Gráfelmélet/Diszkrét Matematika MSc hallgatók számára

Halmazrendszerek és alapvető extremális problémái

2017. Előadó: Hajnal Péter

1. Sperner-rendszerek és Sperner-tétel

Definíció. $\mathcal{S}$ Sperner-rendszer V ($n := |V|$) felett, ha bármely $E, E' \in \mathcal{S}$-re $E \not\subset E'$.

A témakör fő kérdése: Mekkora lehet V felett a legnagyobb elemszámú Sperner-rendszer?

Példa. Bármely $0 \leq k \leq n$ esetén $S = \binom{V}{k} = \{R \subset V : |R| = k\}$ Sperner-rendszer. Ennek $\binom{n}{k}$ eleme van. $k = [n/2]$ esetén kapjuk a legnagyobb elemszámú rendszert.

1. Tétel (Sperner-tétel). *A V feletti Sperner-rendszerek maximális elemszáma $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.*

A tétel központi jelentőségű. Két bizonyítást is adunk rá.

I. Bizonyítás:

Szükséges van egy lemmára, amihez bevezetünk egy fogalmat:

Definíció. Legyen $\mathcal{H}$ egy n elemű V feletti halmazrendszer. Ekkor $\mathcal{H}$ f-vektora az a $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ vektor, amely f_i komponense megmondja, hogy hány i elemű él szerepel $\mathcal{H}$-ban.

A lemma Sperner-rendszerek f-vektoráról állít egy fontos egyenlőtlenséget:

2. Lemma. *(LYM-egyenlőtlenség) Legyen S egy Sperner-rendszer V felett. Ekkor f-vektorára*

$$\sum_{i=0}^{|V|} \frac{f_i}{\binom{n}{i}} \leq 1.$$

Megjegyzés. A lemma elnevezése onnan ered, hogy Lubell, Yamamoto és Meshalkin bizonyította egymástól függetelnül. Neveik kezdőbetűiből állították össze a hivatkozást. Gyakran Bollobás Béla nevét is a lemmához fűzik, aki egy rokon állítást igazolt hasonló módszerrel.

Bizonyítás. (LYM-egyenlőtlenség) Legyen π egy tetszőleges $V \to [n]$ bijekció, és $E \in S$ tetszőleges elem. Számoljuk össze azon (π, E) párokat, melyekre $\pi(E)$ $[n]$-nek egy kezdőszelete.

Ha minden egyes $E \in S$-hoz megszámoljuk az összes jó π sorbarendezést, akkor azt kapjuk, hogy $\sum_{E \in S} |E|! \cdot (n - |E|)!$ ilyen pár van.

Legyen most π tetszőleges sorbarendezés. Mivel a tartalmazás reláció teljes rendezés $[n]$ kezdőszeletein, ezért ha $\pi(E_1), \pi(E_2)$ kezdőszelete $[n]$-nek, akkor $E_1 \subset E_2$ vagy $E_2 \subset E_1$. Így ha π sorbarendezés, akkor legfeljebb egy E halmaz esetén lehet $\pi(E)$ kezdőszelete $[n]$-nek.

Az előzővel összevetve:

$$\sum_{E\in S} |E|! \cdot (n-|E|)! \le n!$$

Mindkét oldalt $n!$-sal osztva kapjuk a lemma állítását. ■

Sperner-tétel bizonyítása a LYM egyenlőtlenségből:

$$1 \ge \sum_{i=0}^{|V|} \frac{f_i}{\binom{n}{i}} \ge \sum_{i=0}^{|V|} \frac{f_i}{\binom{n}{[n/2]}} = \frac{|\mathcal{S}|}{\binom{n}{[n/2]}}.$$

II. Bizonyítás Sperner-tételre

A tétel második bizonyításához bevezetünk néhány új fogalmat:

Definíció. Legyen $(P, \le)$ részbenrendezett halmaz. Ekkor $L \subset P$ lánc, ha L bármely két eleme összehasonlítható.

Definíció. Legyen $(P, \le)$ részbenrendezett halmaz. Ekkor $A \subset P$ antilánc, ha A elemei páronként nem összehasonlíthatók.

Észrevétel. A $(\mathcal{P}(V), \subset)$ feletti antiláncok pontosan a V feletti Sperner-rendszerekkel egyeznek meg.

Észrevétel. Bármely L láncra és A antiláncra $|P \cap A| \le 1$.

3. Következmény. *Amennyiben adott $L_1, L_2, ..., L_k$ láncok, melyek lefedik P-t, akkor bármely P feletti antilánc legfeljebb k elemű lehet.*

4. Következmény.

$$\max_{A \text{ antilánc}} (|A|) \le \min_{L_1, L_2, \ldots, L_k \text{ láncfedés}} k$$

Célunk a következő lemma igazolása, amiből korábbi észrevételeink alapján Sperner tétele következik.

5. Lemma. $(\mathcal{P}(V), \subset)$*-en létezik* $\binom{n}{[n/2]}$ *láncot tartalmazó lefedés.*

Az alábbi fogalmat azért vezetjük be, hogy a céllemmánál erősebb, de a teljes indukciós bizonyításhoz jobban illeszkedő változatot mondjunk ki.

Definíció. $\mathcal{L} \subset \mathcal{P}(V)$, $\mathcal{L} : L_1 \subset L_2 \subset ... \subset L_t$ szimmetrikus lánc, ha van olyan i, hogy $|L_1| = i, |L_2| = i+1, \ldots, |L_t| = |V| - i$.

6. Lemma. $(\mathcal{P}(V), \subset)$*-nak létezik diszjunk szimmetrikus láncokkal való fedése.*

Megjegyzés. A szimmetrikusság miatt minden láncban szerepel egy $[n/2]$ elemszámú halmaz. Így a felhasznált láncok száma szükségszerűen $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

Lemma bizonyítása. $|V| = 1, 2, 3$ esetén triviálisan teljesül az állítás. Az indukciós lépéshez legyen $|V| > 1$. Ekkor: $V = V_0 \dot\cup \{u\}$, ahol V_0-ról már tudjuk hogy létezik ilyen fedés.

$\mathcal{P}(V) = \mathcal{P}(V_0)\dot{\cup}\{R \subset V : u \in R\}$. Legyen $\mathcal{P}(V_0) = \mathcal{L}_1\dot{\cup}\mathcal{L}_2\dot{\cup}...\dot{\cup}\mathcal{L}_k$ az indukciós feltevésből. Ekkor az $\mathcal{L}_t : L_1 \subset L_2 \subset \ldots \subset L_j$ láncból az alábbi láncok képezhetők:

$$\mathcal{L}'_t : L_1 \cup \{u\} \subset L_2 \cup \{u\} \subset \ldots \subset L_{j-1} \cup \{u\},$$

valamint

$$\mathcal{L}''_t : L_1 \subset L_2 \subset \ldots \subset L_j \subset L_j \cup \{u\}.$$

Látható, hogy ezek szimmetrikusak a $V_0 \cup \{u\}$ alaphalmazra, páronként diszjunktak. Így a tétel állítását igazolják. Ebből adódik a lemma és így a Sperner-tétel is.

Megjegyzés. Úgy tűnik mintha induktív/rekurzív konstrukciónk közben láncaink száma mindig megduplázódott volna. Pedig a láncok száma nem kettő hatványként növekszik, számuk $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$. A látszólagos ellentmondás feloldása, hogy $\mathcal{L}'_i$ lehet üres is.

2. Sperner-rendszerek és részbenrendezett halmazok

Észrevettük, hogy egy „kicsi” lánc fedés garantálja, hogy részbenrendezett halmazunkban nem lehet „túl nagy” antilánc. Hasonlóan egy „kicsi” antilánc fedés garantálja, hogy részbenrendezett halmazunkban nem lehet „túl nagy” lánc. Célunk annak belátássa, hogy ezen észrevételen alapuló bizonyítási séma „teljes”.

7. Tétel. *Legyen $(P, \leq)$ egy részbenrendezett halmaz.*

(i)

$$\max_{L \text{ lánc}}(|L|) = \min_{A_1, A_2, \ldots, A_k \text{ antiláncfedés}} k$$

(ii) ***(Dilworth-tétel)***

$$\max_{A \text{ antilánc}}(|A|) = \min_{L_1, L_2, \ldots, L_k \text{ láncfedés}} k$$

A tétel második része okozza a valódi nehézséget. Ez a kombinatorika egyik alaptétele.

Bizonyítás. Mindkét állítás kettébontható bal és jobb oldala közötti két irányú egyenlőtlenség igazolására. Mint megjegyeztük mindkét esetben a maximalizálási feladat optimuma nyilvánvalóan kisebb a minimalizálásai feladaténál. A másik irányú egyenlőtlenségeket kell igazolnunk.

(i) Legyen $M = \max_{L \text{ lánc}}(|L|)$

Minden $x \in P$-hez rendeljük hozzá az x-et maximális elemként tartalmazó láncok között a legnagyobb méretét. (Jól definiált az érték, hiszen $\{x\}$ mindig egy x-et maximális elemként tartalmazó lánc.) A hozzárendelés értékkészlete $\{1, 2, \ldots, M\}$. Legyen A_i $(i = 1, 2, \ldots, M)$ azon P-beli elemek halmaza, amikhez az i értéket rendeljük hozzá. Így M halmazzal fedjük le P-t. Ha belátjuk, hogy mindegyik A_i antilánc, akkor készen vagyunk. Ez indirekten könnyen adódik, ha $x < y$ és $x, y \in A_i$, akkor az $x \in A_i$-t bizonyító i elemű lánchoz y-t adva egy olyan $i+1$ elemű láncot kapunk, amely ellentmond az $y \in A_i$ feltevésnek.

(ii) Legyen $M = \max\{|A| : A \text{ antilánc}\}$ és $m = \min\{k : L_1, L_2, \ldots, L_k \text{ fedő láncok}\}$.

$(P, \leq)$ alapján definiálunk egy B páros gráfot. Csúcshalmaza $\{\{p^+, p^-\} : p \in P\}$ kételemű halmazok diszjunkt uniója. A két színosztálya $F = \{p^+ : p \in P\}$ és $A = \{p^- : p \in P\}$. p^+ és q^- akkor és csak akkor van összekötve, ha $p > q$. Célunk, hogy belássuk $\nu(B) = |P| - m$ és $\tau(B) = |P| - M$. Ezek után már adódik az állítás Kőnig tételéből.

Egy láncfedésben szereplő $L : \ell_1 > \ell_2 > \ldots > \ell_s$ láncnak megfeleltethetők az $\ell_1^+\ell_2^-, \ell_2^+\ell_3^-, \ldots, \ell_{s-1}^+\ell_s^-$ élek. Ezt az összes láncra megtéve $|P| - m$ élt kapunk, amelyek egy párosítást alkotnak. A konstrukciónk megfordítható: egy M párosítás p^+q^- éleiból képezzük a P csúcshalmazon a pq éleket. Az így kapott gráf utak egy rendszere lesz. A komponensek ponthalmazai láncok, amelyek lefedik P-t. Így adódik a $\nu(B) = |P| - m$ összefüggés.

Legyen A egy maximális elemszámú antilánc. $P - A$ elemeit osszuk két részbe. L^--t alkossák azok a csúcsok, amelyek valamelyik A-beli elemnél kisebbek. L^+-t alkossák azok a csúcsok, amelyek valamelyik A-beli elemnél nagyobbak. Nyilván L^+ és L^- diszjunkt, továbbá együtt kiadja $P - A$-t. $R = \{p^+ : p \in L^+\}\dot\cup\{p^- : p \in L^-\}$ egy $|P| - M$ méretű lefogó halmaz.

A gondolatmenet megfordítható: Minden $R \subset V(B)$ meghatározza P egy felosztását négy részre

$$P = P^+(R)\dot\cup P^-(R)\dot\cup P^\pm(R)\dot\cup P^0(R)$$

aszerint, hogy $p \in P$ esetén $\{p^+, p^-\}$ hogy viszonyul R-hez. Ekkor

$$R = \{p^- : p \in P^+(R)\}\dot\cup\{p^+ : p \in P^-(R)\}\dot\cup\{p^-, p^+ : p \in P^\pm(R)\}.$$

Ha R lefogó, akkor $P^0(R)$-nek antiláncnak kell lennie. Ha $|R|$-t minimálisnak szeretnénk, akkor $P^\pm(R)$ optimális választása $\emptyset$. ■

3. Sperner-rendszerek és perfekt gráfok

Dilworth-tétel egy gráfelméleti megfogalmazását nézzük. A $(P, \leq)$ részbenrendezett halmaznak megfeleltetünk egy G_p összehasonlítási gráfot. Ennek az egyszerű gráfnak a csúcshalmaza P és két csúcs akkor és csak akkor összekötött, ha összehasonlíthatók.

A fent bevezetett részbenrendezett halmazokkal kapcsolatos optimalizálási kérdések szoros kapcsolatban vannak gráfelméleti optimalizálási feladatokkal.

Észrevétel.

- $\max_{L \text{ lánc}}(|L|) = \omega(G_P)$,
- $\min_{A_1, A_2, \ldots, A_k} = \chi(G_P)$,
- $\max_{A \text{ antilánc}}(|A|) = \alpha(G_P) = \omega(\overline{G_P})$,
- $\min_{L_1, L_2, \ldots, L_k} = \chi(\overline{G_P})$

Az előző tétel kapcsolatai vezetnek el a következő gráfelméleti fogalomhoz:

Definíció. Egy G gráf perfekt, ha minden F feszített részére (csak csúcselhagyásokkal nyerhető részgráfja) $\omega(F) = \chi(F)$.

A korábban bebizonyított tétel ekvivalense a következő:

8. Tétel. *Legyen G_P egy $(P, \leq)$ egy részben rendezett halmaz összehasonlítási gráfja. Ekkor*

(i) G_P perfekt,

(ii) $\overline{G_P}$ perfekt.

4. Metsző halmazrendszerek, Erdős—Ko—Rado-tétel

Definíció. Egy halmazrendszert metszőnek nevezünk, ha bámely két éle metszi egymást.

Azaz egy halmazrendszer metsző, ha tiltjuk a diszjunkt élpárokat.

Az alap extremális kérdés, hogy milyen sok éle lehet egy n elemű ponthalmaz feletti metsző halmazrendszernek. Mint kiderül egy középiskolás veresnyfeladat szintű problémáról van szó.

Példa. Legyen $x \in V$. $\mathcal{H}$ alkossa az összes x-et tartalmazó halmazt. $\mathcal{H}$ nyilván metsző és $|\mathcal{H}| = 2^{|V|-1} = 2^{n-1}$.

Példa. Legyen V egy n elemű halmaz, ahol n páratlan, $n = 2k + 1$. $\mathcal{H}$ alkossa az összes legalább $k + 1$ elemű halmazt. $\mathcal{H}$ nyilván metsző és $|\mathcal{H}| = 2^{|V|-1} = 2^{n-1}$.

Hasonló példa adható, ha az alaphalmaz pontszáma páros és a pontosan $|V|/2$ elemű halmazok által alkotott komplementer párok mindegyikéből csak egyiket rakjuk $\mathcal{H}$-ba, a több mint $|V|/2$ elemű halmazok mellé.

A fenti két példa extremális.

Észrevétel. Egy n elemű V halmaz feletti metsző halmazrendszerek legfeljebb 2^{n-1} élt tartalmaznak.

Valóban: V 2^n darab részhalmazát 2^{n-1} darab komplementer halmazpárra oszthatjuk. Ezek mindegyikéből legfeljebb egyet tartalmazhat metsző halmazrendszerünk.

Jóval nehezebb kérdést kapunk, ha k uniform halmazrendserekkel dolgozunk. $k > |V|/2$ esetben itt sem lesz gond: az összes k-as metsző rendszert alkot. $k \leq |V|/2$ esetben azonban egy alaptétel válaszolja meg kérdésünket.

9. Tétel (Erdős—Ko—Rado-tétel). *Legyen $k \leq n/2$. Legyen $\mathcal{H}$ egy metsző halmazrendszer egy n elemű V csúcshalmaz felett. Ekkor*

$$|\mathcal{H}| \leq \binom{n-1}{k-1}$$

Becslésünk a lehető legjobb, amit egy x elemet tartalmazó összes k elemű halmaz mutat.

(Katona Gyula bizonyítása). Először egy módosított feladatot vizsgálunk: K-t alkossa egy kör n pontja. Ezen pontok között van egy óra mutató járása szerinti rákövetkezés, ami pontjaink egy $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$ sorrendjét eredményezi, ahol az indexek aritmetikája modulo n értendő. $I \subset K = \{v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ esetén azt mondjuk, hogy I az $[a, z]$ ív, ha I tartalmazza a-t és rákövetkezőit, z-ig bezárólag, azaz létezik $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ és $\ell \in \{1, \ldots, n\}$, hogy $I = \{v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{i+\ell-1}\}$. $\ell = |I|$ az I ív hossza. Hány k hosszú ív választható ki úgy, hogy metsző rendszert alkossanak?

Erre a kérdésre a válasz egyszerűbb mint a tételbeli kérdésre: k ív kiválasztható (például $[a_1, a_k], [a_2, a_k], \ldots, [a_k, a_{2k-1}]$), több nem. Valóban: Ha $I = [a_i, \ldots, a_{i+k-1}]$ egy ív rendszerünkből, akkor a többi ívünk mindegyik metszi I-t. Az I-t metsző íveink $k - 1$ komplementerpárba oszthatók: egy tipikus pár az a_j-ben végződő és

a_{j+1}-ben kezdődő két ív. (Itt használjuk, hogy $2k \leq n$.) Így valóban nem lehet $1 + (k-1)$-nél több ívünk.

Ezen észrevételt a LYM egyenlőtlenség bizonyításához hasonló ötlettel alkalmazzuk a tételbeli állításra:

Legyen $\mathcal{H}$ egy k-uniform metsző halmazrendszer. Legyen π egy bijekció V ($\mathcal{H}$ alaphalmaza) és az előző körszerűen rendezett K halmaz között. Számoljuk össze azon (π, E) párokat, ahol $E \in \mathcal{H}$ és $\pi(E)$ egy ív. Az összeszámolást kétféleképpen végezzük el.

Először adott E-hez nézzük meg hányféleképpen választható olyan π, hogy a megfelelő pár számolandó legyen. Egyszerű látni, hogy $\pi(E)$ egy k hosszú ív, amire n lehetőség van. Ennek lerögzi;tés után $k! \cdot (n-k)!$ darab jó bijekció lesz. Az összes pár számára

$$\sum_{E \in \mathcal{H}} n \cdot k!(n-k)! = |\mathcal{H}| n \cdot k!(n-k)!$$

adódik.

Másodszor adott π-hez nézzük meg hány él vezet összeszámolandó párhoz. Itt lesz hasznos a korábbi egyszerűsítés. Az alapján legfeljebb k-t kapunk. Azaz az összes pár számára LEGFELJEBB

$$kn!$$

adódik.

A kétféle válasz összevetése rendezés után adja a tételt. ■

5. Napraforgók (Δ - rendszerek), Erdős—Rado-tétel

Definíció. $H_1, \ldots, H_s$ egy *s szirmú napraforgó* (vagy Δ-rendszer), ha minden $i \neq j$ esetén ($i, j \in \{1, \ldots, s\}$) $H_i \cap H_j = \bigcap_{k=1}^{s} H_k$. A $T = \bigcap_{k=1}^{s} H_k$ halmazt a napraforgó *tányérjának* nevezzük.

Így például s darab páronként diszjunkt halmaz rendszere s szirmú napraforgó.

A napraforgók témakörének az alapkérdése az, hogy ha adott egy k-uniform halmazrendszer, amiben nincs s szirmú napraforgó, akkor annak legfeljebb hány éle lehet?

Egy felső becslést ad a következő tétel.

10. Tétel (Erdős - Rado). *Legyen $\mathcal{H}$ k-uniform halmazrendszer, ami nem tartalmaz s szirmú napraforgót. Ekkor $|\mathcal{H}| \leq (s-1)^k k!$*

Bizonyítás. k szerinti teljes indukcióval bizonyítunk, mégpedig a tétel következő alakját: Ha $\mathcal{H}$ k-uniform és $|\mathcal{H}| > (s-1)^k k!$, akkor $\mathcal{H}$-ban van s szirmú napraforgó.

A $k = 1$ eset triviális, figyelembe véve, hogy egy 1-uniform halmazrendszer elemei diszjunkt egy-egy pontot tartalmazó élek és így bármelyik s él s szirmú napraforgót alkot.

Tegyük fel, hogy $(k-1)$-re igazoltuk az állítást. A k-ra való lépéshez szükség lesz a következő lemmára.

11. Lemma. *Legyen $\mathcal{H}$ k-uniform halmazrendszer és $t \in \{2, 3, \ldots\}$. Ekkor a következők valamelyike teljesül:*

(i) *létezik t diszjunkt él,*

(ii) *van olyan* $v \in V$*, hogy* v*-n legalább* $\frac{|\mathcal{H}|}{(t-1)k}$ *él halad át.*

A lemmából következik a tétel állítása. Alkalmazzuk $t = s$-re a lemmát. Ha *(i)* teljesül, akkor van s diszjunkt él, ami egy s szirmú napraforgót jelent. Ha *(ii)* teljesül, akkor legyen $\widetilde{\mathcal{H}} = \{E \backslash \{v\} : v \in E \in \mathcal{H}\}$. (Vagyis a v-t tartalmazó élekből kivesszük v-t.) Nyilvánvalóan $\widetilde{\mathcal{H}}$ $(k-1)$-uniform és

$$\widetilde{\mathcal{H}} \geq \frac{|\mathcal{H}|}{k(t-1)} > \frac{(s-1)^k k!}{k(s-1)} = (s-1)^{k-1}(k-1)!$$

Az indukciós feltevés alapján $\widetilde{\mathcal{H}}$-ban van s szirmú napraforgó, jelölje ezt $S_1, \ldots, S_s$. Ekkor $S_1 \cup \{v\}, \ldots, S_s \cup \{v\}$ s szirmú napraforgó $\mathcal{H}$-ban.

Már csak a lemmát kell bizonyítani.

Válasszunk maximális számú páronként diszjunkt élt (vagyis minden élnek legyen nemüres a metszete valamely kiválasztot éllel). Legyenek ezek $E_1, E_2, \ldots, E_\tau$.

Ha $\tau \geq t$, akkor következik *(i)*. Ha $\tau < t$, akkor legyen $A = \bigcup_{i=1}^{\tau} E_i$. Nyilván $|A| = \tau k$, így létezik olyan $\widehat{A} \supseteq A$, hogy $|\widehat{A}| = (t-1)k$. Legyen $v \in \widehat{A}$ olyan csúcs, amin maximális számú él halad át. A skatulyelv alapján ezen a v-n legalább $\frac{|\mathcal{H}|}{|\widehat{A}|}$ él halad át, tehát ekkor *(ii)* teljesül.

Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük. ■

A tétel $s = 3$ esetén $2^k k!$-t ad felső becslésként az élek számára. Ez exponenciálisnál gyorsabb növekedésű becslés. A legjobb konstrukció exponenciális sok k-élt tartalmaz.

Konstrukció. Legyen $V = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \dot\cup \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$. $\mathcal{H}$ tartalmazza azokat az éleket, amelyek minden $\{a_i, b_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ halmazt pontosan egy elemben metszenek. Könnyű látni, hogy $\mathcal{H}$ egy 2^k élű k uniform halmazrendszer.

Azt állítjuk, ogy $\mathcal{H}$ nem tartalmaz három szirmú napraforgót. Egy elképzelt napraforgó T tányérja minden élnek része, azaz minden $\{a_i, b_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ halmazt egy vagy nulla elemben metsz. Másrészt nem lehet k elemű, azaz kell lenni olyan i-nek, hogy T diszjunkt legyen $\{a_i, b_i\}$ halmaztól. Hogyan metsz a három szirom a $\{a_i, b_i\}$ halmazba? Diszjunktan kell metszeniük és persze egy eleműnek kell mindhárom metszetnek lenni. Az elképzelt napraforgó nem létezhet.

6. APPENDIX I: Halmazrendszreek és lineáris algebra, Fisher-egyenlőtlenség

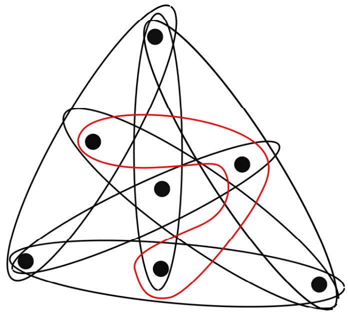
Definíció. Egy $\mathcal{H}$ halmazrenszer V felett. $\mathcal{H}$ λ-metsző, ha teteszőleges különböző $A, B \in \mathcal{H}$ esetén $|A \cap B| = \lambda$.

Példa. Legyen $\lambda = 0$ és $\mathcal{H} = \{\emptyset, \{v_1\}, \ldots, \{v_n\}\}$.

Könnyen belátható, hogy $|V| = n$ és $\lambda = 0$ esetén ez a legnagyobb halmazrendszer ami 0-metsző. A továbbiakban $\lambda \geq 1$.

Példa. $\lambda = 1$, $V = \{\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}, \{v_1, v_n\}, \{v_2, v_n\}, \{v_3, v_n\}, \ldots \{v_{n-1}, v_n\}\}$

Példa. $\lambda = 1$ és a Fano-sík: Hét pontja van $V = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_7\}$ és $\mathcal{H} = \{\{P_1, P_2, P_3\}, \{P_3, P_4, P_5\}, \{P_1, P_5, P_6\}, \{P_1, P_4, P_7\}, \{P_3, P_6, P_7\}, \{P_3, P_5, P_7\}, \{P_2, P_4, P_6\}\}$. Az alábbi ábra talán szemléletesebb.



12. Tétel. *Legyen $\lambda \geq 1$ és $\mathcal{F}$ egy λ-metsző halmazrendszer egy V alaphalmaz fölött. Ekkor*

$$|\mathcal{F}| \leq |V|.$$

Bizonyítás. Ha van olyan él $\mathcal{F}$-ben, amely elemszáma kisebb mint λ, akkor más él nem is lehet $\mathcal{F}$-ben, az állítás triviális. Ha van olyan F él, amely elemszáma éppen λ, akkor minden más él tartalmazza F-et. A többi E él esetén az $E \setminus F$ halmazok páronként diszjunkt, nem üres részhalmazai $V \setminus F$-nek. Így legfeljebb $|V| - |F|$ ilyen halmaz lehet. Az összes él száma legfeljebb $1 + (|V| - \lambda) \leq |V|$. A továbbiakban feltesszük, hogy minden él több mint λ (legalább $\lambda + 1$) elemű.

Egy $F \in \mathcal{F}$ esetén χ_F az $F \subset V$ halmaz karakterisztikus vektora ($\chi_F \in \mathbb{R}^V \equiv \mathbb{R}^n$). Belátjuk, hogy a χ_F vektorok ($F \in \mathcal{F}$) lineárisan függetlenek. Ebből nyilván következik az állítás.

Legyen $M_{\mathcal{F}}$ az a mátrix, amely sorait a χ_F ($F \in \mathcal{F}$) vektorok alkotják. Mérete $|\mathcal{F}| \times |V|$. Mi lesz az $M_{\mathcal{F}} \cdot M_{\mathcal{F}}^{\mathsf{T}}$ mátrix? A mátrix elemei a $\chi_F \chi_{F'} = |F \cap F'|$ skalárszorzatok lesznek. Mivel $\mathcal{F}$ egy λ-metsző halmazrendszer, ezért a főatlón kívül λ-k szerepelnek. A főátlóban éleink méretei szerepelnek. Azaz ($m = |\mathcal{F}|$):

$$\begin{pmatrix}
|A_1| & \lambda & \lambda & \ldots & \lambda & \lambda \\
\lambda & |A_2| & \lambda & \ldots & \lambda & \lambda \\
\lambda & \lambda & |A_3| & \ldots & \lambda & \lambda \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\lambda & \lambda & \lambda & \ldots & |A_{m-1}| & \lambda \\
\lambda & \lambda & \lambda & \ldots & \lambda & |A_m|
\end{pmatrix}$$

Belátjuk, hogy ezen mátrix sorai lineárisan függőek. Ebből következik az állítás. Valóban χ_F-ek (azaz $M_{\mathcal{F}}$ sorai) közötti nem triviális lineáris összefüggés öröklődik $M_{\mathcal{F}} M_{\mathcal{F}}^{\mathsf{T}}$ soraira is.

Vegyük a fenti mátrix sorainak egy lineáris kombinációját (az i-edik sor együtthatója legyen α_i). A lineáris kombináció j-edik komponenese:

$$\alpha_j |A_j| + \sum_{i: i \neq j} \alpha_i \lambda = \alpha_j |A_j| - \alpha_j \lambda + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \lambda = \alpha_j (|A_j| - \lambda) + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \lambda = \alpha_j (|A_j| - \lambda) + \Lambda.$$

Ebből, ha a 0-vektort kombináltuk ki, akkor

$$\alpha_j = \frac{-\Lambda}{|A_j| - \lambda}.$$

A 0-vektor kikombinálásánál nyilván nem használhattunk olyan együtthatókat, amelyek előjele ugyanaz volt. Így szükségszerű (a törtek nevezőiről tudjuk, hogy pozitívak), hogy $\Lambda = 0$. Így minden α_i értéke is 0. Ez éppen a sorok lineáris függetlenesége. ■

Az Erdős—Ko—Rado-tétel és a Fisher-egyenlőtlenség is „metszet-feltételekkel" rendelkező halmazrendszerekről szóló tétel. A témakör nagyon virágzó, sok fontos eredmény született az ilyen kérdések vizsgálatából. Ezen tételek a kombinatorikán kívül is nagy hatásúak. A lineáris algebrai módszer (például a Fisher-egyenlőtlenség bizonyítása) egy fontos módszerré vált a kombinatorikában.

7. APPENDIX II: Vapnyik—Cservonyenkisz-dimenzió

Definíció. Legyen $\mathcal{H}$ halmazrendszer V felett, A pedig V egy részhalmaza. Ekkor legyen $Tr_A\mathcal{H} = \{E \cap A : E \in \mathcal{H}\}$ a $\mathcal{H}$ halmazrendszer A-ra vett *nyoma*.

Világos, hogy $Tr_A\mathcal{H} \subseteq \mathcal{P}(A)$. Abban az esetben, amikor $Tr_A\mathcal{H} = \mathcal{P}(A)$, azt mondjuk, hogy A *telített*. A $\mathcal{H}$ halmazrendszer *Vapnyik—Cservonyenkisz-dimenzióján* a $\dim_{VCs}\mathcal{H} = \max\{|A| : A \text{ telített}\}$ számot értjük.

13. Tétel (Vapnyik—Cservonyenkisz). *Legyen $\mathcal{H}$ halmazrendszer $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ felett, t pedig pozitív egész úgy, hogy teljesüljön $\mathcal{H}$ elemszámára a $|\mathcal{H}| > 1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{t-1}$ egyenlőtlenség. Ekkor $\dim_{VCs}\mathcal{H} \geq t$. Más szavakkal megfogalmazva létezik t elemű telített halmaz $\mathcal{H}$-ban.*

Még a tétel bizonyítása előtt vegyük észre, hogy a tételben megadott korlát éles. Tekintsük ugyanis azt a halmazrendszert, amelyre teljesül, hogy $\mathcal{H} = \{R \subseteq [n] : |R| < t\}$. Világos, hogy $|\mathcal{H}| = 1 + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{t-1}$, és ugyanakkor $\mathcal{H}$-ban nincs t elemű telített A halmaz, ehhez ugyanis $Tr_A\mathcal{H}$ definíciójára gondolva A-t tartalmazó él megléte szükséges feltétele A telítettségének, de $|A| = t$, így ez a feltétel nem teljesül.

A tételre két bizonyítást is adunk.

1. Bizonyítás. n szerinti teljes indukcióval dolgozunk.

$n = 1$-re triviálisan igaz a tétel állítása.

Felhasználva azt az ismert összefüggést, hogy $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$, adódik a feltételből:

$$|\mathcal{H}| > \left[\binom{n-1}{0} + \ldots + \binom{n-1}{t-2}\right] + \left[1 + \binom{n-1}{1} + \ldots + \binom{n-1}{t-1}\right].$$

Jelölje L_1 és L_2 a két fenti szögletes zárójeles kifejezést.

Vezessük be a következő jelöléseket: $\mathcal{H}_1 = \{E \in \mathcal{H} : n \notin E, E \cup \{n\} \in \mathcal{H}\}$, $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H} - \mathcal{H}_1$, és legyen $\widetilde{\mathcal{H}_2} = \{E \backslash \{n\} : E \in \mathcal{H}_2\}$.

Világos, hogy $\mathcal{H}_1, \widetilde{\mathcal{H}_2}$ halmazrendszer $[n-1]$ felett. Mivel $\mathcal{H}_1$ és $\mathcal{H}_2$ diszjunkt és elemszámuk összege $|\mathcal{H}| > L_1 + L_2$, vagy *(i)* $|\mathcal{H}_1| > L_1$, vagy *(ii)* $|\mathcal{H}_2| = |\widetilde{\mathcal{H}_2}| > L_2$ teljesül.

Ha *(i)* igaz, akkor az indukciós feltevés alapján létezik $A \subseteq [n-1]$ $t-1$ elemű $\mathcal{H}_1$-re nézve telített halmaz. Nem nehéz látni (mivel $E \in \mathcal{H}_1$ esetén E és $E \cup \{n\}$ is él $\mathcal{H}$-ban), hogy $A \cup \{n\}$ ekkor telített lesz $\mathcal{H}$-ra nézve (és persze t elemű).

Ha *(ii)* igaz, akkor az indukciós feltevés szerint van $A \subseteq [n-1]$ t elemű $\widetilde{\mathcal{H}_2}$-re nézve telített halmaz. Ez definíció szerint azt jelenti, hogy minden $R \subseteq A$-hoz létezik $E \in \widetilde{\mathcal{H}_2}$, amire $E \cap A = R$. Viszont minden $E \in \widetilde{\mathcal{H}_2}$-hoz létezik egyértelműen egy $E_0 \in \mathcal{H}_2$: ez vagy E, vagy $E \cup \{n\}$. Mindkét esetben $E_0 \cap A = R$, vagyis A $\mathcal{H}$-ra nézve is telített. ■

2. Bizonyítás. Nevezzünk egy halmazrendszert *lefelé zártnak*, ha $E \in \mathcal{H}$ és $F \subseteq E$, akkor $F \in \mathcal{H}$ is teljesül.

Ha $\mathcal{H}$ lefelé zárt, akkor a tétel állítása egyszerűen következik: a feltételek miatt van $\mathcal{H}$-ban legalább t elemű él, ugyanakkor pedig a lefelé zártság miatt minden él telített.

Definiáljuk a következő S_i leképezést: $i \in V$, $E \in \mathcal{H}$-ra $S_iE = E \backslash \{i\}$ ha $E \backslash \{i\} \notin \mathcal{H}$ és $S_iE = E$ különben. Legyen továbbá $S_i\mathcal{H} = \{S_iE : E \in \mathcal{H}\}$.

Vegyük észre, hogy $|\mathcal{H}| = |S_i\mathcal{H}|$ a definícióból egyből következő módon. Nem nehéz látni azt sem, hogy ha $\mathcal{H}$ nem lefelé zárt, akkor van olyan i, hogy $S_i\mathcal{H} \neq \mathcal{H}$. (Ha nem lefelé zárt, akkor van olyan E és F, hogy $F \subset E$ és $E \in \mathcal{H}$ de $F \notin \mathcal{H}$. Ekkor tetszőleges $i \in E \backslash F$ megfelel.) A harmadik észrevételt külön lemmaként is kimondjuk.

14. Lemma. *$|Tr_A\mathcal{H}| \geq |Tr_AS_i\mathcal{H}|$ mindig teljesül.*

Ezen észrevételekből következik a tétel. Tetszőleges $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1$-hez léteznek olyan $i_1, i_2, \ldots$ elemek, hogy $\mathcal{H}_k \neq \mathcal{H}_{k+1} = S_{i_k}\mathcal{H}_k$, vagyis iteráltan végrehajtjuk az S transzformációt úgy, hogy mindig változzon a halmazrendszerünk. Nyilván véges sok lépésben elakad a lánc, mert minden lépésben csökken az élek elemszámának az összege. Legyen az utolsó halmazrendszer $\mathcal{H}_s$. Ez az eddigiek szerint lefelé zárt, és éleinek a száma teljesíti a tétel feltételét. Így van benne t elemű él, A. Ekkor A telített $\mathcal{H}_s$-re nézve, nyoma $2^{|A|}$ elemű. A lemma alapján A $\mathcal{H}_1$-re vett nyoma is legalább ennyi elemű, azaz A telített.

Már csak a lemma bizonyítása van hátra. Ha $i \notin A$, akkor $Tr_A\mathcal{H} = Tr_AS_i\mathcal{H}$ nyilvánvalóan teljesül.

Ha $i \in A$, akkor A részhalmazait állítsuk $(R, R \cup \{i\})$ párokba, ahol $i \notin R$. Ha egy E él A-beli nyoma az egyik párba esik, akkor S_iE nyoma is ugyanehhez a párhoz tartozik.

Belátjuk, hogy minden pár hozzájárulása $Tr_A\mathcal{H}$-hoz legalább annyi, mint $Tr_AS_i\mathcal{H}$-hoz. Egyedül az jelenthet problémát, ha R és $R \cup \{i\}$ is benne van $Tr_AS_i\mathcal{H}$-ban, de $Tr_A\mathcal{H}$-ban csak az egyikük szerepel. Azonnal látszik, hogy ez utóbbi szükségképpen $R \cup \{i\}$. Azonban ha R nem szerepel $Tr_A\mathcal{H}$-ban, akkor minden olyan E él, amelyre $E \cap A = R \cup \{i\}$, feltétlenül $S_iE = E \backslash \{i\}$. Ez ellentmond annak, hogy $R \cup \{i\} \in Tr_AS_i\mathcal{H}$ és így a lemmát is igazoltuk, teljessé téve a bizonyítást. ■