Gráfelmélet/Diszkrét Matematika MSc hallgatók számára

Fokszámsorozatok

2017. Előadó: Hajnal Péter

Az előadás a BSc Kombinatorika kurzus folytatása. Sokszor vissza kell utalnunk, fel kell idéznünk ott elhangzott fogalmakat, összefüggéseket. Az ilyen „emlékeztetők” rendszeresen megszakítják az előadást.

Emlékeztető. Idézzünk fel néhány fontos gráfelméleti fogalmat. *Gráfnak* nevezzük azokat a (V, E, I) hármasokat, ahol V és E tetszőleges diszjunkt halmazok, $I \subseteq V \times E$ illeszkedési reláció. A V halmazt a gráf *csúcshalmazának*, E-t *élhalmaznak* nevezzük. Azt mondjuk, hogy a v csúcs illeszkedik az e élre, ha $(v, e) \in I$. Az illeszekdési reláció olyan, hogy minden élre egy vagy két csúcs illeszkedik.

Az egyetlen csúcsra illeszedő éleket *hurokéleknek* nevezzük. Ha e_1 és e_2 olyanok, hogy ugyanazon csúcs(ok)ra illeszkednek, őket *párhuzomos éleknek* nevezzük. Az olyan gráfokat, amelyek nem tartalmaznak hurokélt és párhuzamos éleket, *egyszerű gráfoknak* hívjuk.

Egy csúcs *fokán* a csúcsra illeszkedő élek számát értjük, úgy számolva, hogy minden hurokél kétszer illeszkedik egyetlen pontra.

1. Fokszámsorozatok

Definíció. A $d_1, \ldots, d_n$ számsorozatot a G gráf fokszámsorozatának nevezzük, ha G fokainak nemcsökkenő sorozata. Speciálisan $n = |V|$, $d_1 \geq \ldots \geq d_n$ teljesül.

Alternatív jelölésként $d_1 = d_{max}$, illetve $d_n = d_{min}$ jelöléseket is használjuk. Megjegyezzük, hogy a fokszámsorozatból a gráf élszáma is kiolvasható az $\sum_{i=1}^n d_i = 2|E|$ összefüggés alapján. Ugyanez az összefüggés más formában $d_{\text{átlag}} = (\sum_{i=1}^n d_i)/n = 2|E|/n$.

ALAPKÉRDÉS: Adott $\langle d_i \rangle_{i=1}^n$ számsorozat mikor lesz valamely G gráf fokszámsorozata? (Ekkor azt mondjuk, hogy a sorozatot realizálja a G gráf.)

Természetesen egy realizálható sorozat elemei mindig természetes számok. A továbbiakban mindig feltesszük, hogy a realizálhatóság szempontjából vizsgálandó sorozat természetes számokat tartalmaz.

Amennyiben a kérdésre igenlő a válasz színesíthetjük problémánkat. Kérhetjük egy realizáló gráf megadását, illetve az összes realizáló gráf felsorolását. A realizáló gráfot kereshetjük bizonyos feltételű, speciális gráfok között.

Amennyiben G-re semmilyen kikötést nem teszünk, az alap döntési kérdésre a válasz egyszerű.

1. Állítás. *A $\langle d_i \rangle_{i=1}^n$ számsorozat pontosan akkor realizálható, ha $\sum_{i=1}^n d_i$ páros.*

Az egyszerű bizonyítás (ami egy gyakorló feladat) a hurokélek lehetőségét erősen kihasználja.

⋆

Természetesen adódik a kérdés, hogy mi a helyzet, ha hurokéleket nem engedünk meg. Vagy általában: Mikor realizálható természetes számok egy adott sorozata egy speciális feltételekkel rendelkező gráffal? A következőkben ilyen kérdéseket vizsgálunk.

2. Tétel. *A $\langle d_i \rangle_{i=1}^n$ csökkenő számsorozat pontosan akkor realizálható hurokél nélküli gráffal, ha*

1. $\sum_{i=1}^n d_i$ *páros, és*
2. $d_1 \leq d_2 + d_3 \cdots + d_n$.

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy $\langle d_i \rangle_{i=1}^n$ realizálható hurokél nélkül. Ekkor az *1.* feltételről láttuk, hogy teljesül. A *2.* feltételhez tekintsük a realizáló gráf d_i-hez tartozó csúcsát, ez d_i élre illeszkedik. Másrészt az összes többi csúcs összesen $d_1 + \cdots + d_{i-1} + d_{i+1} + \ldots + d_n$ élre illeszkedik. A hurokélek kizárása miatt az előbbi csúcson átmenő élek mind illeszkednek egy másik csúcsra is, tehát legfeljebb $d_1 + \cdots + d_{i-1} + d_{i+1} + \ldots + d_n$ van belőlük. Így n feltételt kaptunk: fokszámsorozatunk mindegyik eleme legfeljebb annyi mint a többi fok összege. Ezek közül csak az nem nyilvánvaló, amikor a kivett csúcs foka a maximális. Ez éppen a *2.* feltétel.

A másik irányt $\sum_{i=1}^n d_i$ szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. Először tekintsük az elfajuló esteket: ha $d_1 \leq 1$, akkor az állítás könnyen látható (fokszámsorozatunk egy párosítással realizálható). Ha $n = 1$, akkor a *2.* feltételből $d_1 = 0$ adódik (az üres összeg értéke 0). Ha $n = 2$, akkor a *2.* feltételből $d_1 = d_2$ adódik, így a két csúcs között d_1 darab párhuzamos élt tartalmazó gráf realizálja a sorozatot. A továbbiakban így feltesszük, hogy $n \geq 3$ és $d_1 \geq 2$ (egyben $d_2 \geq 1$).

A $\sum_{i=1}^n d_i = 0$ esetet ismét realizálja az n pontú, üres élhalmazú gráf.

Legyen $m := \sum_{i=1}^n d_i$. Tegyük fel, hogy $\sum_{i=1}^n d_i < m$ esetén két feltételünk garantálja a hurokél nélküli realizációt.

Vizsgáljuk a

$$d_1 - 1, d_2 - 1, d_3, \ldots, d_n$$

sorozatot.

Ez nem szükségszerűen csökkenő. Maximális eleme $d_1 - 1$ vagy d_3 (amikor is $d_1 = d_2 = d_3$). Mindkét esetben a két feltételünk teljesül a sorozatra. Így alkalmazható az indukciós feltevés: az új sorozat realizálható hurokél nélküli gráffal. Ennek két különböző csúcsa $d_1 - 1$ és $d_2 - 1$ fokú. Ezeket egy plusz éllel összekötve olyan gráfhoz jutunk, amely a bizonyítandót adja. ■

Megjegyezzük, hogy az indukciós bizonyításból könnyen kiolvasható egy rekurzív algoritmus, amely az adott feltételeknek elegettevő sorozathoz egy megfelelő realizáló gráfot konstruál.

⋆

Most áttérünk a jóval nehezebb kérdésre, amikor is a realizáló gráfot az egyszerű gráfok között keressük.

3. Lemma. *Ha a $\langle d_i \rangle_{i=1}^n$ csökkenő számsorozat realizálható egyszerű gráffal, akkor van olyan realizáló egyszerű gráf, amely csúcsai $v_1, \ldots, v_n$, ahol $d_i = d(v_i)$, és a v_1 csúcs szomszédai pontosan a $v_2, v_3, \ldots, v_{d_1+1}$ csúcsok. (A realizálhatósági feltétel miatt $d_1 \leq n - 1$ garantált).*

A lemma előtt nézzük meg egy következményét.

4. Következmény (V. Havel (1955) és S. Hakimi (1962) tétele). *$\langle d_i \rangle_{i=1}^n$ akkor és csak akkor realizálható egyszerű gráffal, ha*

$$d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n$$

is.

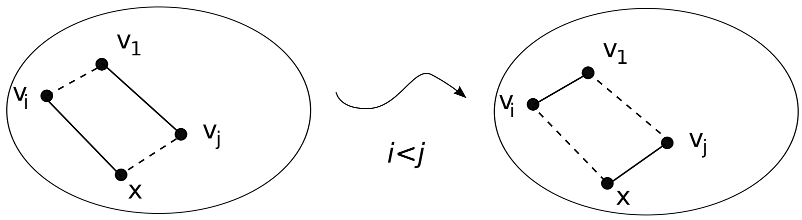
A következmény egyszerűen adódik az előbbi lemmából, hiszen ha vesszük azt a $\langle d_i \rangle_{i=1}^n$-t realizáló gráfot, amelyben v_1 a d_1 további legkisebb indexű csúccsal szomszédos, akkor a v_1 csúcsot elhagyva olyan gráfot kapunk, amely éppen a fenti fokszámsorozatot realizálja. Az állítás megfordítása a lemma nélkül is egyszerű.

Vegyük észre, hogy így a következmény által rekurzív algoritmust (Havel—Hakimi-algoritmus) kaptunk EGY realizáló gráf megkeresésére.

Lemma bizonyítása. Legyen G olyan realizáló gráf, amelyre $d(v_i) = d_i$ és v_1 szomszédainak indexösszege minimális. Azt állítjuk, hogy ez a gráf olyan, amilyet a lemma állít.

Indirekt úton tegyük fel, hogy nem, azaz létezik $i < j$ úgy, hogy v_1 szomszédos v_j-vel, de nem szomszédos v_i-vel. v_j-nek egy szomszédja ismert (v_1), $d_j - 1$ másikról még nem tudunk semmit. v_i-nek van d_i „tisztázatlan" szomszédja (ezekről tudjuk, hogy v_1-től különbözőek). A csökkenő sorrend miatt $d_j - 1 \le d_i - 1 < d_i$. Ez csak úgy lehet, ha van egy olyan $x \neq v_1$ csúcs, amely v_j-vel szomszédos, de v_i-vel nem.

Képezzük G-ből a $\widetilde{G}$ gráfot úgy, hogy a (v_j, v_1) és (v_i, x) éleket elhagyjuk G-ből, majd hozzávesszük a (v_j, x) és (v_i, v_1) éleket.



1. ábra. A szaggatott vonalak élek HIÁNYÁT jelölik. Ez az információ garantálja hogy a „switch" után is egyszerű gráfot kapunk.

Így a gráf egyszerű maradt és fokszámsorozata sem változott, viszont $\widetilde{G}$-ben v_1 szomszédainak indexösszege csökkent. Ez ellentmond G választásának. ■

Mint említettük a bizonyítás egy gyors algoritmust is ad EGY realizáló egyszerű gráf konstrukciójára. Az összes realizáló gráf hatékony listázása egy távolról sem triviális kérdés.

⋆

Most fákkal történő realizációkat vizsgáljuk.

Emlékeztető. Fa, ághajtás operáció.

5. Tétel. *Tegyük fel, hogy $n \geq 2$. Ekkor a $\langle d_i \rangle_{i=1}^n$ sorozat pontosan akkor realizálható fával, ha $\sum_{i=1}^n d_i = 2n - 2$ és $d_{min} > 0$ teljesül.*

Bizonyítás. A feltételek szükségessége könnyen adódik, hiszen bármely fa összefüggő, így nem lehet izolált csúcsa ($n \geq 2$), másrészt egy n-pontú fának $n-1$ éle van, így $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2|E| = 2(n-1)$ is fennáll.

Az elégségesség bizonyítása n szerinti teljes indukcióval történik.

Ha $n = 2$, akkor a feltételek miatt $d_1 = d_2 = 1$. Ezt egyetlen gráffal ralizálhatjukL a kétpontú, egy élt tartalmazó fagráffal.

Tegyük fel, hogy $n-1$ csúcsra igaz az állítás, és $n \geq 3$. Ekkor egyszerű számolással $1 < d_{\text{átlag}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n} < 2$ adódik, és persze $d_1 = d_{max} \geq d_{\text{átlag}} \geq d_{min} = d_n$ teljesül. Ebből $d_n = 1$, és $d_1 \geq 2$ adódnak, hiszen a fokszámok egészek. Így a $d_1 - 1, d_2, \ldots, d_{n-1}$ számsorozat is teljesíti a tételbeli feltételeket, tehát az indukciós feltevés szerint fával realizálható. Ebből a fából megkapható az eredeti fokszámsorozathoz tartozó fagráf egy, a d_1-hez tartozó csúcsból történő ághajtással (az új csúcs/levél tartozik a $d_n = 1$ fokszámhoz). ■

A bizonyítás most is ad egy egyszerű/gyors eljárást egy realizáló fa konstrukciójára.

Az összes realizáló fa is könnyen meghatározható egy adott $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ csúcshalmazon, ahol a $d(v_i) = d_i$ fokok (a tételbeli feltételek mellett) adottak Ehhez a bizonyítást módosítjuk.

Bizonyítás. Ha $n = 1, 2$, akkor egyetlen egy fokszámsorozat jön szóba, amelyet az egyetlen V csúcshalmazú fa realizál.

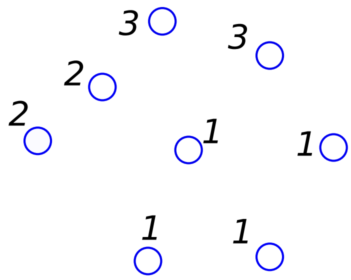
$n > 2$ esetén vegyünk egy $u \in V$ csúcsot, amelyre $d(u) = 1$. Az összes $v \in V$ csúcsra, amelyre $d(v) \geq 2$ vegyük $V - \{u\}$ halmazon a

$$d'(x) = \begin{cases} d(x), & x \neq v, \\ d(v) - 1, & x = v \end{cases}$$

módosított fokszám előírást. Ennek bármelyik fa-realizációjára (ilyen létezik az indukciós bizonyítás alapján) a v-ből u-ba történő ághajtás az eredeti sorozat egy realizációját adja. ■

Ha a fenti lazább bizonyítás során nem csak egy v-vel, hanem az összes szóba jövővel, és nemcsak egy realizációval, hanem az összes listájával dolgozunk, akkor a kiinduló sorozat összes realizáló fáját megkapjuk. Valóban: Egy fa-realizáció, hogyan maradhatna le a listáról? Sőt, a kialakuló listán nem lehet ismétlődés (miért?).

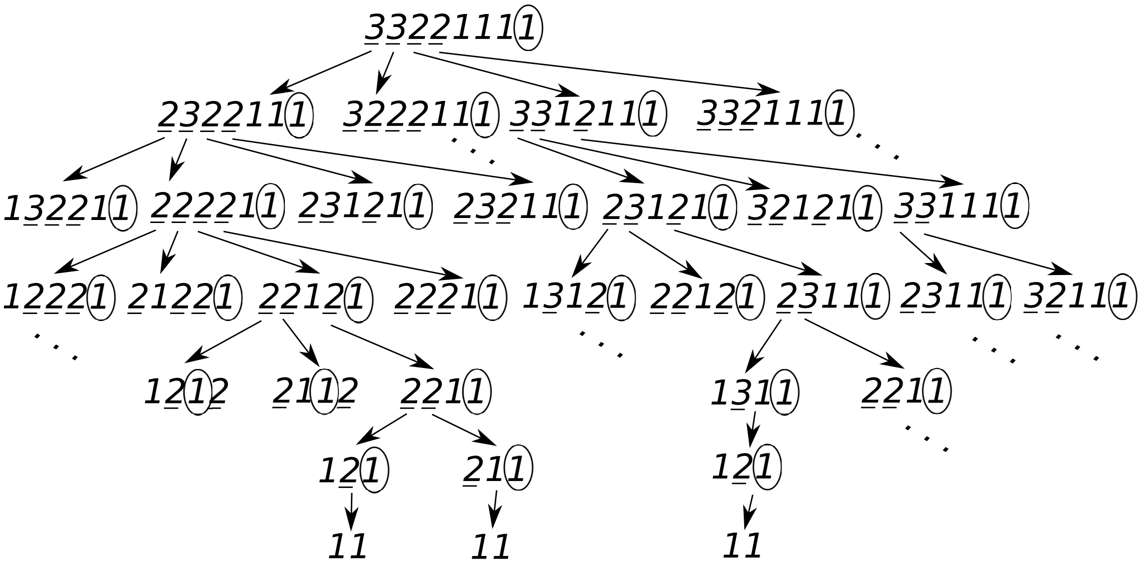
Példa. A következő példán néhány csúcs látható előírt fokszámokkal.



2. ábra.

Az összes realizáló fa felsorolásához kiválasztunk egy 1 fokú csúcsot (a bizonyításban u). Ez tetszőleges lehet, önkényesen választhatjuk. A lehetséges szomszédai (v) a legalább 2 fokú pontok. Itt az összes v-t vesszük és képzeletben összekötjük u-t és v-t. Ezzel az u csúcs környezete kialakult. $V-\{u\}$-n tetszőlegesen kialakíthatunk egy fát csak arra kell vigyáznunk, hogy u-ban az új rész az előírt foknál 1-gyel kevesebb legyen (az uv él így módosítja a fokot a kívánt értékre). Azaz egy új realizációs problémánk lesz eggyel kevesebb csúccsal, azaz eggyel rövidebb fokszámsorozatra. Ezt az ötletet iteráljuk, amíg 2 hosszú fokszámsorozathoz nem jutunk.

A rekurzió esetei egy nagy fában foglalhatók össze. Sok csúcsban a feladat ugyanazt a fokszámsorozatot tartalmazza csak más és más csúcshalmazra. Az elburjánzó feladattömeg fájának egy töredékét a következő ábra tartalmazza:



3. ábra. A kiválasztott 1 fokot mindig a sorozat utolsó elemének vettük, bekarikáztuk ezeket. A lehetséges szomszédok fokait aláhúztuk.

Könnyű összeszámolni, hogy 180 darab realizáló fa van. Ez annak köszönhető, hogy egy konkrét csúcshalmazon vizsgáljuk a problémát. Fa-izomorfiatípusból csak öt különböző realizálja az adott fokszámsorozatot.

2. Adott fokszámsorozatú fák összeszámlálása, Cayley tétele

A fenti rekurzív algoritmus könnyen átalakítható egy tétel indukciós bizonyításává, amely megadja, hogy adott csúcsokhoz rendelt fokszámokat hány fa realizálja (feltéve, hogy a sorozat realizálható). A nehézség, hogy meg kell sejteni a helyes választ.

6. Tétel. *Legyen $\langle d_i\rangle_{i=1}^n$ egy fával realizálható fokszámsorozat. Ekkor azon fák száma a $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ csúcshalmazon, amelyekre $d(v_i) = d_i$ ($i = 1, \ldots, n$):*

$$(n-2)!\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{(d_i-1)!}. \tag{1}$$

A tételt egy kicsit más formában bizonyítjuk. A kiinduló fokszámsorozatban megengedünk 0-kat is. Ezzel nem realizálható fokszámsorozataink is lesznek. A megfelelő tag/hányadost a fokszámmal bővítjük. Így az extra (nem realizálható) fokszámsorozatoknak 0 tagok felelnek meg a formulánkban (a többi tag nem változik). Azaz a módosított tétel ugyanaz mint az eredeti forma:

7. Tétel. *Legyen $\langle d_i \rangle_{i=1}^n \in \mathbb{N}^n$ $(n \geq 2)$ olyan, melyre teljesül a*

$$\sum_{i=1}^n d_i = 2(n-1)$$

egyenlőség, ekkor ezen fokszámsorozatot realizáló fák száma:

$$(n-2)! \prod_{i=1}^n \frac{d_i}{d_i!}. \tag{2}$$

Bizonyítás. Ha valamely j indexre $d_j = 0$, akkor a fokszámsorozat nem realizálható fával, hiszen legalább egy legalább két pontból álló fa csúcsainak fokszáma minimum 1. Ilyen esetben a formula értéke is 0.

Tegyük fel, hogy $1 \leq d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$ és a realizáló fa csúcsai $\{v_i\}_{i=1}^n$, ahol $d(v_i) = d_i$. Tudjuk, hogy

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i = 2\frac{n-1}{n} < 2,$$

így $d_1 = 1$, azaz a v_1 csúcs minden realizáló fában levél. A realizáló fákat $n-1$ diszjunkt csoportba oszthatjuk aszerint, hogy a v_1 csúcsnak melyik másik csúcs a szomszédja. Ha realizáljuk a $d_2, d_3, \ldots, d_{i-1}, d_i - 1, d_{i+1}, \ldots, d_n$ fokszámsorozatot fával, akkor megkapjuk az eredeti fokszámsorozat egy realizációját, amelyben v_1 szomszédja v_i.

Ezt felhasználva teljes indukcióval igazoljuk a formula helyességét. Az állítás $n = 2$ esetén nílvánvalóan igaz. Tegyük fel, hogy (2) teljesül $n-1$ csúcsú fák esetén. Ekkor a $\{d_i\}_{i=1}^n$ fokszámsorozatot realizáló fák száma

$$\sum_{j=2}^n (n-3)! \left(\prod_{i=2}^{j-1} \frac{d_i}{d_i!} \right) \cdot \frac{d_j - 1}{(d_j - 1)!} \cdot \left(\prod_{i=j+1}^n \frac{d_i}{d_i!} \right) =$$
$$(n-3)! \left(\prod_{i=1}^n \frac{d_i}{d_i!} \right) \sum_{j=2}^n (d_j - 1) = (n-2)! \prod_{i=1}^n \frac{d_i}{d_i!}.$$

■

8. Következmény (Cayley). *A $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ halmazon n^{n-2} fa adható meg. Azaz az n csúcsú teljes gráf (K_n) feszítőfáinak száma n^{n-2}.*

Bizonyítás. A fokszámok eloszlása szerint csoportosítva a megszámolandó fákat a számukra a következő összefüggés adódik

$$\sum_{\substack{d_1, d_2, \ldots, d_n \in \mathbb{N} \setminus 0 \\ d_1 + d_2 + \cdots + d_n = 2(n-1)}} (n-2)! \prod_{i=1}^n \frac{1}{(d_i - 1)!} = \sum_{d_1^- + d_2^- + \cdots + d_n^- = n-2} \frac{(n-2)!}{\prod_{i=1}^n d_i^-!}, \tag{3}$$

ahol $d_i^- = d_i - 1$.

Vegyük észre, hogy a (3) egyenlőség jobb oldala a multinomiális tétel speciális esete, így

$$\sum_{d_1^- + d_2^- + \cdots + d_n^- = n-2} \frac{(n-2)!}{\prod_{i=1}^{n} d_i^-!} =$$

$$\sum_{d_1^- + d_2^- + \cdots + d_n^- = n-2} 1^{d_1^-} 1^{d_2^-} \cdots 1^{d_n^-} \frac{(n-2)!}{\prod_{i=1}^{n} d_i^-!} = (1 + 1 + \cdots + 1)^{n-2} = n^{n-2}.$$

■