesz út. A feltételt x és y-ra alkalmazva a garantált útrendszer mindegyikét megszüntette a ritkítás. Az utak függetlensége miatt ez nem lehet.

7. Tétel. *Legyen G gráf, k pozitív egész.*

(i) G akkor és csak akkor k-szorosan élösszefüggő, ha bármely $x, y \in V(G)$-re létezik k darab páronként éldiszjunkt xy út G-ben.

(ii) G akkor és csak akkor k-szorosan összefüggő, ha $|V(G)| > k+1$, és bármely x, y csúcsra létezik k darab páronként pontfüggetlen xy út G-ben, azaz utak, amelyek belső pontjainak halmazai páronként diszjunktak.

Bizonyítás. Legyen G, x, y és k adott.

(i) Ha létezik k darab éldiszjunkt xy út G-ben, akkor $k-1$ él elhagyásával még el lehet jutni x-ből y-ba, ezért G k-szorosan élösszefüggő.

Tegyük fel, hogy G k-szorosan élösszefüggő, és alkalmazzuk a Menger-tételt.

$$\begin{aligned} k \leq & \min\{|L| : L \subseteq E(G), G - L\text{-ben nincs } xy \text{ út}\} = \\ = & \max\{l : P_1, \ldots, P_l \text{ éldiszjunkt } xy \text{ utak}\} \end{aligned}$$

Ezért létezik k darab éldiszjunkt xy út G-ben.

(ii) Ha létezik k darab pontfüggetlen xy út G-ben, akkor $k-1$ darab $V(G) \setminus \{x, y\}$-beli pont elhagyásával még el lehet jutni x-ből y-ba, ezért G k-szorosan összefüggő.

Tegyük fel, hogy G k-szorosan összefüggő. Legyen az xy élek halmaza P, P elemszáma p. A P-beli élek pontfüggetlen xy utak. Ha $p \geq k$, akkor teljesül az állítás. Ha $p \leq k-1$, akkor $G-P$ $k-p$-szeresen összefüggő, azt kell belátni, hogy létezik $k-p$ pontfüggetlen xy út $G-P$-ben. Alkalmazzuk a Menger tételének irányítatalan, pontfüggetlen változatás ($G-P$-ben x és y nem összekötött).

$$\begin{aligned} k-p \leq & \min\{|U| :\ U \subseteq V(G) \setminus \{x,y\},\ G-P-U\text{-ban nincs } xy \text{ út}\} = \\ = & \max\{l :\ P_1, ...P_l \text{ pontfüggetlen } xy \text{ utak } G-P\text{-ben}\} \end{aligned}$$

Ezért létezik $k-p$ darab pontfüggetlen xy út $G-P$-ben. k darab pontfüggetlen st utat kapunk G-ben, ha ehhez hozzávesszük P elemeit minde 1-hosszú st utakat. ∎

⋆

Definíció. A G gráf összefüggőségi paraméterei:

$$\kappa_e(G) = \begin{cases} \max\{k :\ G\ k\text{-szorosan élösszefüggő}\}, & \text{ha } G \text{ összefüggő} \\ 0, & \text{ha } G \text{ nem összefüggő} \end{cases}$$

$$\kappa(G) = \begin{cases} \max\{k :\ G\ k\text{-szorosan összefüggő}\}, & \text{ha } G \text{ összefüggő} \\ 0, & \text{ha } G \text{ nem összefüggő} \end{cases}$$

Észrevétel. Minden G gráfra teljesülnek a következők:

$$\begin{aligned} \kappa_e(G) = & \min_{x,y \in E(G)} \max\{k :\ P_1, ...P_k \text{ éldiszjunkt } xy \text{ utak}\} = \\ = & \min_{x,y \in E(G)} \min_{\mathcal{V}\ xy \text{ vágás}} |E(\mathcal{V})| = \min_{\mathcal{V} \text{ vágás}} |E(\mathcal{V})|, \end{aligned}$$

ahol $\mathcal{V} = \{S,T\}$, $S \cup T = V(G)$, $S \cap T = \emptyset$, $S,T \neq \emptyset$.

8. Lemma. *$\kappa_e(G)$ és $\kappa(G)$ is hatékonyan kiszámolható folyam-algoritmussal.*

Megjegyzés. $\max_{\mathcal{V} \text{ vágás}} |E(\mathcal{V})|$ kiszámítása nehéz, $\mathcal{NP}$-teljes probléma.

3. Minimálisan k-szorosan élösszefüggő gráfok

Definíció. Legyen G gráf, k pozitív egész. G-t minimálisan k-szorosan élösszefüggőnek nevezzük, ha

(i) k-szorosan élösszefüggő, továbbá

(ii) bármely e élre $G-e$ már nem k-szorosan élösszefüggő.

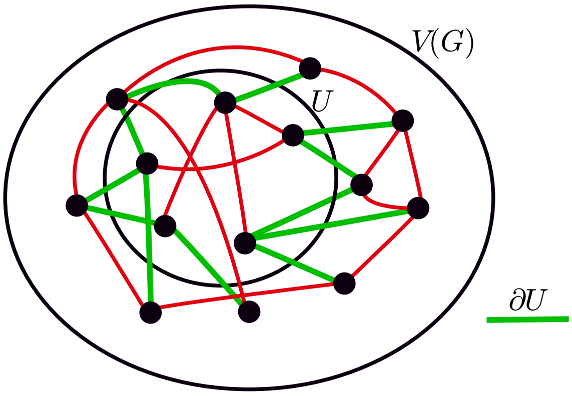
Megjegyzés. $k = 1$-re a minimálisan k-szorosan élösszefüggő gráfok a fák.

Ha G minimálisan k-szorosan élössszefüggő, akkor nincs benne hurokél.

Ha G k-szorosan élösszefüggő és legalább két csúcsa van, akkor minden csúcs foka legalább k.

Jelölés. $U \subseteq V(G)$ határa:

$$\partial U = \{xy \in E(G) :\ x \in U \text{ és } y \notin U, \text{ vagy } x \notin U \text{ és } y \in U\}$$



Példa. Az ábrán a zöld élek ∂U elemei.

Megjegyzés. $\partial U = \partial \overline{U}$, ahol $\overline{U} = V(G) \setminus U$.

Ha G-ben nincs hurokél, akkor bármely $x \in V(G)$-re $d(x) = |\partial\{x\}|$.

G akkor és csak akkor k-szorosan élösszefüggő, ha $V(G)$ bármely valódi, nem-üres részhalmazának határa legalább k darab élt tartalmaz.

9. Tétel. *Legyen k pozitív egész, G minimálisan k-szorosan élösszefüggő gráf, $|V(G)| \geq 2$. Ekkor a következők teljesülnek:*

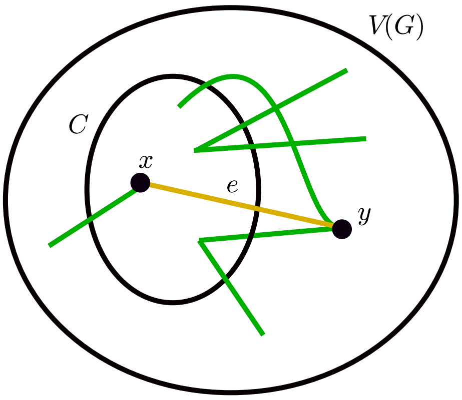
(i) Van G-ben k-fokú csúcs.

(i)$^+$ G-ben legalább két darab k-fokú csúcs van.

Definíció. k pozitív egész, G minimálisan k-szorosan élösszefüggő gráf. A $P \subseteq V(G)$ halmazt pontos halmaznak nevezzük, ha a határa k elemű.

Észrevétel. A tétel i) állítása ekvivalens azzal, hogy G-ben van egyelemű pontos halmaz.

Ha tetszőleges $e = xy \in E(G)$-re $G - e$ nem k-szorosan élösszefüggő, akkor létezik olyan $C \subset V(G)$ cáfoló halmaz, amelyre $|\partial_{G-e}C| < k$. Ekkor C pontos G-ben és elválasztja x-t és y-t:

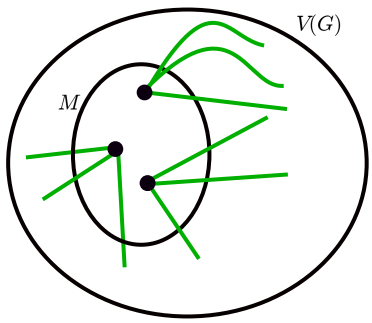


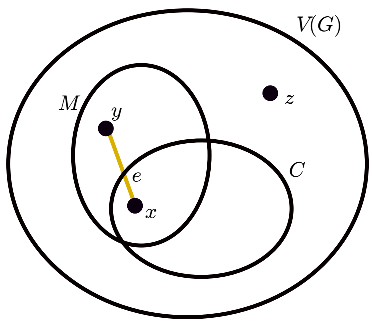
Bizonyítás. i) Legyen M minimális pontos halmaz G-ben, azaz olyan pontos halmaz, amelynek semelyik valódi részhalmaza sem pontos. Azt állítjuk, hogy M egyelemű. Két eset van:

1. eset: *M-en belül nem halad él.* Ekkor a következő egyenlőség teljesül:

$$k = |\partial M| = \sum_{m \in M} |\partial\{m\}| = \sum_{m \in M} d(m)$$

Tudjuk, hogy G-ben minden csúcs foka legalább k, ezért M csak egyelemű lehet.
2. eset: *M-en belül halad legalább egy él.* Legyen ez az él xy. Tudjuk, hogy G-ben nem lehet hurokél, így x és y két különböző csúcs.





M pontos, tehát $M \neq V(G)$. Legyen $z \in V(G) \setminus M$. Az észrevételek miatt van olyan $C \subseteq V(G)$ pontos halmaz, ami elválasztja x-t és y-t. Feltehető, hogy $z \notin C$; ha eleme lenne akkor C helyett vehetnénk $\overline{C}$-t.

10. Lemma (Szubmoduláris egyenlőtlenség). *Ha H gráf és $A, B \subseteq V(H)$, akkor teljesül a következő egyenlőtlenség:*

$$|\partial(A \cap B)| + |\partial(A \cup B)| \leq |\partial A| + |\partial B|$$

A lemma bizonyítása egyszerű: minden élre megnézzük, hogy hányszor számolja a bal, illetve jobb oldal. Azt tapasztaljuk, hogy a jobb oldal mindig legalább annyiszor megszámolja, mint a bal oldal. A részleteket az érdeklődő hallgatóra bízzuk.

Alkalmazzuk a lemmát M-re és C-re. Választásaink alapján $M \cap C \neq \emptyset$, $M \cup C \neq V(G)$:

$$k + k \leq |\partial(M \cap C)| + |\partial(M \cup C)| \leq |\partial M| + |\partial C| = 2k$$

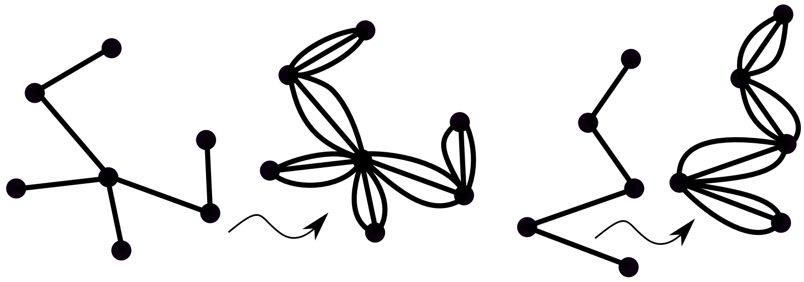
Az egyenlőtlenség első és utolsó tagja egyenlő, ezért összes becslésünk éles, speciálisan $|\partial(M \cap C)| = k$. Az x és y csúcsok közül valamelyik nem eleme C-nek, ezért $M \cap C$ valódi pontos részhalmaza M-nek. Ez ellentmond M minimalitásának, a második eset nem lehetséges.

ii) Legyen P pontos halmaz G-ben. Ekkor $\overline{P}$ is pontos. P-nek és $\overline{P}$-nek van egy-egy tartalmazásra nézve minimális pontos részhalmza, legyenek ezek M_1 és M_2. Ez két különböző egyelemű pontos halmaz G-ben. ■

Példa. Legyen $m \geq 2$ egész. Ha egy T fában minden él helyére m darab párhuzamos élt teszünk, akkor egy minimálisan m-szeresen élösszefüggő gráfot kapunk.

Speciálisan, ha T egy legalább egy hosszú út, akkor pontosan két olyan csúcsunk lesz, amelynek foka m.

Az alábbi ábra az $m = 3$ esetet szemlélteti.



4. Lovász leemelési lemmája és következményei

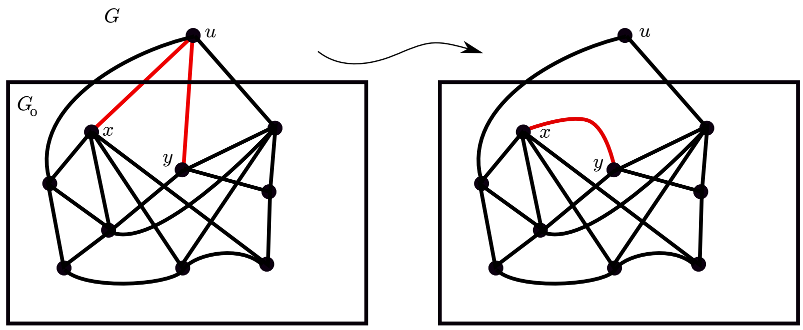
4.1. A lemma

11. Tétel (Lovász László leemelési lemmája). *Legyen G gráf, $u \in V(G)$, $G_0 = G - u$, $k \geq 2$ egész. Tegyük fel az u és G_0 közötti élek száma páros és pozitív, valamint u-ra teljesül a következő feltétel:*

(L) Ha U nemtriviális részhalmaza $V(G_0)$-nek, akkor $|\partial_G U| \geq k$.

Ekkor az u-ra illeszkedő élek között található olyan $e = ux$ és $f = uy$ él, hogy a $\widetilde{G} = G - e - f \dot{+} xy$ gráf is rendelkezzen az (L) tulajdonsággal.

Az állítás által garantált módosítást egy ábrával szemléltetjük.



Az ábrán a piros éleket cseréljük. Ha x és y között már halad él, akkor egy új, a már meglévő xy élekkel párhuzamos élt veszünk fel.

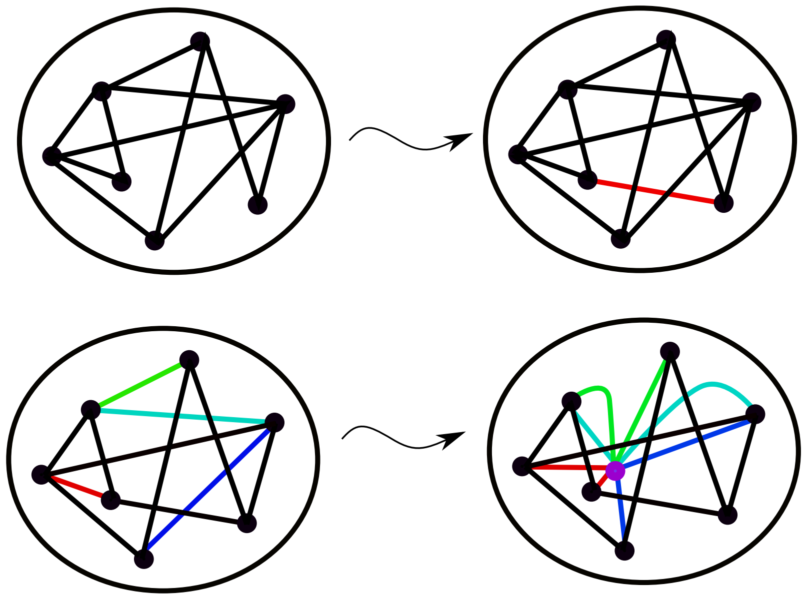
4.2. Alkalmazás: 2ℓ-szeresen élösszefüggő gráfok növekedése

Legyen G gráf, k páros pozitív egész szám. Definiáljuk a következő két operációt:
Élhozzáadás: A G két tetszőleges pontja közé egy új élt teszünk, ezzel a G^+ gráfot kapjuk.

Példa az élhozzáadás és összecsípés ($k = 8$) operációkra

$k/2$ **darab él összecsípése:** A G gráfban törlünk $k/2$ darab élt és felveszünk egy új pontot. A törölt éleket olyan 2 hosszúságú utakkal helyettesítjük, amelyek két végpontja a törölt él két végpontja és középső pontja az új csúcs. Így egy új, $\widetilde{G}$ gráfot kapunk.

Észrevétel. Ha G k-szorosan élösszefüggő, akkor G^+ és $\widetilde{G}$ is az. G^+ esetén ez nyilvánvaló. $\widetilde{G}$ esetén azt kell ellenőrizni, hogy $V(G)$ tetszőleges valódi, nem-üres



részhalmazának határa legalább k elemű. Ezt elég az új pontot nem tartalmazó halmazokra megnézni. Ez egyszerű feladat.

Ez előző észrevétel iterálható: Legyen G_0, az a gráf, aminek egy pontja van és nincs éle. Tegyük fel, hogy G felépíthető az alábbi módon:

$$G_0 \to G_1 \to \ldots \to G_l = G,$$

ahol minden $i = 0, \ldots, l-1$-re a $G_i \to G_{i+1}$ művelet vagy élhozzáadás, vagy $k/2$ darab él összecsípése. Ekkor G k-szorosan élösszefüggő.

Célunk a fenti észrevétel megfordításának igazolása.

12. Tétel. *Ha k pozitív páros szám, és G k-szorosan élösszefüggő gráf, akkor G felépíthető G_0-ból (lásd fent) az előző két operáció segítségével.*

Bizonyítás. Legyen G és k adott. Az élszám szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk az állítást. G_0 és az összes egypontú gráf triviálisan felépíthető. Legyen G egy legalább két csúcsot tartalmazó k-szorosan összefüggő gráf. Tegyük fel, hogy a legfeljebb $|E(G)| - 1$ élszámú gráfok felépíthetőek.

Két eset lehetséges:

1. eset: G nem minimálisan k-szorosan élösszefüggő. Ekkor G-nek van olyan e éle, hogy $G - e$ k-szorosan élösszefüggő. $|E(G-e)| = |E(G)| - 1$ és az indukciós feltevés miatt $G - e$ felépíthető. Így az e él hozzá/vissza-adásával kapott G gráfot is felépíthetjük G_0-ból.

2. eset: G minimálisan k-szorosan élösszefüggő, $|V(G)| \geq 2$.

Ebben az esetben a G-nek van egy u csúcsa, aminek a fokszáma k. Erről a csúcsról a Lovász-lemma $k/2$-szörös alkalmazásával emeljük le az éleket, majd töröljük u-t. Így a lemma miatt egy H k-szorosan élösszefüggő gráfot kapunk, aminek kevesebb éle van, mint G-nek. Ha a H gráf $E(H) \setminus E(G)$ halmazbeli éleit egy u pontba összecsípjük, akkor a G gráfot kapjuk. Az 1. esethez hasonlóan adódik, hogy G felépíthető G_0-ból a két operáció alkalmazásával. ■

4.3. A lemma bizonyítása

A Lovász-lemma következő, az eredetinél kissé erősebb változatát bizonyítjuk:

13. Lemma $^+$. *Legyen G gráf, $u \in V(G)$, $G_0 = G - u$, $k \geq 2$ egész. Tegyük fel az u és G_0 közötti élek száma páros és pozitív, valamint G_0-ra teljesül az (L) feltétel. Ekkor bármely $e = ux$ élhez van olyan $f = uy$ él, hogy a $\widetilde{G} = G - e - f \dot{+} xy$ gráf is rendelkezzen az (L) tulajdonsággal.*

Bizonyítás. Legyen G, u, k és $e = ux$ adott. Próbáljuk az $f = uy$ élt. Legyen $\widetilde{G} = G - e - f \dot{+} xy$. Tegyük fel, hogy $\widetilde{G}$ nem (L) tulajdonságú. Ekkor létezik $C_f \subseteq V(G_0)$ cáfoló halmaz, amelyre $|\partial_{\widetilde{G}} C_f| < k$.

Ha C_f elvágja x-t és y-t, akkor $|\partial_{\widetilde{G}} C_f| = |\partial_G C_f| \geq k$, ami ellentmondás.

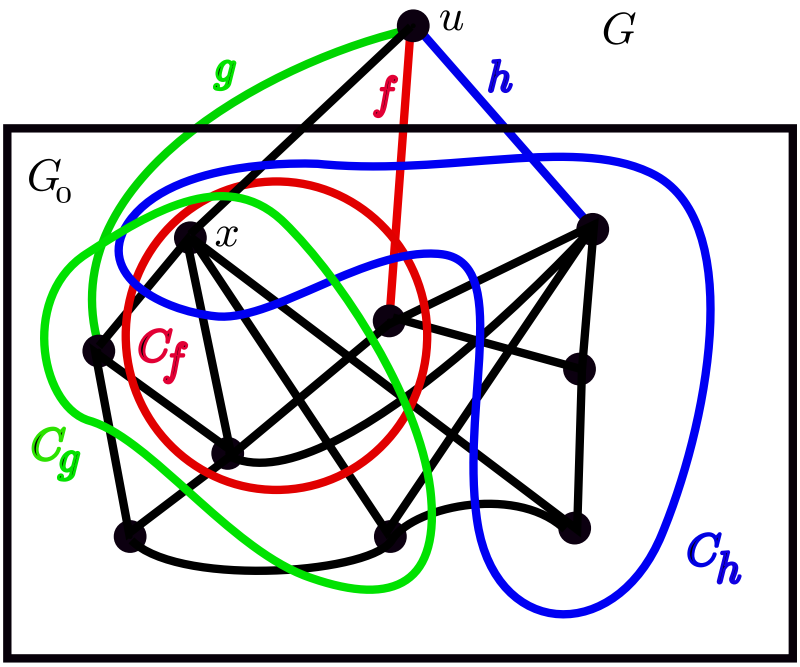
C_f nem vágja el x-t és y-t. Feltehető, hogy $x, y \in C$; ellenkező esetben C helyett vehetnénk $V(G_0) \setminus C$-t.

Ekkor $k > |\partial_{\widetilde{G}} C_f| = |\partial_G C_f| - 2$, ezért $|\partial_G C_f| \leq k + 1$. Jelöljük $V(G_0) \setminus C_f$-t $\overline{C_f}$-rel. Legyen az $u - G_0$ élek száma d, az $u - C_f$ élek száma d_1, az $u - \overline{C_f}$ élek száma d_2 és a $C_f - \overline{C_f}$ élek száma d_3. A G gráf (L) tulajdonságú, ezért $d_2 + d_3 = |\partial_G \overline{C_f}| \geq k$, valamint $d_1 + d_3 = |\partial_G C_f| \leq k + 1$. $d_1 + d_2 = d$ páros, azaz $d_1 \equiv d_2 \mod 2$, ezért

$$d_1 \leq d_2. \tag{1}$$

Azaz az u-ból induló éleknek maximum fele haladhat a C_e cáfoló halmazhoz.

Más élekre is ismételjük meg az eljárást.



Vagy találunk megfelelő uy élt, vagy kapunk cáfoló halmazok egy $\mathcal{C}$ halmazát, amelyre $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$ tartalmazza u szomszédságát. Ritkítsuk ki a $\mathcal{C}$ halmazrendszert úgy, hogy ezen tulajdonság teljesüljön, de benne minimális számú cáfoló halmaz legyen. Legyen $\mathcal{C}_0$ az így kapott rendszer. (1) alapján nem lehet, hogy $\mathcal{C}_0$ csak két cáfoló halmazból álljon: Ekkor u-ból induló éleknek maximálisan a fele haladhatna a két halmaz mindegyikéhez úgy, hogy az ux él mindkettőben szerepel és a két halmaz mégis lefedé u szomszédságát. Ez pedig nyilván nem lehet.

A továbbiakhoz szükségünk van egy lemmára.

14. Lemma. *Ha H gráf, és $A, B, C \subseteq V(H)$, akkor teljesül a következő egyenlőtlenség:*

$$|\partial(A \cap B \cap C)| + |\partial(A \cap \overline{B} \cap \overline{C})| + |\partial(\overline{A} \cap B \cap \overline{C})| + |\partial(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)| \leq |\partial A| + |\partial B| + |\partial C|$$

A lemma bizonyítása (mint a szubmoduláris egyenlőtlenség bizonyítása) egyszerű számolás. Minden élre ellenőrizni kell, hogy a bal, illetve jobb oldal hányszor számolja meg. A jobb oldalhoz minden él legalább annyi hozzájárulást ad mint bal oldalhoz.

Legyen $C_1, C_2, C_3 \in \mathcal{C}_0$. Alkalmazzuk a lemmát ezekre, azzal a plusz észrevétellel, hogy az ux él a bal oldalon egyszer, míg a jobb oldalon háromszor van számolva:

$$|\partial(C_1 \cap C_2 \cap C_3)| + |\partial(C_1 \cap \overline{C_2} \cap \overline{C_3})| + |\partial(\overline{C_1} \cap C_2 \cap \overline{C_3})| + |\partial(\overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap C_3)| \leq$$
$$\leq |\partial C_1| + |\partial C_2| + |\partial C_3| \leq (k+1) + (k+1) + (k+1) - 2$$

A kiinduló négy tagú összegben szereplő háromtagú metszethalmazok mindegyike nem üres (az elsőnek eleme x, a többi üressége abból ered, hogy $\mathcal{C}_0$ egyik elemét sem lehet elhagyni úgy, hogy lefedjék u szomszédságát, például C_3 szükségszerűen metszi $\overline{C_1} \cap \overline{C_2}$-t). Így az (L) tulajdonság miatt a négy tagú összeg mindegyik tagja legalább k. Összefoglalva $4k \leq 3k + 1$, azaz rendezés után $k \leq 1$.

Ez ellentmondás, mert feltettük, hogy $k \geq 2$. Azaz valamelyik uy él kielégíti a lemma állítását. ■