Gráfelmélet/Diszkrét Matematika MSc hallgatók számára

Extremális gráfelmélet

2017. Előadó: Hajnal Péter

1. Turán Pál tétete: az extremális gráfelmélet kezdete

Emlékeztető. A G gráfban $K \subset V(G)$ egy *klikk*, ha tetszőleges két különböző eleme szomszédos.

$$\omega(G) = \max\{|K| : K \text{ klikk}\}$$

Egy G gráf esetén az $F \subset V(G)$ halmazt *független halmaznak* nevezzük, ha bármely $e \in E(G)$ esetén e-nek nincs mindkét végpontja F-ben.

Legyen $\alpha(G)$ az a maximális k szám, amelyre G-ben van k elemű független ponthalmaz.

A fejezetben mindig FELTESSZÜK, hogy EGYSZERŰ GRÁFOKKAL DOLGOZUNK.

A továbbiakban azt vizsgáljuk milyen nagy méretű független ponthalmaz kereshető/garantálható egy adott gráfban. Nagy független ponthalmaz keresésére könnyen tervezhető egy egyszerű mohó algoritmus.

1. Algoritmus. `Input:` Egy G egyszerű gráf
`Output:` Egy F független ponthalmaz

Inicializálás:
Legyen $F := \emptyset$.
// F egy független halmaz, amelyet az algoritmus során mohó
// módon növelünk.
$T := V(G)$.
// T a túlélő csúcsok halmaza, amely vizsgálata ezek után
// következik.
Amíg $T \neq \emptyset$ **Mohó növelés:**
Válasszunk ki egy tetszőleges x csúcsot T-ból.
// x-szel növeljük F-et
$K \leftarrow K \cup \{x\}$
$T \leftarrow T - \{x\} - N_T(x)$
// Az x csúcs beválasztását a „nem-szomszédai” élik túl.

2. Lemma. *A mohó független ponthalmazt kereső algoritmus outputjának mérete legalább*

$$\frac{|V(G)|}{D(G)+1}.$$

Bizonyítás. Minden mohó növelési lépésben T legfeljebb $D(G)+1$ csúccsal csökken. Az output mérete megegyezik a növelési lépések számával, amelyek során T a kezdeti $|V(G)|$ elemszámról 0-ra csökken. Azaz legalább $|V(G)|/(D(G)+1)$ növelési lépést végeztünk. ■

Megjegyzés. A bizonyítás alapgondolata egyszerű, érdemes összefoglalni. Azt mondhatjuk, hogy minden növelési lépésnél T-ból „leharapunk" egy darabot. A leharapott rész elemszámát felülről becsültük. Az algoritmus során egész T-t „megettük", így a harapások számára egy alsó becslés adódott.

A fenti algoritmusban semmit sem mondtunk a választott x-ről. Egy természetes heurisztikával algoritmusunk javítható. Célunk minél több harapás szám elérése. Így x-re egy logikus választás az a csúcs T-ből, amely a legkisebb harapáshoz vezet, azaz amelynek legkevesebb szomszédja van T-ban. (Egyszerű gráfok esetén egy minimális fokú csúcsot választunk $G|_T$-ból.)

3. Algoritmus. Inializálás:
Legyen $F := \emptyset$.
// F egy független ponthalmaz, amelyet az algoritmus során mohó
// módon növelünk.
$T := V(G)$.
// T a túlélő csúcsok halmaza, amely vizsgálata ezek után
// következik.
Amíg $T \neq \emptyset$ **Mohó növelés:**
Válasszunk ki egy olyan x csúcsot T-ből, amelynek minimális
számú szomszédja van $G|_T$-ben.
$F \leftarrow F \cup \{x\}$
// x-szel növeljük F-et
$T \leftarrow T - (\{x\} \cup N_T(x))$
// A beválasztott x-szel együtt szomszédait is kivesszük a
// túlélő csúcsok halmazából.

A kis módosítás jelentős javításhoz vezet.

4. Tétel. *A módosított mohó független halmazt kereső algoritmus outputjának mérete legalább*

$$\frac{|V(G)|}{\overline{d}(G)+1},$$

ahol $\overline{d}(G)$ *az átlagos fokszám, azaz* $\overline{d}(G) = \frac{\sum_{x\in V} d(x)}{|V|} = \frac{2|E|}{|V|}$.

Bizonyítás. Legyen G egy tetszőleges egyszerű gráf és futassuk a módosított mohó algoritmust rajta.

Legyen H_i az i-edik növelési lépésnél T-ből elhagyott csúcsok halmaza (az i-edik harapás). x_i legyen az i-edik növelési lépésnél kiválasztott csúcs. Ekkor $x_i \in H_i$. Nyilván $V(G) = H_1 \dot\cup H_2 \dot\cup \ldots \dot\cup H_\ell$, ahol ℓ a növelési lépések száma, azaz az output mérete. Legyen $\mathcal{E} = \mathcal{E}(H_1, H_2, \ldots, H_\ell)$ az az egyszerű gráf, ahol két pont akor és csak akkor szomszédos, ha ugyanahhoz az H_i-hez tartzonak.

A bizonyítás „lelke" a következő észrevétel: minden x csúcsra $d_G(x) \geq d_{\mathcal{E}}(x)$, speciálisan $|E(G)| \geq |E(\mathcal{E}(H_1, \ldots, H_\ell))|$. Valóban: Egy $x \in H_i$ csúcsban összefutó éleket két csoportba sorolhatunk: $H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_{i-1}$-be, illetve $H_i \cup \ldots \cup H_\ell$-be vezető élek. Ezek száma legyen $d^{\text{hátra}}(x)$, illetve $d^{\text{előre}}(x)$ ($d(x) = d^{\text{hátra}}(x) + d^{\text{előre}}(x)$). Tudva, hogy $x \in H_i$ nyilván $d^{\text{hátra}}_{\mathcal{E}}(x) = 0$, illetve

$$d^{\text{előre}}_{\mathcal{E}}(x) = |H_i| - 1 = d^{\text{előre}}_G(x_i) \geq d^{\text{előre}}_G(x),$$

a $d_G(x) \geq d_{\mathcal{E}}(x)$ egyenlőtlenség nyilvánvaló.

Természetesen $\mathcal{E}$ az algoritmusunk G-n történő futása alatt alakul ki, speciálisan függ G-től. Tetszőleges G-t feltételezve $\mathcal{E}$-ről csak egy struktúrális ismeretünk van: ℓ komponense van, mindegyik teljes. Ezen ismeret alapján csak G pontszáma és ℓ függvényében adhatunk egy alsó becslést az élszámára.

Legyen $h_i = |H_i|$, azaz ℓ darab h_i összege $|V|$-t adja. Ekkor

$$|E(G)| \geq |E(\mathcal{E})| = \sum_{i=1}^{\ell} \binom{h_i}{2} \geq \ell \binom{|V|/\ell}{2},$$

ahol az utolsó egyenlőtlenség a Jensen-egyenlőtlenség: $\binom{x}{2} = x(x-1)/2$ konvex függvény ez akkor lesz minimális, ha mindegyik h_i átlagos $|V|/\ell$ nagyságú, ahol ℓ az algoritmusunk által kiszámolt független halmaz mérete.

A bizonyítandó egyenlőtlenség egyszerű rendezéssel kapható. ■

A tétel bizonyításában szereplő ötletek egy kicsit hatékonyabban is alkalmazhatók. A Jensen-egyenlőtlenség éles, de optimalitását olyan h_i értékek adják, amik nem szükségszerűen természetes számok. Így élessége nem szükségszerű esetünkben.

Tegyük fel, hogy algoritmusunk nem választ ki $\ell + 1$ csúcsot (az ℓ-edik vagy korábbi csúcs kiválasztása után kimeríti a gráfot). Ekor is definiálható $H_1, \ldots, H_\ell$ csupán elképzelhető, hogy a halmazsorozat néhány utolsó eleme üres, 0 elemű. A bizonyításban meghatároztunk egy alsó becslést az élszámára. Ügyesebben dolgozva a pontos minimum is adódik. Jelöljük ezt minimumot $\mu_{n,\ell}$-el.

Az új észreveéteünk: Ha G élszáma kisebb mint $\mu_{n,\ell}$, akkor algoritmusunk garantáltan legalább $\ell + 1$ pontot kiválaszt.

Definíció. Egy halmaz k osztályra történő osztályozására azt mondjuk, hogy osztályai *majdnem ugyanakkorák* vagy az osztályozás *kiegyensúlyozott*, ha a következő ekvivalens állítások egyike/mindegyike teljesül

(i) Minden O osztályra $|O| \in \left\{\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor, \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil\right\}$.

(ii) Bármely két, O és O', osztályra $||O| - |O'|| \leq 1$.

(iii) $n - k\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$ darab $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ méretű és $k - \left(n - k\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor\right)$ darab $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$ méretű osztály van.

Definíció. $T_{n,k}$ (n pontú, k részes) Turán-gráf csúcshalmaza V, amelyre $|V| = n$ és a csúcshalmazt k diszjunkt osztály adja ki: $V = O_1 \dot\cup \ldots \dot\cup O_k$, ahol az osztályok „majdnem" ugyanakkorák.

A Turán-gráf (amely egyszerű gráf) éleit a következőben írjuk le: x és y akkor és csak akkor szomszédosak, ha különböző osztályokba esnek.

5. Lemma.

$$\mu_{n,\ell} = |E(\overline{T}_{n,\ell})|.$$

Bizonyítás. (Vázlat) Tegyük fel, hogy egy $\mathcal{E}$ gráf koponenseinek csúcs-osztályozása nem kiegyenesúlyozott. Ekkor található két osztály, amelyek méretének különbsége legalább kettő. Változtassuk meg $\mathcal{E}$-t: A fenti két osztály közül a kisebbet növeljük meg egy csúccsal a nagyobb osztályból. A többi osztályt hagyjuk meg. Így egy módosított $\mathcal{E}$ gráfhoz jutunk. Egyszerű ellenőrizni, hogy a módosítás csökkenti az élszámot. ∎

Észrevételünk átfogalmazása ezekután:

6. Tétel. *Ha az n pontú G gráfra $|E(G)| < |E(\overline{T}_{n,\ell})|$, akkor a módosított mohó algoritmus legalább $\ell + 1$ pontot kiválaszt. Speciálisan $\alpha(G) \geq \ell + 1$.*

Azaz

7. Tétel. *Ha az n pontú G gráfra $\alpha(G) < k$, akkor $|E(G)| \geq |E(\overline{T}_{n,k-1})|$.*

Komplementárisan fogalmazva:

8. Tétel (Turán Pál). *Ha G n pontú egyszerű gráf és nem tartalmaz k elemű klikket, akkor*

$$|E(G)| \leq |E(T_{n,k-1})|.$$

Illetve

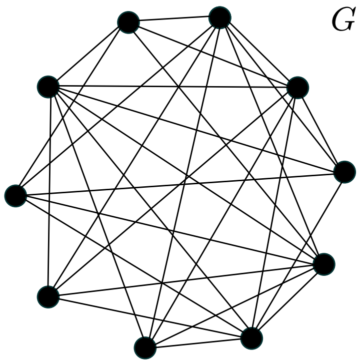
9. Tétel (Turán Pál). *Legyen G n pontú egyszerű gráf. Ha*

$$|E(G)| > |E(T_{n,k-1})|,$$

akkor tartalmaz k elemű klikket.

A tétel algoritmikus változata is igaz. A klikk keresésre megfogalmazott módosított mohó algoritmus egy n pontú egyszerű gráf inputon $|E(G)| > |E(T_{n,k-1})|$ esetén garantáltan talál egy k elemű klikket.

Példa. A független halmaz keresésére vonatkozó algoritmus könnyen átfogalmazható klikk kereső algoritmusra. Erre a következő animáció ad példát. Az algoritmus k elemű klikk mellett (melléktermékként) egy teljes k-részes gráfot, is kiszámol, ami fokszámban majorálja az inputot. Ezzel a Turán-tételt is bizonyítja.



Észrevétel. A Turán-tétel éles: $T_{n,k}$ Turán-gráf nem tartalmaz $k+1$ elemű klikket (ami olyan csúcshalmaz, amelynek bármely két eleme összekötött). Valóban, ha egy ponthalmaz mérete eggyel nagyobb, mint az osztályok száma, akkor a skatulya-elv miatt szükséges, hogy egy osztályból egynél több elemet vegyünk ki. A Turán-gráf definíciója viszont azt mondja, hogy ez a két elem nem összekötött, a kivett csúcshalmaz nem lehet klikk.

A $k+1$ elemű klikk hiánya egy kissé általánosabb észrevételből is adódik.

Észrevétel. $T_{n,k}$ összes részgráfja k színezhető (a gráfot úgy definiáltuk, hogy a k darab osztály felfogható k színosztálynak). Azaz $T_{n,k}$ nem tartalmaz R részgráfot, ha $\chi(R) \geq k+1$ (azaz R nem k színezhető).

2. Turán-típusú problémák, extremális gráfelmélet

A Turán-tétel egy speciális esete, amikor gráfunkban nincs 4 pontú klikk. Ekkor a tétel azt mondja ki, hogy nem lehet $|E(T_{n,3})|$-nál több élünk. A feltételünket úgy is megfogalmazhatjuk, hogy gráfunk nem tartalmazza a tetraéder gráfját részgráfként (minden testnek van egy egyszerű gráfja, ahol a test csúcsai a gráf csúcsai, élei pedig a gráf éleinek felelnek meg). Turán tétele bizonyítása után a következő kérdést tette fel:

Mi van más szabályos testekkel? Például hány éle lehet egy gráfnak, ha nincs benne oktaéder, vagy ha nincs benne kocka, vagy ha nincs benne dodekaéder?

Definíció.

$$ext(n;T) = \max\{|E(G)| : \ G \ n \text{ pontú, egyszerű gráf, } T \not\subseteq G\}.$$

T-re úgy hivatkozunk, hogy tiltott részgráf. n a csúcsméret. A továbbiakhoz hasznos, ha bevezetjük a következő jelölést: Az n pontú egyszerű gráfok osztályát jelölje $\mathcal{G}_n$. Tehát $G \in \mathcal{G}_n$ jelentése G egy n pontú egyszerű gráf.

Újból átfogalmazzuk Turán tételét: $ext(n;K_k) = |E(T_{n,k-1})|$.

Az $ext(n;T)$ függvény vizsgálatával kapcsolatos problémákat Turán-típusú kérdéseknek nevezzük. Ez az extremális gráfelmélet első kérdésköre. Az extremális gráfelméletben bizonyos feltételeknek eleget tevő gráfok közt nézzük meg, hogy bizonyos gráfparaméter milyen határok között változik. Azaz a paraméter milyen extremális értékeket vehet fel.

Megjegyezzük, hogy Turán Pál kérdése a kocka gráfjára mind a mai napig megoldatlan kérdés.

Azt is megjegyezzük, hogy a háromszög tiltásának esete már a huszadik század elején Mantel számára ismert volt (feladatként tűzte ki egy matematikai újságban). A kérdéskör elméletté fejlődése azonban Turán Pál eredményeinek és kérdéseinek köszönhető. Közeli munkatársa, Erdős Pál különösen sokat tett az extremális gráfelmélet és általában az extremális kombinatorika fejlődéséhez.

A továbbiakban feltesszük, hogy a T tiltott gráfban nincsenek izolált csúcsok: Az izolált csúcsok hozzáadása/elvétele csak ott játszik szerepet, ahol T mérete meghaladja n-et.

3. Turán-típusú kérdések: Tiltott fák

Észrevétel. Legyen I a két pontot és egyetlen élt tartalmazó gráf. Ekkor $ext(n; I) = 0$.

Ha egy élt tiltunk, akkor nyilván a maximális élszám nulla lesz.

Észrevétel. Legyen $\wedge$ a három pontot és két élt tartalmazó gráf. Ekkor $ext(n; \wedge) = \lfloor n/2 \rfloor$.

Ha két összefutó élt tiltunk, akkor minden csúcs foka 0 vagy 1. Azaz a fokok összege legfeljebb n. Az élszám legfeljebb $n/2$. Mivel az élszám mindig egy természetes szám, ezért felső becslésünk igazából $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

A másik irányú egyenlőtlenség bizonyításához konstruálnunk kell egy $\wedge$ részgráfot nem tartalmazó gráfot: Ez egy teljes párosítás n vagy $n-1$ csúcson (ha n paritásától függően). Ennek élszáma $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

Észrevétel. Legyen M_2 a négy pontot és két nem összefutó élt tartalmazó gráf (azaz egy két élű párosítás). Ekkor $ext(n; M_2) = n - 1$, ha $n \geq 4$.

Ennek ellenőrzése az érdeklődő hallgatók számára egy egyszerű feladat.

10. Következmény. *Ha T olyan, hogy $|E(T)| \geq 2$, akkor elég nagy n esetén $ext(n; T) \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.*

A továbbiakban legalább két élű tiltott részgráfokkal foglalkozunk. A körmentes tiltott gráfok esete egyszerű.

11. Tétel. *Legyen T erdő (azaz körmentes gráf; azaz olyan gráf, amely a komponensei fák). Legyen T-nek legalább két éle. Ekkor $\alpha_T \cdot n \leq ext(n; T) \leq \beta_T \cdot n$, ahol $\alpha_T, \beta_T > 0$. Azaz $ext(n; T)$ nagyságrendje lineáris.*

A tételben szereplő alsó becslés már ismert, hiszen tiltott részgráfunknak legalább két éle van. Mielőtt a tétel nehezebb részét igazolnánk felidézünk két fogalmat és belátunk egy lemmát.

Jelölés. Legyen H egy gráf. Ekkor $\overline{d}(H)$ a H gráf átlagos foka, $\delta(H)$ a H gráf minimális foka.

12. Lemma. *$G \in \mathcal{G}_n$ esetén létezik olyan R részgráf ($R \subseteq G$), amelyre $\delta(R) \geq \frac{\overline{d}(G)}{2}$ teljesül.*

Megjegyzés. Nyilván a feszített részgráfok közt kell keresgélnünk.

Bizonyítás. Egy algoritmus leírásával kezdjük a bizonyítást.

13. Algoritmus. *Input: G egyszerű gráf. Output: R feszített részgráf, amely minden foka legalább $\overline{d}/2$.*
$A := G$
`//` A `az aktuális gráf, kezdetben` G.
`Amíg találunk` $x \in V(A)$`-t,úgy, hogy` $d_A(x) < \frac{\overline{d}}{2}$
  $A \leftarrow A - x$.
`// Ha egy csúcs foka túl kicsi, akkor nem lehet az outputban.`

A lemma ekvivalens azzal, hogy az algoritmus nem „üríti ki" G-t. Indirekten érvelünk. Tegyük fel, hogy a fenti algoritmus az összes csúcsot eltörli. Ekkor az algoritmus ad egy kiürítési sorrendet $V(G)$re, jelöljük ezt π-vel: $\pi : v_1, \dots, v_n$, azaz v_i az i-ediknek elhagyott csúcs ($n = |V(G)|$). Bevezetünk ehhez egy jelölést: $d_\pi^{\text{előre}}(v)$ a v csúcs nagyobb indexű szomszédainak száma.

Tudjuk: v_1-nek kevesebb mint $\frac{\overline{d}}{2}$ szomszédja volt a G gráfban, azaz $d(v_1) = d_\pi^{\text{előre}}(v_1)$ legalább $\frac{\overline{d}}{2}$. Utána a v_2-nek a v_1 elhagyása után kevesebb mint $\frac{\overline{d}}{2}$ szomszédja volt, azaz $d_\pi^{\text{előre}}(v_2) \geq \frac{\overline{d}}{2}$. Általában kiürítés esetén igaz minden $v \in V$ csúcsra teljesül $d_\pi^{\text{előre}}(v) < \frac{\overline{d}}{2}$, azaz a kiürítési sorrendre vonatkozólag minden csúcs „előre-foka" kevesebb mint $\frac{\overline{d}}{2}$.

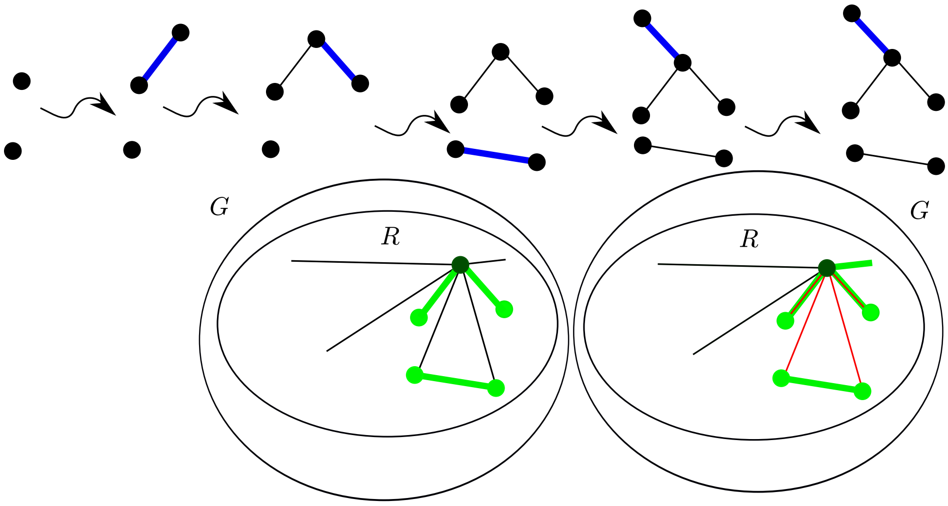
Észrevétel: $\sum d_\pi^{\text{előre}}(v) = |E|$, azaz a hátrafokok összege pontosan kiadja az élszámot. Ez az összeg a kiürítési sorozat esetén határozottan kisebb, mint $n\frac{\overline{d}}{2}$. Viszont az élek száma pontosan $n\frac{\overline{d}}{2}$. Ez ellentmondás, ami a lemmát bizonyítja. ■

Ezek után már egyszerű a bizonyítás vége.

Bizonyítás. (A tételé.) Továbbra is azt akarjuk bebizonyítani, hogy az extremális érték $< \beta_T n$. Pontosan megadjuk β_T-t: Legyen T egy tetszőleges erdő. Legyen $G \in \mathcal{G}_n$, amelyre $|E(G)| \geq |V(T)|n$ (azaz G-ben az átlag fok: $\frac{\sum d_i}{n} \geq \frac{2|V(T)|n}{n} = 2|V(T)|$). Ekkor G biztos tartalmaz T-vel izomorf részgráfot. A lemma alapján G-ben van olyan R részgráf, amelyre $\delta(R) \geq |V(T)|$. T példányát már R-ben megtaláljuk.

Valóban: T-t építsük fel egy üres gráfból ághajtások alkalmazásával. Ez könnyen megtehető: annyi ponttal indulunk ahány komponense van T-nek, mondjuk c. T_0 legyen a c pontú üres gráf. Mindegyik komponens egy fa, ami egyetlen csúcsból ághajtásokkal felépíthető. A komponensek egyenkénti felépítésével egy $\{T_i\}_{i=0}^{|E(T)|}$ gráfsorozatot kapunk, amelyben T_i-nek i éle van, továbbá $T_{|E(T)|} = T$. Indukcióval igazoljuk, hogy mindegyik T_i megtalálható R-ben.

Ha T_i-t megtaláltuk, akkor mohó módon ezt a részgráfot terjesztjük ki egy T_{i+1}-gyel izomorf részgráffá. Legyen x az a csúcs, amiből induló ághajtás adja T_{i+1}-et. x minden olyan szomszédja, ami nem reprezentál eddigi csúcsot (és az ehhez vezető él) megteszi az indukciós lépést.



Ilyen szomszéd viszont könnyen található, hiszen legalább $|V(T)|$ szomszéd van R-ben, míg T_i csúcsait kevesebb mint $|V(T)|$ csúcs reprezentálja. ∎

4. Turát típusú kérdések: Erdős—Stone—Simonovits-tétel

A fáknál jóval bonyolultabb gráfokra is tudunk valamit.

Észrevétel. Ha T olyan, hogy $\chi(T) = k$ akkor $ext(n; T) \geq |E(T_{n,k-1})|$.

A fenti észrevételnél jóval mélyebb az alábbi tétel.

14. Tétel (Erdős—Stone, Erdős—Simonovits). *Ha T olyan, hogy $\chi(T) = k \geq 2$, akkor $ext(n; T) = |E(T_{n,k-1})| + o(n^2)$.*

Ugyanez a tétel részletesebben:

15. Tétel (Erdős—Stone, Erdős—Simonovits). *(i) Legyen T olyan, hogy T kromatikus száma $k \geq 3$ (azaz $k-1$ — a T-hez tartozó Turán-gráf osztályszáma — legalább 2). Ekkor $ext(n; T) = |E(T_{n,k-1})| + o(n^2)$ (azaz a $o(n^2)$ tag egy maradéktag).*

(ii) Legyen T nem-üres páros gráf, azaz $\chi(T) = 2$. Ekkor $ext(n; T) = o(n^2)$ (a korábbi maradéktag főtaggá vált).

Az Erdős—Stone—Simonovits-tételt a következő formában mondjuk ki: Adott $k \geq 2$ egész. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen kicsiny valós szám. Legyen S egy tetszőleges pozitív egész. Legyen $G\mathcal{G}_n$ egy gráf $|E(T_{n,k-1})| + \varepsilon \cdot n^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{k-1}\right)n^2 + \varepsilon \cdot n^2$ éllel. Ekkor G tartalmaz $K_{S,S,\ldots,S} = K_{k \times S}$ részgráfot, amennyiben n elég nagy. Ahol $K_{S,S,\ldots,S} = K_{k \times S}$ az a teljes k-részes gráf, amelyben minden rész S méretű.

Ez valóban csupán egy egyszerű átfogalmazása az Erdős—Stone—Simonovits-tételnek: Legyen T egy tetszőleges gráf, amelyre $\chi(T) = k$. Ekkor alkalmasan nagy S számra $T \subset K_{k\times S}$. Így a megfogalmazásunk alapján elég nagy n esetén

$$ext(n;T) \leq |E(T_{n,k-1})| + \varepsilon \cdot n^2,$$

ahol ε általunk választott tetszőlegesen kicsiny pozitív konstans.

Az átfogalmazásunk bizonyítását hasonlóan kezdjük, mint a tiltott erdők esetét. Most azonban nem lineárisan sok élünk van, sűrű gráfokkal dolgozunk.

16. Lemma. *Legyen G egy n pontú egyszerű gráf, amelyre teljesül, hogy $|E(G)| \geq \delta\binom{n}{2}$, azaz átlag foka legalább $\delta(n-1)$. Ekkor van olyan R részgráfja amelyben minden fok legalább $\delta(|V(R)|-1)$.*

Bizonyítás. (Lemmáé) Az erdők tárgyalásánál szükséges lemmához hasonlóan bizonyítható: Az állítás ekvivalens azzal, hogy az alábbi algoritmus nem üríthati ki G-t.

```
// G-ről feltesszük, hogy átlag foka δ(|V(G)| − 1)
A := G
// A az aktuális gráf, kezdetben G.
Amíg találunk x ∈ V(A)-t,úgy, hogy
    d_A(x) < δ(|V(A)| − 1)
    A ← A − x.
// Ha egy csúcs foka túl kicsi, akkor nem lehet az outputban.
```

Indirekten tegyük fel, hogy az algoritmus kiüríti a gráfunkat. Az i-edik lépésben az aktuális gráfból elhagyott élek száma kisebb mint $\delta(n-i)$. A teljes kiürítés során elhagyott élek száma kisebb mint

$$\delta(n-1) + \delta(n-2) + \ldots + \delta \cdot 2 + \delta \cdot 1 = \delta\binom{n}{2},$$

ami ellentmondás, hiszen G élszáma legalább $\delta\binom{n}{2}$. ■

Sajnos az algoritmus által garantált részgráf mérete lehet hogy kicsi lesz és számunkra nem kielégítő. A következő forma lesz fontos:

17. Lemma. *Legyen $\varepsilon_0 > 0$ egy tetszőlegesen kicsi valós szám és N egy tetszőlegesen nagy természetes szám. Legyen G egy elég nagy egyszerű gráf (azaz $|V(G)| := n > \nu(N, \varepsilon_0)$), amely átlag foka legalább $\delta \cdot (n-1)$. Ekkor van olyan R részgráfja amelyben minden fok legalább $(\delta - \varepsilon_0)(|V(R)|-1)$ és $|V(R)| \geq N$, azaz R pontszáma nagy.*

Bizonyítás. A bizonyítás ötlete már nem újdonság. Legyen $A = G$ az aktuális gráf. Amíg találunk olyan $x \in V(A)$ csúcsot amely foka kisebb mint $(\delta - \varepsilon_0)|V(A)|$ hagyjuk el. Ha ez az eljárás leáll mielőtt N pontunk marad, akkor megtaláltuk a kívánt R részgráfot.

Különben az elhagyott és a maradék N pont között vezető élek száma legfeljebb

$$(\delta-\varepsilon_0)(n-1)+(\delta-\varepsilon_0)(n-2)+\ldots+(\delta-\varepsilon_0)(n-N+1)+\binom{N}{2} = (\delta-\varepsilon_0)\binom{n}{2}+(1-\delta+\varepsilon)\binom{N}{2}.$$

G élszáma legalább $\delta\binom{n}{2}$. Ha n nagy, akkor ez ellentmondás. ■

A lemma alkalmazásával elérjük, hogy elég a következő állítást igazolni:

18. Állítás. *Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges szám. Legyen $G \in \mathcal{G}_n$ egy gráf, amelyre minden csúcs foka legalább*

$$\left(1 - \frac{1}{k} + \frac{\varepsilon}{2}\right)(n-1).$$

Ekkor minden $s \in \mathbb{N}$ esetén elég nagy n-re G tartalmaz $K_{(k+1)\times s}$ részgráfot. ($K_{(k+1)\times s}$ a teljes $k+1$ részes gráf, amely minden osztálya s elemű).

Bizonyítás. Az állítás igazolása k-ra vonatkozó teljes indukcióval történik. Azaz részgráfok egy sorozatát találjuk meg G-ben. A séma a megtalálandó részgráfok izomorfiatípusára

$$K_{1\times s_1} \to K_{2\times s_2} \to K_{3\times s_3} \to \ldots \to K_{(k-1)\times s_{k-1}} \to K_{k\times s_k}.$$

A végső s_k paraméter lesz az állításbeli s. Nyilván választásunk olyan lesz, hogy $s_i \gg s_{i+1}$ teljesülni fog paramétereinkre. Az indukció nyilván elindul: $K_{1\times s_1}$ egy s_1 pontú üres gráf és n elég nagy.

Az indukciós lépéshez azt látjuk be, hogy ha tetszőleges s-re létezik olyan $S = S(s)$ szám, ha G elég nagy, a minimális fokszámra tett feltétel teljesül, továbbá G tartalmaz $K_{\ell\times S}$ részgráfot, akkor $K_{(\ell+1)\times s}$ részgráf is garantálható.

$S \gg s$ egy „nagy” szám, amit a későbbiekben rögzítünk. Legyen F azon ponthalmaz, amelyen egy $K_{\ell\times S}$ részgráfunk van ($|F| = \ell S$, F csúcshalmaz ℓ darab S elemű részre van osztva, amire mint F részei hivatkozunk). $\overline{F} = V(G) - F$ elemeit jó (halmazuk J) és rossz csúcsok (halmazuk R) kategóriákba osztjuk ($\overline{F} = J\dot{\cup}R$) a következők szerint. $x \in J$ akkor és csak akkor, ha x-nek F mindegyik részében legalább s szomszédja van.

Ha $|J| > (s-1)\binom{S}{s}^{\ell}$, akkor készen vagyunk: J minden eleméhez rendeljünk egy típust, s (tetszóLegesen kiválasztott) szomszéd halmazát az ℓ rész mindegyikében. $\binom{S}{s}^{\ell}$ a lehetséges típusok száma. J elemszáma akkora, hogy a skatlya-elv garantálja legalább s J-beli csúcs létét közös típussal. F minden részéből a közös típus szerinti s csúcsot és J-ből a szóban forgó típussal rendelkező s csúcsot kivéve megtaláljuk a keresett $K_{(\ell+1)\times s}$ részgráfot.

J elemszámának becsléséhez becsüljük meg az F és $\overline{F}$ között hiányzó élek számát.

Egy rész minden csúcs fokát alúlról becsültük, speciálisan F-ben minden csúcs legfeljebb

$$\left(\frac{1}{k} - \frac{\varepsilon}{2}\right)(n-1)$$

másikkal nincs összekötve. Azaz F és $\overline{F}$ között. legfeljebb

$$|F|\cdot\left(\frac{1}{k}-\frac{\varepsilon}{2}\right)(n-1)=\ell S\cdot\left(\frac{1}{k}-\frac{\varepsilon}{2}\right)(n-1)\leq S\cdot\left(1-\frac{\varepsilon\ell}{2}\right)n$$

él hiányzik. Másik oldalról R minden elemének a másik oldalon (F-ben) az egyik rész lehetséges S szomszéda közül legfeljebb s valósul meg. Így R minden eleme legalább $S-s$ élt kihagy. A hiányzó élek teljes száma legalább

$$|R|(S-s)=(n-|F|-|J|)(S-s)=(n-\ell S-|J|)(S-s).$$

A két eredményt összevetve kapjuk

$$(n-\ell S-|J|)(S-s)\leq S\cdot\left(1-\frac{\varepsilon\ell}{2}\right)n.$$

Rendezve

$$(n-\ell S)(S-s)-S\cdot\left(1-\frac{\varepsilon\ell}{2}\right)n\leq(S-s)|J|.$$

Azaz

$$\left(\frac{\varepsilon}{2}\ell S-s\right)n-\ell S(S-s)\leq(S-s)|J|,$$

$$\frac{\varepsilon\ell S-2s}{2(S-s)}\cdot n-\ell S\leq|J|.$$

Az ε,ℓ,s paraméterek adottak, mi S-et választhatjuk. Ez legyen akkora, hogy a bal oldalon szereplő n-nem kineáris függvényben n együtthatója pozitív legyen. Ez nyilván elérhető. S választása után J-ről kell belátni, hogy elég nagy. Ez könnyen elérhető n választásával. ■

5. Turán-típusú kérdések: degenerált problémák

A fentiek alapján azonosítani tudjuk az érdekes eseteket: Ha T páros, kört tartalmaz, akkor a fentiek nem sokat mondanak. Minden más esetben $ext(n;T)$ nagyságrendje kiolvasható az ismertetett eredményekből. Ha T páros, kört tartalmaz, akkor a $ext(n;T)$ vizsgálatát *degenerált problémának* nevezzük.

A degenerált esetben viszonylag kevés pontos eredmény ismert. Ha a tiltott részgráf C_4, C_6, C_{10} vagy $K_{2,k}$, $K_{3,k}$, akkor $ext(n;T)$ nagyságrendje ismert. Például C_8, C_{12}, C_{14}, ..., $K_{4,4}$, $K_{4,5}$, ..., továbbá a kocka esete nem ismert.

Csak a tiltott C_4 esetét vizsgáljuk. Két részből áll a kitűzött probléma. Be kell látnunk, hogy $G\in\mathcal{G}_n$ C_4-mentes gráfnek nem lehet sok éle. A másik oldalról egyetlen $G\in\mathcal{G}_n$ C_4-mentes gráfot kell konstruálnunk, amleynek „sok” éle van. Az első, absztrakt metematikai bizonyítás bizonyul könnyebbnek (egy egyszerű kettős leszámlálás lesz az ötlet). A konstrukcióhoz sok algebrai/geometriai ismeret szükséges.

⋆

19. Tétel. *Legyen G egy n pontú, C_4-et részgráfként nem tartalmazó egyszerű gráf. Ekkor*

$$|E(G)| \leq \frac{1}{4} \cdot n\sqrt{4n-3} + \frac{1}{4} \cdot n.$$

Bizonyítás. Két élt szomszédosnak nevezünk, ha van közös csúcsuk, azaz a gráf lerajzolásában a két él egy „$\wedge$ alakot" határoz meg. Két ilyen élt *cseresznyének* nevezünk. A két él közös csúcsa a cseresznye *középpontja*. Az a két pont, amely csak egy-egy élnek végpontja, a cseresznye *szemei*.

Számoljuk meg a cseresznyéket a G gráfban. Először az összes pont esetén nézzük meg, hány olyan cseresznye van, amelynek középpontja az adott pont. Ilyen módon számolva $\sum_{i=1}^{n} \binom{d_i}{2}$ adódik a cseresznyék számára, ahol $\{d_i\}_{i=1}^{n}$ a G gráf fokszámsorozata. Egy másik módon számolva mindegyik pontpárra nézzük meg, hány olyan cseresznye van G-ben, amelynek szemei az adott két pont. Mivel G-ben nincs C_4-gyel izomorf részgráf, ezért egy pontpárra legfeljebb egy cseresznye „támaszkodhat". Így a cseresznyék számára az $\binom{n}{2}$ felső becslést kapjuk.

A kétféle összeszámolás összevetéséből kapjuk, hogy

$$\binom{n}{2} \geq \sum_{i=1}^{n} \binom{d_i}{2} \geq n\binom{\overline{d}}{2},$$

ahol $\overline{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n}$, a fokszámok átlaga, azaz $\frac{2|E|}{n}$. A második egyenlőtlenség az $\binom{x}{2} = \frac{x(x-1)}{2}$ függvény konvexségéből és a Jensen-egyenlőtlenségből adódik.

Egyszerű számtan adja a bizonyítandót. ∎

ext$(n; C_4)$-re egy felső becslést kaptunk. A becslés aszimptotikus nagyságrendje $\frac{1}{2}n^{3/2}$.

⋆

Legyen $\mathbb{F}$ egy véges test. (Gondolhatunk $\mathbb{F}_p$-re, ahol p egy prím. Azaz $\mathbb{F}_p$ a $\{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ halmaz a modulo p aritmetikával.)

A valós projektív sík koordináta geometriája a valós számokon alapul. Ahogy az Euklideszi sík koordináta geometriája is a valós számok aritmetikáján alapulva egy geometriai struktúrát hoz létre. A konstrukciók véges tesetekre is végrehajthatók. Így kapjuk a $PG(2, \mathbb{F})$ projektív síkot (a 2-es a dimenzióra utal), amely koordináta geometriája az $\mathbb{F}$ testen alapul. (PG a projektív geometria két szavának kezdőbetűiből ered.) Ebben a geometriai struktúrában a pontok, egyenesek száma véges. A véges projektív geometriák alappéldáját az alábbiakban írjuk le.

Definíció. $\mathbb{F}^3 = \{(a, b, c) : a, b, c \in \mathbb{F}\}$. Ezen a halmazon definiálunk egy relációt: $(a, b, c) \sim (a', b', c')$ akkor és csak akkor, ha található olyan nem-nulla $\lambda \in \mathbb{F}$, hogy $(a, b, c) = \lambda(a', b', c')$. Ez egy ekvivalenciareláció. $(0, 0, 0)$ egy egyelemű ekvivalenciaosztályt alkot. Minden más ekvivalenciaosztály $|\mathbb{F}| - 1$ elemű. Ezen ekvivalenciaosztályok halmaza alkotja a geometriánk $\mathcal{P}$ ponthalmazát. Azaz $\mathbb{F}^3 - \{(0, 0, 0)\}|_{\sim}$, ennek elemeit $[a,b,c]$-vel, vagy $(a:b:c)$-vel szokás jelölni. Mi az első jelölést használjuk. Az egyenesek $\mathcal{E}$ halmazát ugyanezen ekvivalenciaosztályokkal azonosítjük. $[a,b,c]^*$ az (a,b,c) vektor ekvivalenciaosztályának neve, ha egyenest reprezentál. $[a,b,c]$ és $[a',b',c']^*$ akkor és csak akkor illeszkedik, ha $a\cdot a'+b\cdot b'+c\cdot c'=0$.

Az így kapott geometriai struktúra minden illeszkedési tulajdonságot teljesít, amit a valós projektív síkon megszoktunk (például bármely két különböző egyenes pontosan egy pontban metszi egymást). Ezek ellenőrzése az $\mathbb{F}$ feletti lineáris algebra ismerősei számára egyszerű gyakorlatok.

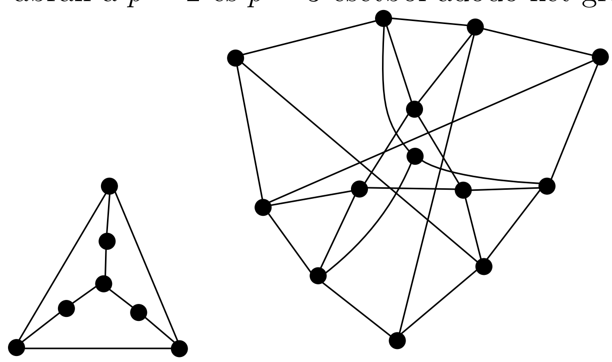
Megjegyzés. A fentiekben egy algebrai struktúrából konstruáltunk egy geometriait, amely szép geometrai tulajdonságokkal rendelkezik. A fordított logika is természetes. Elvárjuk a szép geometriai tulajdonságokat (axiómák) és keresünk ezt teljesítő modelleket. Esetünkben (az axiómák leírását itt nem részletezzük) ezek a véges projektív síkok. $PG(2,\mathbb{F})$ csak egy modell (igazából egy modell-sorozat) a sok lehetőség közül.

A fentiek alapján nyilvánvaló, hogy $PG(2,\mathbb{F})$-ben $|\mathcal{P}|=|\mathcal{E}|=(|\mathbb{F}|^3-1)/(|\mathbb{F}|-1)=|\mathbb{F}^2|+|\mathbb{F}|+1$. Az is könnyen számolható, hogy minden egyenesre $|\mathbb{F}|+1$ pont illeszkedik.

Konstrukció (Sok élt tartalmazó gráf C_4 nélkül). Legyen p egy prímszám. Definiálunk egy G_p egyszerű gráfot.

G_p csúcsait $PG(2,\mathbb{F}_p)$ pontjai alkotják. Két csúcs, $[a,b,c]$ és $[a',b',c']$ akkor és csak akkor szomszédos ha $a\cdot a'+b\cdot b'+c\cdot c'=0$. (Azaz az egyik csúcs koordinátáit pontként, a másikét egyenesként olvasva illeszkedő párt kapunk.)

Példa. A következő ábrán a $p=2$ és $p=3$ esetből adódó két gráfot láthatjuk.



Észrevétel. (i) *G_p-ben nincs négy hosszú kör.* Valóban, ha ilyen lenne, akkor felvátva pontnak, egyenesnek értelmezve a négy hosszú kör csúcsait két olyan egyenest kapnánk, ami két különböző pontban metszenék egymást. Ez pedig nem lehetséges.

(ii) $|V(G_p)|=p^2+p+1=:n$.

(iii) Az $v=[a,b,c]$ csúcs szomszédai az $v^*=[a,b,c]^*$ egyenesre illeszkedő v-től különböző pontok. Azaz, ha a v pont nem illeszkedik v^* egyenesre, akkor

$p+1$ szomszédja van, különben p szomszédja van. Azon v pontok, amelyek illeszkednek a v^* egyenesre olyanok, hogy koordinátáik teljesítik az $x^2+y^2+z^2=0$ egyenletet (modulo p aritmetikában dolgozunk!). Ez az egyenlet geometriailag egy kúpszeletet ír le. Ismert, hogy pontainak száma $p+1$. Azaz $p+1$ darab csúcs foka p és így p^2 csúcs foka $p+1$.

(iv) $2|E(G_p)| = p^2(p+1)+(p+1)p = p^3+2p^2+p$, azaz $|E(G_p)| = (p^3+2p^2+p)/2$.

Az észrevételből az élek pontszámtól való függésének nagyságrendjét emeljük ki: $|E| \sim \frac{1}{2}n^{3/2}$. Ez az extremális élszám helyes nagyságrendje.

20. Tétel.

$$ext(n, C_4) \sim \frac{1}{2}n^{\frac{3}{2}}.$$