Gráfelmélet/Diszkrét Matematika MSc hallgatók számára

Gráfok csúcsszínezései

2017. Előadó: Hajnal Péter

1. (Csúcs)színezések alapfogalmai

Emlékeztetőként idézzünk fel néhány korábban tanult definíciót és tételt.

Definíció. Egy $c : V(G) \to \mathbb{N}^+$ leképezést a G gráf egy (csúcs)színezésének nevezzük. A $c(v)$ „szám” a v csúcs színe.

Definíció. A G gráf egy színezése jó színezés, ha minden $e \in E(G)$ élre $e = uv$ esetén $c(u) \neq c(v)$.

Nyilván egy $e = vv$ hurokél megakadályozza a jól színezhetőséget. Míg hurokél hiánya mellett a „minden él legyen különböző színű” egy jó színezés. Párhuzamos élek a közös végpontpárjukra vonatkozó „legyenek különböző színűek” feltételt ismétlik. Így a csúcs színezési problémákban felesleges egy él mellett szereplő párhuzamos élpárjait szerepeltetni. Ebben a fejezetben egyszerű gráfokkal dolgozunk, tehát itt MINDEN GRÁFON EGYSZERŰ GRÁFOT FOGUNK ÉRTENI.

Definíció. A G gráf egy színezése k-színezés, ha a felhasznált színek száma legfeljebb k.

Definíció. Egy G gráf kromatikus száma

$$\chi(G) = \min\{k : G\text{-nek létezik jó } k\text{-színezése}\}.$$

Definíció. A G gráf esetén egy $F \subset V(G)$ csúcshalmazt független ponthalmaznak nevezünk, ha bármely két F-beli pont között sincs él.

Definíció. $\alpha(G) = \max\{|F| : F \text{ független ponthalmaz } G\text{-ben}\}.$

Definíció. A G gráf esetén egy $K \subset V(G)$ csúcshalmazt klikknek nevezünk, ha bármely két K-beli pont között van él.

Definíció. $\omega(G) = \max\{|K| : K \text{ klikk } G\text{-ben}\}.$

Megjegyzés. Tetszőleges G gráfra $\chi(G) \geq \omega(G)$. Ez következik abból, hogy egy klikkben minden csúcsnak más-más színt kell adnunk jó színezésnél. Egy jó színezésnél az azonos színű csúcsok egy független ponthalmazt alkotnak. Így egy jó csúcsszínezés felfogható mint $V(G)$ független halmazokra való osztályozása.

2. Nem k-színezhető gráfok

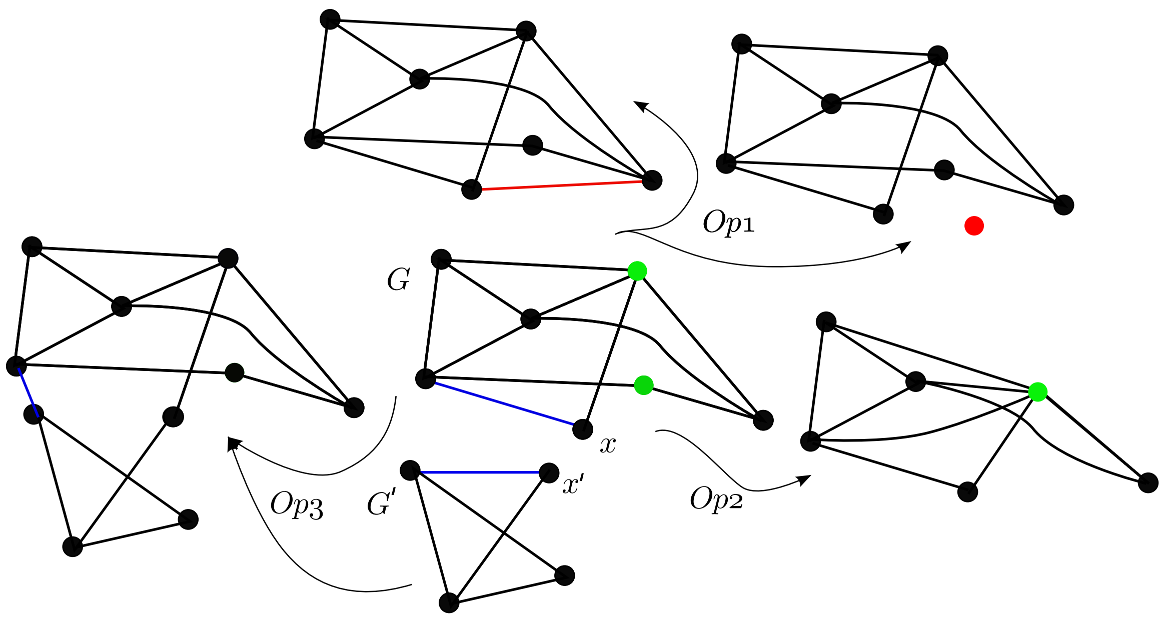
Emlékeztetőül megint idézzünk fel néhány egyszerű állítást:

- G nem 1-színezhető $\Longleftrightarrow$ G-ben létezik él.
- G nem 2-színezhető $\Longleftrightarrow$ G-ben létezik páratlan hosszú kör.
- G nem 3-színezhető $\Longleftarrow$ G-nek részgráfja a K_4 ($K_4 = 4$ csúcsú teljes gráf).

Megjegyzés. Az utolsó állításában a $\Longrightarrow$ irány nem teljesül, sőt nem ismert „jó" jellemzés a nem-3-színezhetőség problémájára.

Tehát K_4 részgráf felmutatása egy jó módszer nem-3-színezhetőség bizonyítására. (Jó és gyors, hatásos.) De a módszer nem teljes. A következőkben Hajós György egy teljes módszerét ismertetjük annak igazolására, hogy egy gráf nem k-színezhető.

Definíció. A következőkben definiálunk három gráfokon elvégezhető operációt.
(Op1) Bővítés: Él vagy csúcs hozzáadása a gráfhoz. Legyen G^+ a G-ből kapott gráf.
(Op2) Csúcsösszevonás: Két nem szomszédos csúcs (x, x') azonosítása. Ha x csúcs szomszédságát $N(x)$-szel jelöljük, akkor az összevonással keletkezett pont szomszédsága megegyezik $N(x) \cup N(x')$-vel. Legyen $\widetilde{G}$ a G-ből kapott gráf.



(Op3) Hajós-operáció: Legyen $e \in E(G), e' \in E(G')$, $\overrightarrow{e} = xy$, $\overrightarrow{e'} = x'y'$. Az operáció eredményét jelöljük $H = \text{Hajós}_{\overrightarrow{e},\overrightarrow{e'}}(G, G')$-val. $V(H) = (V(G) - \{x\})\dot\cup(V(G') - \{x'\})\dot\cup\{[x]\}$, $E(H) = (E(G) - \{e\})\dot\cup(E(G') - \{e'\})\dot\cup\{xx'\}$, az illeszkedés pedig természetes. A formális definíció megértését a mellékelt ábrán tesztelni lehet.

1. Lemma. *Ha G és G' nem k-színezhető, akkor G^+, $\widetilde{G}$ és Hajós(G, G') sem k-színezhető.*

Az előző Lemma nyilvánvalóan ekvivalens a következővel:

2. Lemma. *Ha G^+ és $\widetilde{G}$ k-színezhető, akkor G is az. Ha Hajós(G, G') k-színezhető, akkor G vagy G' is az.*

Megjegyzés. G^+ a Lemma nyilvánvaló, ugyanis több objektum esetén nehezebbé válik a színezés. $\widetilde{G}$ és Hajós(G, G') esetén is egyszerű az állítás.

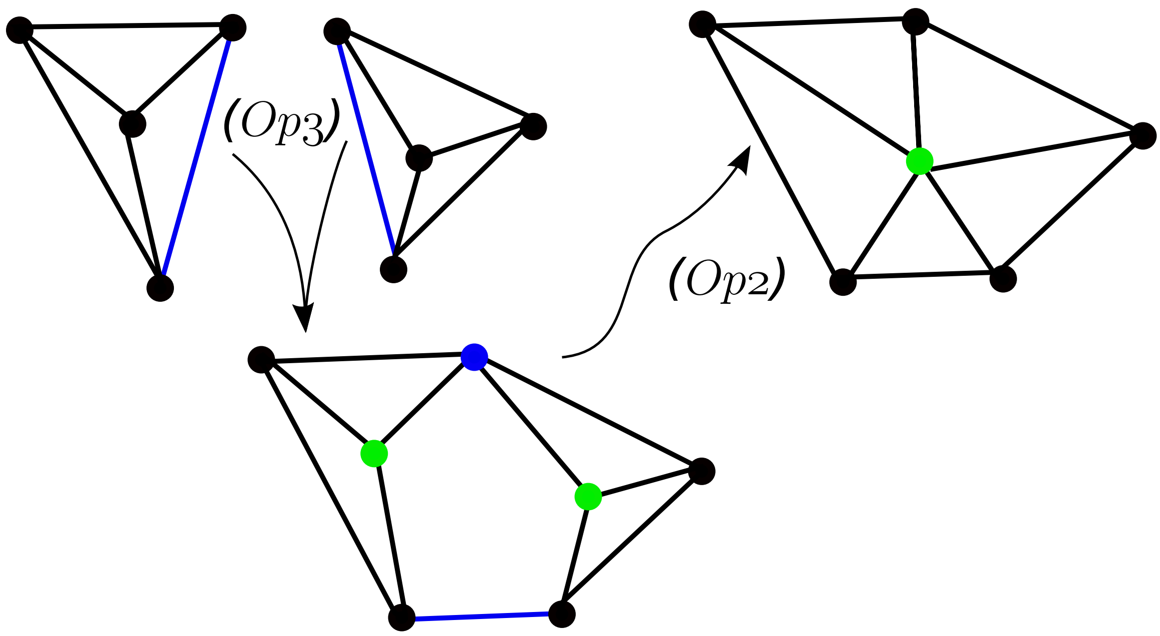
Definíció. A G gráf Hajós-konstruálható K_{k+1}-ekből, ha létezik olyan $G_1, G_2, \ldots G_l$ sorozat, hogy mindegyik G_i vagy K_{k+1}, vagy a korábbi gráfokból a fent leírt három operáció valamelyikével nyerhető.

3. Következmény. *Ha G Hajós-konstruálható, akkor G nem k-színezhető.*

A következmény bizonyítása teljes indukcióval történhet.

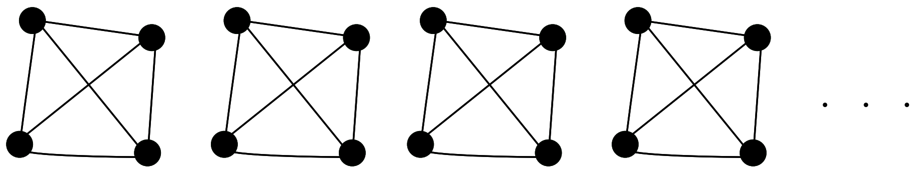
Nyilván G_1 mindig csak K_{k+1} lehet, G_2 pedig csak K_{k+1} vagy egy olyan gráf, ami K_{k+1}-ből (Op1) operációval kapható ((Op2) nem alkalmazható teljes gráfokra, (Op3)-hoz szükséges két korábbi gráf).

Példa. A Hajós-séma alapján bizonyítsuk be, hogy az 5-kerék nem 3-színezhető.



Először a G_1 és G_2 gráfokon (két négy pontú teljes) hajtjuk végre az (Op3) operációt. Az így kapott G_3 gráf nem 3-színezhető. A G_3 gráfon pedig az (Op2) operációt hajtjuk végre, és az eredmény a szintén nem 3-színezhető G_4 gráf lesz, ami egy 5-kerék.

Példa. Animáció a Hajós-séma alkalmazására:



4. Tétel Hajós György. *G akkor és csak akkor nem k-színezhető, ha G Hajós-konstruálható K_{k+1}-ből.*

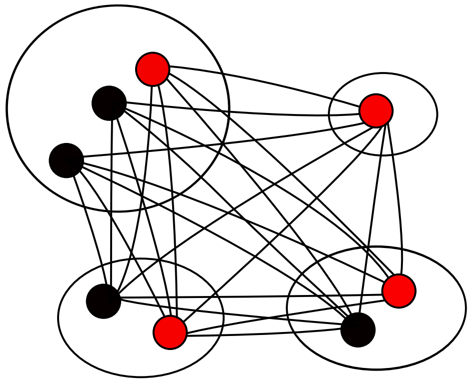
Bizonyítás. Az egyik irányt már láttuk. A tétel nehezebbik „felét" pedig indirekt módon bizonyítjuk.

Tegyük fel, hogy létezik ellenpélda, azaz létezik olyan G nem k-színezhető gráf, ami nem Hajós-konstruálható. Tegyük a G gráfot telítetté, azaz adjunk hozzá éleket mindaddig, amíg az ellenpéldára vonatkozó két tulajdonság teljesül. Így kapjuk a G^{tel} gráfot. A telítés során a nem k-színezhetőség megmarad. Így G^{tel} gráfhoz élet adva egy Hajós-konstruálható gráfot kell kapnunk.

A bizonyítás folytatása előtt szükségünk van néhány definícióra, illetve egy nagyon fontos lemmára. A Hajós-tétel bizonyítását a lemma bizonyítása után folytatjuk.

Definíció. Egy G gráf teljes r-részes gráf, ha a $V(G)$ csúcshalmaz r darab osztály uniója, és az $E(G)$ élhalmaz pedig az összes keresztél az osztályok között.

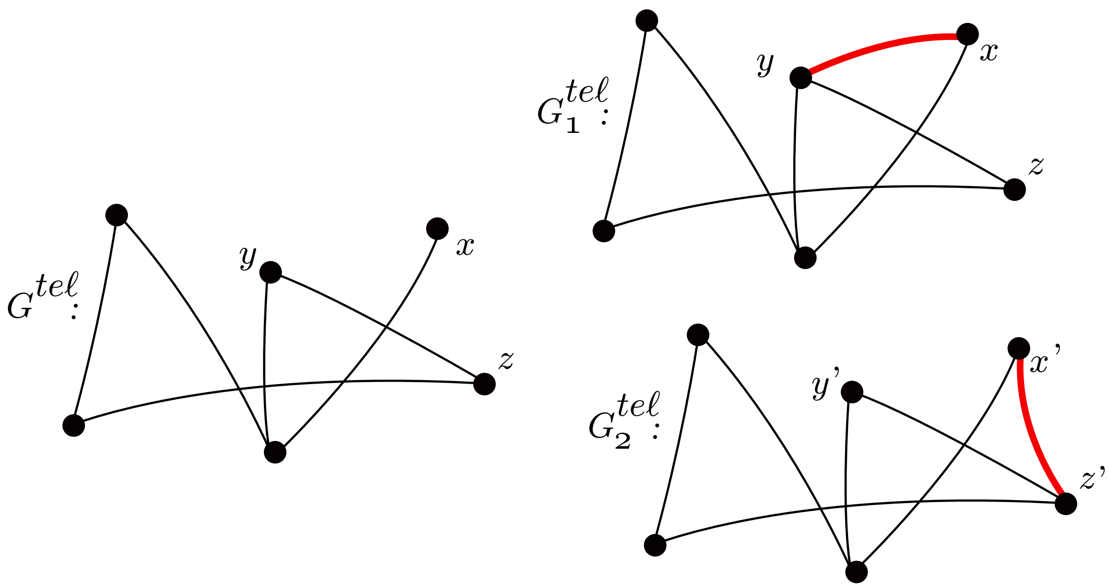
Példa. 4-részes teljes gráf például a következő:



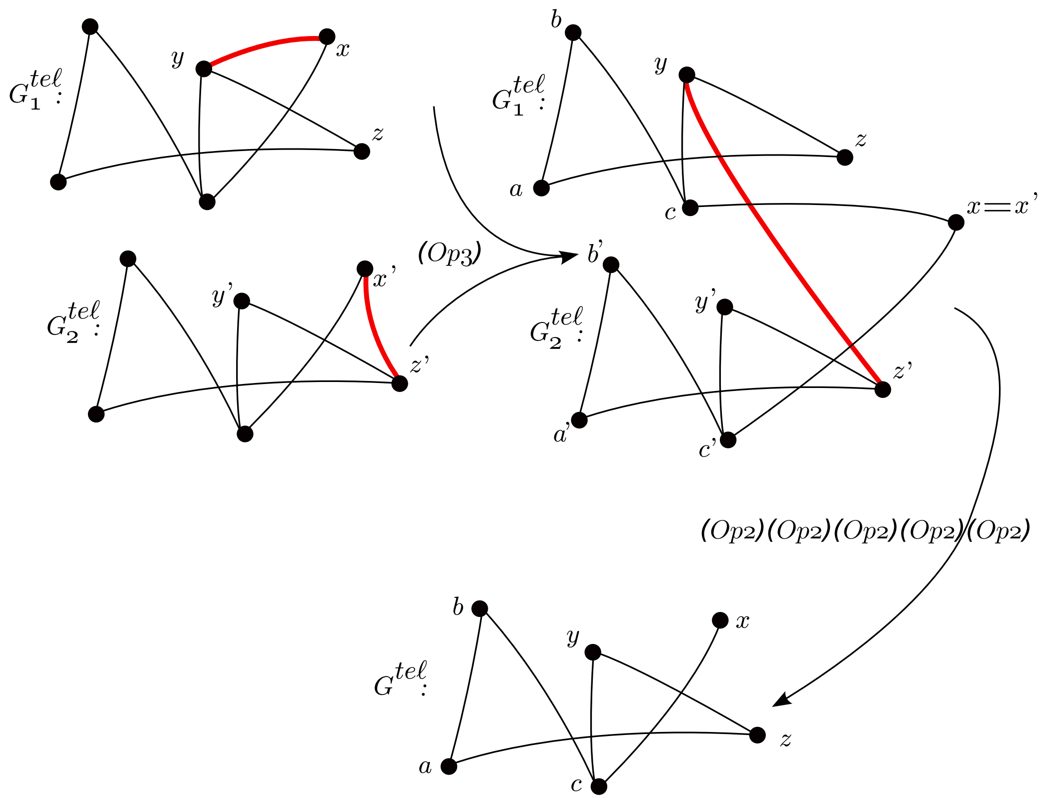
Definíció. A teljes r-részes gráf ekvivalens definíciója a következő: az „egyenlőnek vagy nem összekötöttnek lenni” reláció ekvivalenciareláció, továbbá az ekvivaleciareláció osztályainak száma r.

5. Lemma. *G^{tel} teljes r-részes gráf.*

Bizonyítás. A bizonyítás indirekt módon történik. Tegyük fel, hogy G^{tel} nem teljes r-részes gráf, azaz az „egyenlőnek vagy nem összekötöttnek lenni” reláció nem ekvivalencia. Ekkor nyilván csak a tranzitivitás sérülhet, azaz léteznek olyan $x, y, z \in V(G^{tel})$ különböző pontok, hogy $xy, xz \notin E(G^{tel})$, de $yz \in E(G^{tel})$. Ekkor az xy és xz él hiánya kétféle módot is ad a G^{tel} telített gráf bővítésére. mindkét esetben a telítettség definíciója alapján olyan gráfot kapynk, amey Hajós-konstruálható. Az egyértelműség végett a második gráf (amelyet az xz él hozzáadásával kapunk G^{tel}-ből) csúcsait vesszőkkel látjuk el.



Ha erre két gráfra végrehajtjuk a $\text{Hajós}_{xy,x'z'}(G_1^{tel}, G_2^{tel})$ operációt, akkor a következő gráfot kapjuk:



A kapott gráfban minden G_1^{tel}-beli a pont azonosítható a neki megfelelő G_2^{tel}-beli a' ponttal ((Op2)). Így megkapjuk a G^{tel} gráfot. Ez azt mutatja, hogy G^{tel} Hajós-konstruálható, és ez ellentmodás. ∎

Hajós-tétel bizonyításának folytatása. Emlékezzünk, hogy a tételt indirekt módon kezdtük bizonyítani, azaz feltettük, hogy létezik olyan G nem k-színezhető gráf, ami nem Hajós-konstruálható. Telítettük a G gráfot, és az így kapott G^{tel} gráfról beláttuk, hogy teljes r-részes gráf. Folytatva a bizonyítást két eset lehetséges.

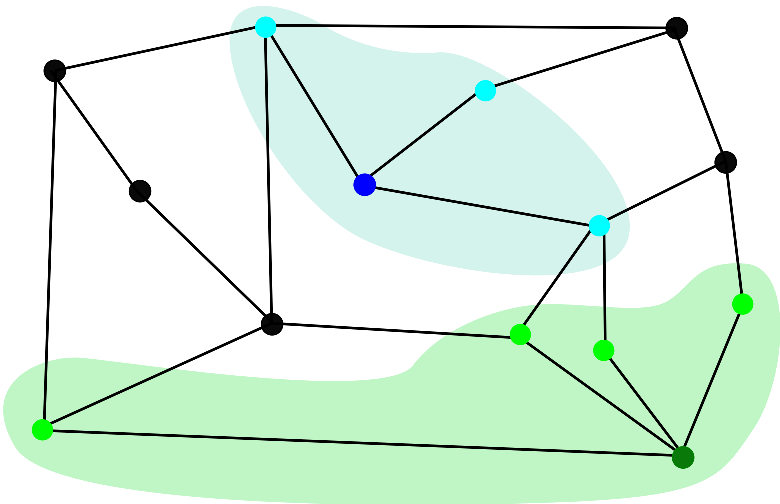
1. eset: Ha $r \geq k+1$, akkor G^{tel} gráfnak létezik egy $k+1$ pontú teljes részgráfja, ugyanis minden osztályból egy tetszőleges csúcsot kiválasztva egy ilyen részgráfot kapunk. A részgráfság miatt G^{tel} megkapható K_{k+1}-ből egyszerű bővítésekkel, azaz az (Op1) operáció többszöri alkalmazásával. Ez viszont ellentmond annak, hogy G^{tel} nem Hajós-konstruálható.

2. eset: Ha pedig $r \leq k$, akkor nyilvánvaló, hogy G^{tel} gráf k-színezhető, ami szintén ellentmondás.

Mindkét esetben ellentmondásra jutottunk, így ezzel a Hajós-tétel bizonyítása véget ért. ∎

3. A kromatikus szám és a derékbőség paraméter

6. Tétel (BSc). *Létezik olyan $\{G_n\}$ gráfsorozat, melyre teljesül, hogy $\omega(G_n) = 2$ (azaz G háromszögmentes), illetve $\chi(G_n) \to \infty$, ha $n \to \infty$.*



Vegyünk egy olyan gráfot, amelyben nincs háromszög. Tegyük fel, hogy ennek a gráfnak egy pontjában állunk. Ez a pont a szomszédaival együtt egy csillagot feszít ki, ami az eredeti gráf részgráfja. Egy ilyen helyzet látható a fenti ábrán. Ezen lokális részeket látva semmilyen nehézséget nem érzékelünk a színezési problémaval kapcsolatban. A gráf globális színezéséhez szükséges színszám tetszőlegesen nagy lehet. Ez rávilágít a probléma nehézségére. A nehézség formálisan is igazolható: ez az egyik alap $\mathcal{NP}$-teljes probléma (szerepel Richard Karp 1972-ben összegyűjtött 21 $\mathcal{NP}$-teljes problémája között).

Definíció. Tetszőleges G gráf esetén rögzítsünk egy $o \in V(G)$ csúcsot, és tetszőleges $r \in \mathbb{N}^+$ esetén definiáljuk a következő részgráfot:

$$B(o,r) = G\mid_{\{v \in V: d(o,v) \leq r\}},$$

ahol $d(o,v)$ a legrövidebb ov út hosszát jelöli.

Az, hogy minden $B(o,1)$ csillag az azzal ekvivalens gráfunkban nincs háromszög.

Erősíthetjük a lokális feltételünket azzal, hogy nagyobb sugár esetén követeljük meg, hogy minden gömb egyszerű legyen.

Hasonlóan $B(o,r)$-re tett egyszerűségi feltételek megfogalmazhatók globálisan: Az hogy minden o csúcsra $B(o,r)$ páros az azzal ekvivalens, hogy G-ben nem létezik $2r+1$ hosszú, vagy rövidebb páratlan kör. Az, hogy minden o csúcsra $B(o,r)$ fa (körmentes, hisz a gömbök öszefüggősége nyilvánvaló) az azzal ekvivalens, hogy G-ben nem létezik $2r+1$ hosszú, vagy rövidebb kör.

Definíció. A G gráf derékbőségének (girth) nevezzük a következő gráfparamétert

$$g(G) = \min\{\ell : \text{ } G\text{-ben létezik } \ell \text{ hosszú kör}\}.$$

A következőkben arra keressük a választ, hogy, ha adott egy γ és egy τ pozitív egész szám, akkor létezik-e olyan G gráf, melyre $g(G) \geq \gamma$ és $\chi(G) \geq \tau$. Azaz az erősített lokális egyszerűség mellett is elképzelhető-e globálisan színezésre bonyolult gráf. A válasz igen.

7. Tétel (Erdős Pál). *Bármely $\gamma, \tau \in \mathbb{N}^+$ számokhoz létezik olyan G gráf, amelyre $g(G) \geq \gamma$ és $\chi(G) \geq \tau$.*

Nem konstruktív bizonyítást adunk a tételre. (Konstruktív bizonyítások is léteznek, de azok nehezebbek.) A következőkben egy valószínűségszámítási módszeren alapuló bizonyítást mutatunk meg.

Bizonyítás. Legyen V egy n elemű csúcshalmaz. n értékét később rögzítjük, egyelőre elég azt tudnunk n-ről, hogy elég nagy. Bármely V-beli pontpárra behúzzuk a közöttük lévő élt p valószínűséggel (azaz az össze nem kötöttség valószínűsége $1-p$). A p $(0 < p < 1)$ értékét később adjuk meg n, τ, γ függvényében. Ezzel a módszerrel felépítünk egy gráf értékű valószínűségi változót. Ez az Erdős—Rényi-féle véletlengráf modell, jelölése $\underline{G}_{n,p}$.

A kromatikus szám vizsgálata helyett a könnyebben kezelhető legnagyobb független halmaz méretét vizsgáljuk (szokásos jelölése $\alpha(G)$). A kapcsolat nyilvánvaló:

$$\chi(G) \cdot \alpha(G) \geq |V(G)| = n.$$

Azaz, „ha $\alpha(G)$ kicsi, akkor $\chi(G)$ nagy”. Egyszerűbb nyelven: „ha csak kicsik lehetnek a színosztályok, akkor sokra lesz szükség egy jó színezéshez”

Jelölje $\mathcal{A}_t$ azt az eseményt, hogy $\alpha(G) < t$. Ez ekvivalens azzal, hogy G-ben nincs t elemű független ponthalmaz. Jelölje $\mathcal{F}_R$ pedig azt az eseményt, hogy R független ponthalmaz G-ben. Ekkor

$$\mathbb{P}(\mathcal{F}_R) = (1-p)^{\binom{|R|}{2}}.$$

Érvényes továbbá az alábbi összefüggés:

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}_t) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{\substack{R \subseteq V \\ |R|=t}} \mathcal{F}_R \right).$$

Valóban, korábbi megjegyzéseink alapján $\mathcal{A}_t$ az $\cup_{R \subseteq V, |R|=t} \mathcal{F}_R$ esemény komplementere. Felhasználva azt a triviális tényt, hogy $\mathbb{P}(\cup_{i=1}^n E_i) \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(E_i)$ azt kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}_t) \geq 1 - \binom{n}{t} (1-p)^{\binom{t}{2}}.$$

Felhasználtuk azt is, hogy $\binom{n}{t}$ tag unióját kell nézni, illetve az unió által leírt esemény valószínűségét egy olyan öszeggel becsülhetjük, amelyben minden $\mathbb{P}(\mathcal{F}_R)$ tag értéke közös: $(1-p)^{\binom{t}{2}}$.

A becslést egyszerűsíthetjük a $\binom{n}{t} < n^t$ durva és az $1-p < e^{-p}$ nem annyira durva becslésekkel (p pozitív és közel lesz 0-hoz)

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}_t) \geq 1 - n^t e^{-p\binom{t}{2}} = 1 - e^{t\log n} e^{-p\frac{t(t-1)}{2}} = 1 - e^{t\log n - p\frac{t(t-1)}{2}}.$$

A t paramétert a következőkben úgy választjuk majd meg, hogy az egyenlet jobb oldala nagyobb legyen mint $\frac{2}{3}$. A továbbiakban is fogunk ilyen előre kijelentett „ígéreteket" tenni, és ezeket vastag betűtípussal fogjuk jelölni. Majd a bizonyítás végén megmutatjuk, hogy ezek az ígéretek valóban teljesülhetnek/kielégíthetők.

Az, hogy nagy valószínűséggel az α paraméter kicsi az azt is jelenti, hogy nagy valószínűséggel a kromatikus szám nagy.

Áttérünk egy új gondolatmenetre, amely a derékbőség nagyságának garantálásához vezet. Jelöljük ξ_γ-val azt a valószínűségi változót, amely megadja a γ-nál nemhosszabb körök számát G-ben. Keressük ennek a várható értékét. Ehhez vezessük be a

$$\xi_C = \begin{cases} 1, & \text{ha } C \subseteq G_{n,p} \\ 0, & \text{különben} \end{cases}.$$

valószínűségi változót, ahol C egy lehetséges kör. Ekkor

$$\mathbb{E}(\xi_\gamma) = \mathbb{E}\left(\sum_{C \text{hossza} \leq \gamma} \xi_C\right) = \sum_{l=3}^{\gamma}\left(\sum_{C \text{hossza}=l} \mathbb{E}(\xi_C)\right). \tag{1}$$

Ha a C hossza ℓ, akkor $\mathbb{E}(\xi_C) = p^\ell$. Hány darab lehetséges ℓ hosszú kör van? A válasz $\binom{n}{\ell}\frac{(\ell-1)!}{2}$, ugyanis a csúcsokat $\binom{n}{l}$-féleképpen választhatjuk ki, és ezeket a kiválasztott ℓ pontokat $\frac{(\ell-1)!}{2}$-féleképpen rendezhetjük körbe. Felhasználva az

$$\binom{n}{\ell}\frac{(\ell-1)!}{2} = \frac{n(n-1)\dots(n-\ell+1)}{2\ell} \leq \frac{n^\ell}{2\ell} \leq \frac{n^\ell}{6}$$

egyenlőtlenséget, felírhatunk $\mathbb{E}(\xi_\gamma)$-ra egy felső becslést:

$$\mathbb{E}(\xi_\gamma) \leq \sum_{\ell=3}^{\gamma} \frac{n^\ell}{6} p^\ell = \sum_{\ell=3}^{\gamma} \frac{n^\ell p^\ell}{6} \overset{(!)}{\leq} \sum_{\ell=3}^{\gamma} \frac{(np)^\gamma}{6} \leq \gamma \frac{(np)^\gamma}{6}.$$

A becslésnél feltettük, hogy $np \geq 1$, így használhattuk, hogy az 1-nél nagyobb kvóciensű geometriai sorozat monoton nő, minden eleme az utolsóval felülről becsülhető.

A paramétereinket úgy fogjuk megválasztani, **hogy** $\gamma(np)^\gamma/6 \leq n/6$ **teljesüljön**.

A fenti választások után a Markov-egyenlőtlenségből adódik, hogy

$$\mathbb{P}\left(\xi_\gamma > \frac{n}{2}\right) < \mathbb{P}(\xi_\gamma > 3\mathbb{E}\xi_\gamma) < \frac{1}{3},$$

$$\mathbb{P}\left(\xi_\gamma \le \frac{n}{2}\right) > \frac{2}{3}.$$

Ezek után felírhatjuk a

$$\mathbb{P}\left(\mathcal{A}_t \wedge \left(\xi_\gamma \le \frac{n}{2}\right)\right) > 0$$

megállapítást, mivel a $\wedge$ két oldalán álló események valószínűsége külön-külön legalább $\frac{2}{3}$.

Ebből következik, hogy létezik olyan G gráf, amelynek n csúcsa van, és amelyre teljesül a következő két állítás:

- A G-ben lévő γ-nál nem hosszabb körök száma $\frac{n}{2}$-nél kevesebb,
- $\alpha(G) \le t = 4 \log n/p = 4(\log n)n^{1-\omega}$.

Vegyük ezt a G gráfot, és minden γ-nál nem hosszabb körből hagyjunk el egy-egy pontot. Az előkészítés miatt legfeljebb $n/2$ csúcsot hagyunk el. Jelölje az így kapott gráfot G_0.

- Ekkor G_0-ban nincs legfeljebb γ hosszúságú kör:

$$g(G_0) \ge \gamma.$$

G_0 csúcsszáma legalább $\frac{n}{2}$ ($|V(G_0)| \ge \frac{n}{2}$) és $\alpha(G_0) \le t$. Így igaz a a következő becslés is amennyiben **feltesszük, hogy** $n/2t \ge \tau$:

- $$\chi(G_0) \ge \frac{n/2}{t} = \frac{n}{2t} \ge \tau$$

Az p, t paraméterekre tett ígéreteink:

$$0 < 1 - e^{t \log n - p\frac{t(t-1)}{2}} < \frac{1}{3}, \qquad np > 1, \qquad \gamma(np)^\gamma \le n,$$

és emellett $n \ge 2t\tau$.

Egy lehetséges választás: p legyen olyan, hogy $\gamma(np)^\gamma = n$. Azaz a harmadik feltétel igazsága „definiálja” p-t. Ekkor $np = (n/\gamma)^{1/\gamma}$, azaz a második feltétel automatikusan igaz (n-et nagyon nagynak választjuk).

$$p = \frac{1}{n} \cdot (n/\gamma)^{1/\gamma} = c(\gamma)n^{-(1-1/\gamma)},$$

ahol $c(\gamma)$ csak a γ-tól függő konstans.

Az első feltételben szereplő kitevő

$$t \log n - c(\gamma)n^{-\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)}t(t-1)/2.$$

Ennek negatív, kis abszolót értékű számnak kell lenni. Ezt a

$$t = 3(\log n)n^{1-\frac{1}{\gamma}}$$

választás (nagy n mellett) teljesíti. $n \ge 2t\tau$ nyilván teljesül. ■