Gráfelmélet/Diszkrét Matematika MSc hallgatók számára

Gráfok élszínezései

2017. Előadó: Hajnal Péter

1. Élszínezések alapfogalmai

Definíció. G gráf élszínezése $c : E(G) \to \mathbb{N}^+$ függvény. c egy k-élszínezése G-nek, ha $c(E(G)) \subseteq \{1, 2, \ldots, k\}$.

Definíció. c jó élszínezése G-nek, ha minden x csúcsra az ott összefutó éleknek $d(x)$ darab különböző színe van.

A következő optimalizálási feladat adódik: keressük azt a minimális k természetes számot, amellyel egy G gráf jól k-él-színezhető. E gráfparaméter neve: G élkromatikus száma, jelölése χ_e. Azaz

$$\chi_e(G) := \min\{k \in \mathbb{N}^+ : G\text{-nek van jó } k\text{-élszínezése}\}.$$

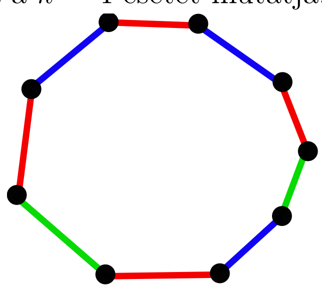
A hurokél akadálya a jó színezésnek: Ha van hurokél, akkor nem létezik jó élszínezés (az összefutó $d(x)$ él között ismétlődés van), ha nincs hurokél, akkor pedig létezik jó színezés (például ha minden él különböző színt kap, akkor jó színezésünk van).

Szoros kapcsolat van a párosítások és az élszínezések között: Egy gráf jó élszínezésében az azonos színű élek egy párosítást alkotnak a gráfban. Tehát jó színezés keresése ekvivalens az élhalmaz párosításokra történő osztályozásával.

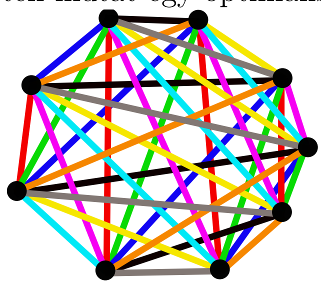
Emlékeztető. $\Delta(G) := \max\limits_{x \in V(G)} d(x)$, a G gráf maximális fokszáma.

Nyilvánvalóan $\Delta(G) \leq \chi_e(G)$. Az alábbi példák mutatják, hogy az egyenlőtlenség két oldala között lehet különbség.

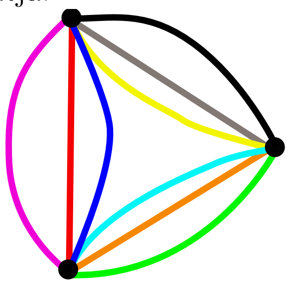
Példa. C_{2k+1} páratlan kör ($k \in \mathbb{Z}^+$). Könnyen látható, hogy $\Delta(C_{2k+1}) = 2$ és $\chi_e(C_{2k+1}) = 3$. Az alábbi ábra a $k = 4$ esetet mutatja.



Példa. K_{2k+1} páratlan pontú teljes gráf. Ekkor $\Delta(K_{2k+1}) = 2k$ és $\chi_e(K_{2k+1}) = 2k+1$. Az alábbi ábra kilenc pont esetén mutat egy optimális élszínezést.



Példa. Legyen T_k az a gráf, amelynek három csúcsa és bármely kettőt k párhuzamos él köti össze. Ekkor bármely két él szomszédos. Így $\Delta(T_k) = 2k$ és $\chi_e(T_k) = 3k$. Az alábbi ábra a $k = 3$ esetet mutatja.



Egy gráf élkromatikus számát a maximális fokszámmal már korlátoztuk alulról ($\Delta(G) \leq \chi_e(G)$). A következő két tétel felső korlátot is ad.

1. Tétel (Shannon tétele). *Legyen G hurokél-mentes gráf. Ekkor*

$$\chi_e(G) \leq \frac{3}{2}\Delta(G).$$

2. Tétel (Vizing tétele). *Legyen G egyszerű gráf. Ekkor*

$$\chi_e(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

2. Bizonyítások

Több bizonyítást is ismertetünk. Mindegyik bizonyítás hasonló gondolatmenetet használ. A közös ötleteket kiemeljük.

Feltesszük, hogy G bizonyos éleit már kiszíneztük egy P paletta felhasználásával. Erre a részleges színezésre c_0-ként hivatkozunk. c_0 lehet egy algoritmus futásának részeredménye, vagy egy indukció bizonyítás indukciós feltevése.

A színezetlen élekre szeretnénk kiterjeszteni c_0-t. Ennek leírása lehet algoritmusunk következő teendője, vagy az indukciós bizonyítás indukciós lépésének igazolása.

Minden v csúcsra legyen S_v a v körüli éleken nem használt palettabeli színek halmaza. Azaz $|S_v| = |P| - d_v$, ahol d_v a v-re illeszkedő színezett élek száma (a jó élszínezés garantálja, hogy d_v közös csúcsra illeszkedő színezett élen d_v darab különböző színt találunk).

Ha egy színezetlen uv élre $S_u \cap S_v \neq \emptyset$, akkor tetszőleges $\gamma \in S_u \cap S_v$ színre az e élre kioszthatjuk a γ színt. Ezt a c_0 mohó kiterjesztésének nevezzük (a korábban színezett élek megtartják színüket).

Egy sokkal érdekesebb lépés, ha kiemelünk két színt: γ és γ'-t. $G_{\gamma,\gamma'}$-t alkossa G összes csúcsa és a γ, illetve γ' színű élek. Ezen részgráf maximális foka 2. Azaz komponensei utak és körök. A körök páros hosszú körök, amelyeken a két szín alternál. Egy P útkomponens mentén (legyen x és y az út két végpontja, amely csúcsokról feltesszük, hogy $x \neq y$) a γ, γ' színek felcserélése egy módosított jó élszínezéshez vezet, amelyben a színezett élek halmaza nem változott. Azonban az S halmazokban történik változás. Könnyű látni, hogy az úton kívüli pontokban, az ott összefutó éleket látva semmi nem érzékelhető a színezés módosításából. Az út belső pontjaiban két él színe felcserélődött, de az S halmaz nem változott. Míg x-ben és y-ban S megváltozik, az új halmazok: $S_x\Delta\{\gamma, \gamma'\}$, $S_y\Delta\{\gamma, \gamma'\}$. Ez valódi változás. x és y a $G_{\gamma,\gamma'}$ egy útkomponensének végpontjai, így γ, γ' színek egyike az út mentén illeszkedik rá, míg a másik szín szabad szín (a komponens „nem folytatódik tovább"). Ha a mohó kiterjesztés nem működik, akkor ez a kicsinek tűnő változtatás sokat jelenthet.

Lássuk a részleteket:

2.1. Shannon tétele

A tétel $\Delta(G) \leq 1$ esete nyilvánvaló. Így feltesszük, hogy $\Delta(G) \geq 2$.

Most $P = \{1, 2, \ldots, \lfloor 3\Delta(G)/2 \rfloor\}$. Legyen $e = uv$ egy tetszőleges él (tehát u és v különböző) és tegyük fel, hogy c_0 kiszínezi $G - e$-t. Célunk G teljes színezése.

Tudjuk, hogy $|S_x| \geq |P| - D(G) \geq \lfloor 3D(G)/2 \rfloor - D(G) = \lfloor D(G)/2 \rfloor$ teljesül minden csúcsra és minden parciális (vagy akár teljes) színezésre. Sőt u és v körül vagy egy színezetlen él, azaz $|S_u|, |S_v| \geq \lfloor D(G)/2 \rfloor + 1$.

Ha $S_u \cap S_v \neq \emptyset$, akkor a mohó színezés kiterjesztés működik.

Ha $S_u \cap S_v = \emptyset$, akkor vegyünk egy $\alpha \in S_u$ színt. Feltevésünk miatt $\alpha \notin S_v$. Legyen vw egy α színű él. w szükségszerűen egy harmadik csúcs u és v mellett (ezt fontos meggondolni hiszen lehetnek párhuzamos élek gráfunkban!). Ha $P_v \cap P_w \neq \emptyset$, akkor a vw él átszínezhető P_v és P_w egy κ közös elemére. Az átszínezés után az egyetlen változás, hogy az új P_v és P_w halmazok $P_v\Delta\{\alpha, \kappa\}$ és $P_w\Delta\{\alpha, \kappa\}$ lesznek. Speciálisan az uv él már színezhető α színre, készen vagyunk.

A tétel érdekes esete: $S_u \cap S_v = \emptyset$ és $S_v \cap S_w = \emptyset$. Egy kis számtan után azt kapjuk, hogy $|S_u| + |S_v| + |S_w| > |P|$. Valóban: Ha $D(G) = 2k$ vagy $D(G) = 2k + 1$

$(k \in \mathbb{N})$, akkor

$$|S_u| + |S_v| + |S_w| \geq \left(\left\lfloor \frac{D(G)}{2} \right\rfloor + 1 \right) + \left(\left\lfloor \frac{D(G)}{2} \right\rfloor + 1 \right) + \left\lfloor \frac{D(G)}{2} \right\rfloor = 3k + 2 >$$

$$> |P| = \left\lfloor \frac{3D(G)}{2} \right\rfloor = \begin{cases} 3k, & |D(G)| = 2k \\ 3k+1, & |D(G)| = 2k+1. \end{cases}$$

Ebből nyilvánvaló, hogy $S_u \cap S_w = \emptyset$ nem lehetséges.

Legyen $\beta \in S_u \cap S_w$. Feltevéseink szerint $\beta \notin S_v$. Speciálisan léteznie kell egy vs élnek, ami β színű. Könnyen látható, hogy s egy eddig nem szerepelt, negyedik csúcs.

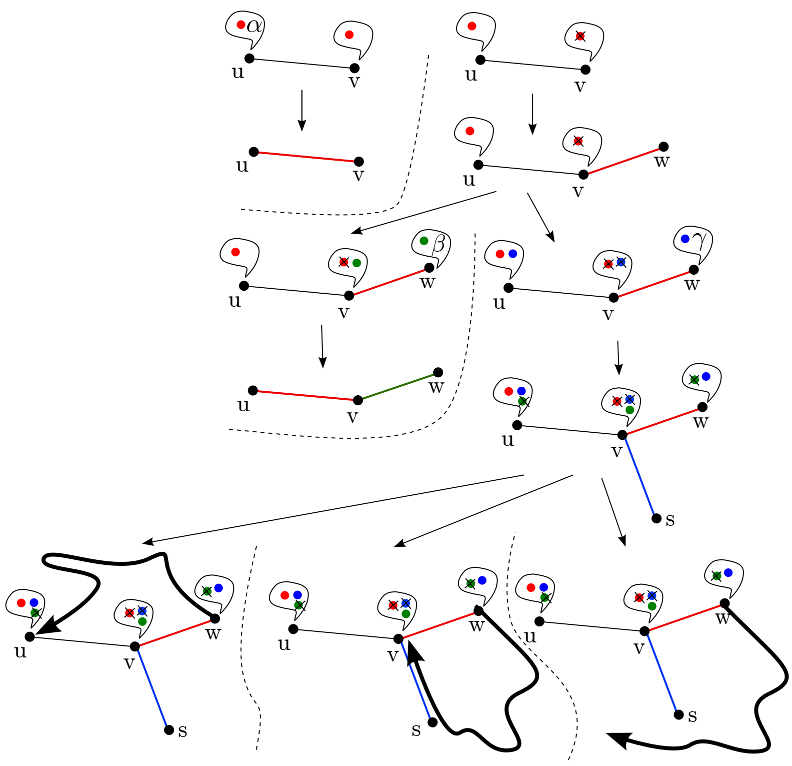
Tudjuk, hogy $S_v \neq \emptyset$, így alkalmas $\gamma \in P$ színre $\gamma \in S_v$. Feltevéseink szerint $\gamma \notin S_u, S_w$.

Vizsgáljuk $G_{\beta,\gamma}$ w-t tartalmazó komponensét. Ez szükségszerűen út: v-nél szabad β, így nem illeszkedik rá β színű él. w-ből indulva a v-re illeszkedő γ színű éllel indul. Végződésére több lehetőség van:

(1) u-ban fejeződik be γ színnel.

(2) v-ben fejeződik be az sv, β színű éllel.

(3) Egy eddig nem szereplő x csúcsban fejeződik be.



1. ábra. Shannon tétele bizonyításának struktúrája

P mentén cseréljünk meg a β, γ színeket. Egy módósított jó színezéshez jutunk. (1) és (3) esetén a vw él átszínezhető lesz γ színre, és a v mellett felszabadult α szín kiosztható uv-re. (2) esetén a v-re illeszkedő β színű (nyilván egyetlen) él veszti el színét. Így uv a β színt kaphatja.

2.2. Vizing tétele, I. bizonyítás

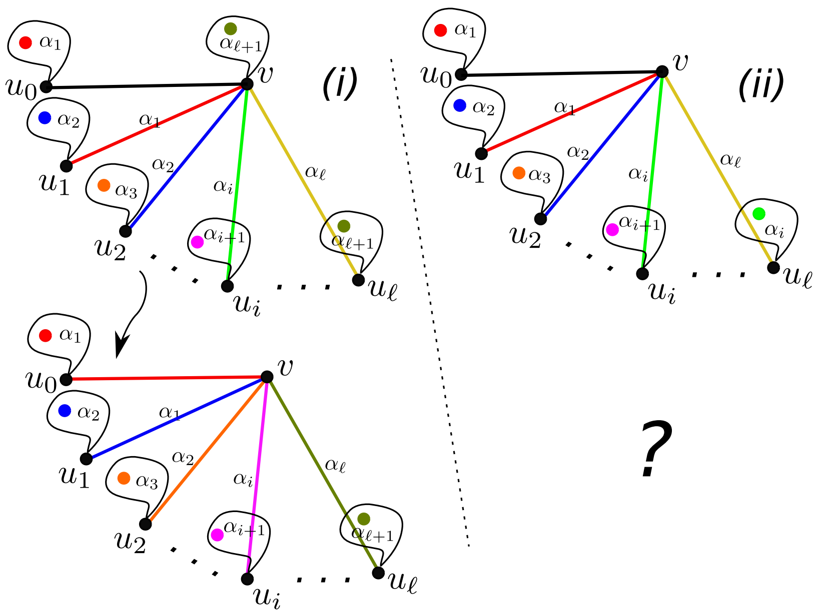
Színezendő G gráfunk egyszerű gráf, azaz ha két pont szomszédos, akkor egyetlen él köti őket össze. Most a $P = \{1, 2, \ldots, \Delta(G) + 1\}$ palettával dolgozunk. Ismét feltesszük hogy G egyetlen $e = uv$ él kivételével színezett (c_0 a részleges színező függvény). Tudjuk, hogy minden x csúcs esetén S_x nem üres. Feltehetjük, hogy $S_u \cap S_v = \emptyset$.

Legyen $\alpha \in S_u$, így $\alpha \notin S_v$, azaz v-re illeszkedik α színű él: vu_1. $u \neq u_1$, hiszen gráfunk egyszerű (a továbbiakban $v = v_0$ jelöléssel élünk). Feltehetjük, hogy $S_{u_1} \cap S_v = \emptyset$. Valóban, ha a fenti metszet nem üres, akkor az $u_1 v$ él átszínezhető, amiáltal az α szín szabaddá válik az uv élre és készen vagyunk.

Legyen $\alpha_2 \in S_{u_1}$ (a továbbiakban α-ra mint α_1 is hivatkozunk). Tegyük fel, hogy $\alpha_2 \neq \alpha_1 = \alpha$. A fentiek során tett feltevéseink miatt $\alpha_2 \notin S_v$. Azaz lesz egy u_2 szomszédja v-nek, amelyre a vu_2 él színe α_2. Folytassuk eljárásunkat, amíg tudjuk. Így kapjuk az $u_0, u_1, \ldots, u_\ell$ különböző csúcsokat és $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\ell$ különböző színeket. Egy véges gráfban el kell akadnunk. hogy történhet ez meg? Két lehetőség van:

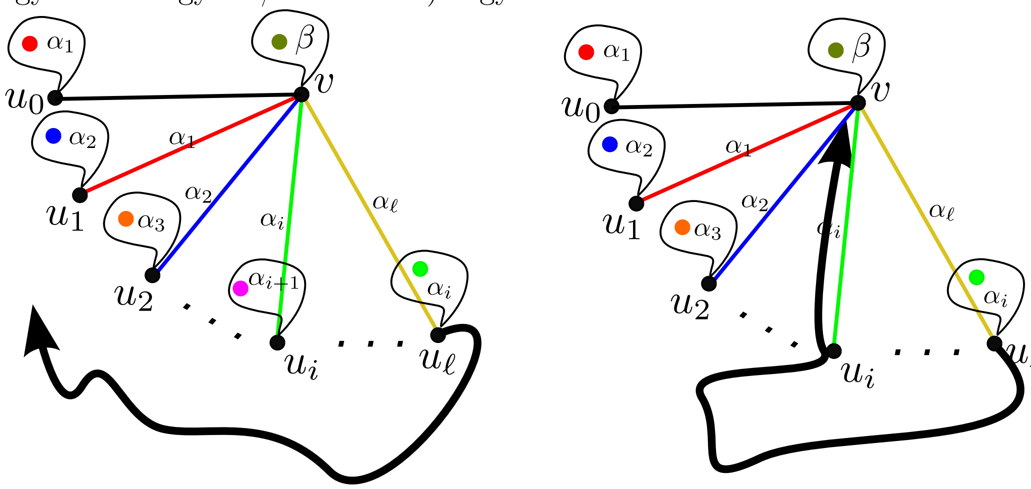
(i) Az u_ℓ csúcsban választott $\alpha_{\ell+1}$ szabad szín lehet új az eddigi α_j színekhez képest, azonban lehet, hogy v-re nem illeszkedik ilyen színű él.

(ii) Az u_ℓ csúcsban választott $\alpha_{\ell+1}$ szabad szín előfordulhat az eddigi α_j színek között. Legyen i az az index, amelyre $\alpha_{\ell+1} = \alpha_i$.



Az (i) esetben korábbi gondolataink működnek: A vu_ℓ él átszínezhető $\alpha_{\ell+1}$-re, ezzel egy időben minden vu_i kaphatja az α_{i+1} színt ($i = 0, 1, \ldots, \ell - 1$). Speciálisan az uv kiszínezhető. Az (ii) eset a problémás.

Ekkor vegyünk egy $b \in S_v$ színt. Feltehető, hogy β nem szerepel egyik S_{u_j} halmazban sem (laásd (i) eset). Vegyük a $G_{\alpha_i\beta}$ gráf u_ℓ-et tartalmazó komponensét, ami nyilván út lesz. Attól függően, hogy ez az út áthalad-e az u_iv élen (azaz eléri az u_i vagy v csúcs egyikét/mindkettőt) vagy nem két esetünk van:



Az út mentén hajtsuk végre az α_i/β színcserét. Az bal oldali esetben u_ℓ körül felszabadul a β szín, v körül megmarad szabadnak és az (i) eset alapján dolgozhatunk. A jobb oldali esetben az α_i szín szabadul fel v körül. Így az $u_0v, u_1v, \ldots, u_{i-1}v$ éleket színezhetjük át: u_jv színe α_{j+1} lesz (ismét lásd az (i) eset átszínezésének gondolatmenetét).

2.3. Vizing tétele, II. bizonyítás

Legyen $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ és legyen $G_i := G|_{\{v_1,\ldots,v_i\}}$. i-re vonatkozó teljes indukcióval belátjuk az állítást G_i-re. Bizonyításunk bizonyításunk lényegi része G_i egy jó-él-színezéséből megkonstruálunk G_{i+1} jó-él-színezését. Azaz G_i élszínezését kiterjesztjük a v_{i+1}-re illeszkedő G_i-hez haladó élekre (amik kezdetben színezetlenek). Legyen F a G_i és v_{i+1} közötti élek halmaza, így $|F| = d|_{G_{i+1}}(v_{i+1}) =: d$.

G_i élszínezésének kiterjesztése fázisokban történik. Legyen $H := \{\text{színezetlen élek}\}$. Kezdetben $H = F$. A kiterjesztés során a H halmaz élei egyenként színt kapnak. Így $|H|$ csökken, amíg $H = \emptyset$ lesz. Ekkor térünk át a következő, v_{i+2} csúcsra.

Legyen $O := \{F\text{-beli élek, amiknek már osztottunk színt}\}$. Azaz $O \dot\cup H = F$ és $|O \dot\cup H| = |O| + |H| = d$.

Minden H-beli e élhez tartozik egy lehetséges színek halmaza. Azaz az aktuális színezésben megnézzük a két végpontjára illeszkedő színezett élek színeit (ezek $T(e)$ halmaza tiltott szín számára). $L(e) = P - T(e)$, azaz a palettánk nem tiltott színeinek halmaza.

Kezdetben minden $e \in H = F$ élre $|L(e)| \geq 2$. Valóban egy $xv_{i+1} \in H = F$ él esetén csak az x-re G_i-ben illeszkedő élek színei tiltottak. Ezen élek száma $d|_{G_i}(x) \leq d(x) - 1 \leq \Delta(G) - 1$. Így

$$\begin{aligned}|L(e)| =&|P| - |\{\, x\text{-re vagy } v_{i+1}\text{-re illeszkedő színezett éle színei}\}| \\ \geq&\Delta(G) + 1 - (\Delta(G) - 1) = 2.\end{aligned}$$

Az $L(e)$ halmazokból kiválasztunk egy preferált részt, amit $P(e)$-vel jelölünk. Azaz $P(e) \subset L(e)$, azaz $P(e)$ mindegyik eleme alkalmas szín e színezésére. Definiáljuk az alábbi ($\star$) tulajdonságot, amit a kiterjesztés során végig megőrzünk:

($\star$) Mindegyik $P(e)$ egy- vagy kételemű, továbbá maximum egy H-beli élre lesz preferált színhalmaza egyelemű.

Ha e egy olyan él, amely preferált színhalmaza egyelemű, akkor kivételes élnek nevezzük e-t. Kivételes élekből vagy egy van, vagy egy sincs.

Most lássuk a kiterjesztés legegyszerűbb esetét:

Mohó eset: *Van olyan s szín, ami egyetlen preferált halmazban szerepel.* Ha $s \in P(e)$ ($e \in H$), akkor a korábbi színezés megtartása mellett e-nek az s színt adjuk. $H - e$ lesz a színezetlen élek új halmaza. Egy színezetlen f élre $L(f) = L(e) - \{s\}$. s egyedisége miatt megtarthatjuk a régi $P(e)$ halmazokat.

Sajnos ezt a mohó esetet nem használhatjuk mindig.

Nem mohó eset: *A preferált színek halmazaiban előforduló színek mindegyike több preferált halmazban is szerepel.* Azaz $s \in \bigcup\limits_{e \in H} P(e)$ esetén s legalább kettő $P(e)$-ben szerepel.

Először igazolunk egy lemmát a nem mohó esetről.

3. Lemma. *A nem mohó esetben van olyan σ szín, amit nem osztottunk ki O elemein, de a preferált színek között sincs ott. Azaz $\sigma \notin c(O) = \{c(e) : e \in O\}$ és $\sigma \notin \bigcup\limits_{e \in H} P(e)$.*

Lemma bizonyítása: Legyen $c(O)$ az F elemein eddig kiosztott színek halmaza, azaz az O-beli élek színeinek halmaza. O elemei összefutnak v_{i+1}-ben, azaz a színeik különbözőek, $|c(O)| = |O|$. A nem mohó esetben

$$|\bigcup_{e \in H} P(e)| \leq \frac{\sum\limits_{e \in H} |P(e)|}{2} \leq 2\frac{|H|}{2} = |H|.$$

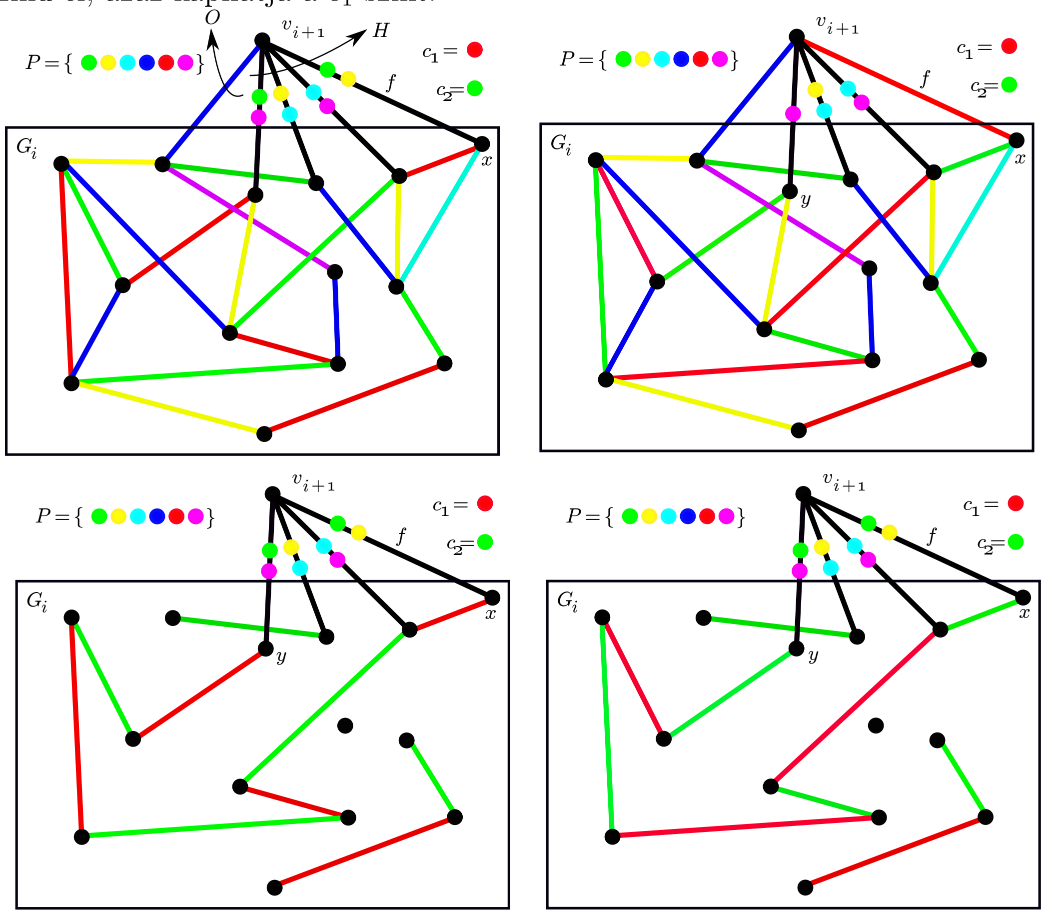
Azaz $c(O)$ és $\bigcup\limits_{e \in H} P(e)$ együtt is egy legfeljebb

$$|O| + |H| = |F| = d = d|_{G_{i+1}}(v_{i+1}) \leq \Delta(G)$$

elemű színhalmazt adnak. Azaz palettánknak garantáltan lesz szabad színe. Q.e.d.

Legyen c_1 egy a lemma által garantált szín. Legyen c_2 az a szín, amelyre $\{c_2\}$ a kivételes él preferált színhalmaza, illetve tetszőles szín egy preferált halmazból, amennyiben nincs kivételes él. Legyen $f = xv_{i+1}$ az az él, amely a kivételes él, vagy amennyiben ilyen nincs, egy olyan él amely preferált színhalmazában szerepel c_2. Mindenképpen $c_2 \in P(f)$.

G_{i+1}-ből emeljük ki a c_1 és c_2 színű éleket és vegyük az így kapott feszítő részgráfban az x csúcs komponensét, ami szükségszerűen út: U az x csúcsból kiindul U mentén végezzük el a szokásos c_1/c_2 színcserét. Ezzel elérjük, hogy f-re már nem illeszkedik c_1 színű él, azaz kaphatja a c_1 színt.

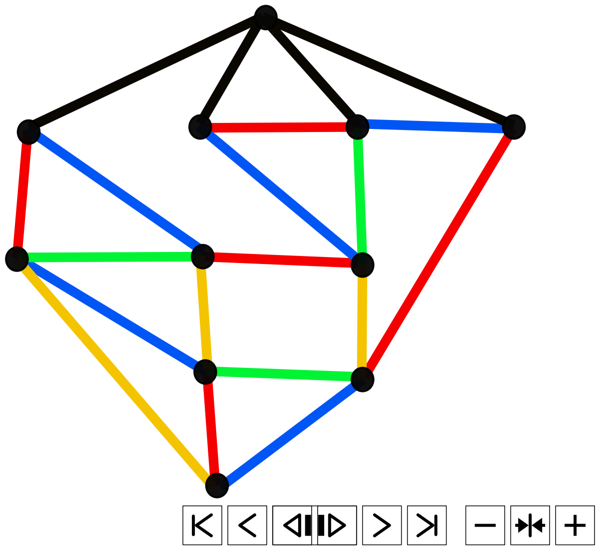


Az $L(e)$ halmazokat is újra kell értékelni: Azon éleknek, amelyek nem az U út valamelyik csúcsába vezetnek a lehetséges színhalmaza nem változik. Azon éleknek, amelyek az U út köztes csúcsába vezetnek szintén nem változik a lehetséges színhalmazuk!

Baj akkor van, ha v_{i+1}-ből vezet egy g él y-ba $(y \neq x)$. g nem volt kivételes él, tehát ha $P(g) \leftarrow P(g) - \{c_2\}$ változtatást hajtjuk végre, akkor $P(g)$ egyeleművé változik vagy kételemű marad. A $(\star)$ tulajdonság mindenképpen megmarad!

Megjegyzés. A bizonyításból egy algoritmus is kiolvasható, ami egyszerű gráfokat a Vizing-korlát méretű palettával jól-élszínez.

Példa. A megjegyzésben említett algoritmusra egy animációval is rávilágítunk. Az alábbi példa a Vizing-tétel bizonyításán alapuló algoritmus egy fázisára mutat példát:



3. További tételek

Megemlítjük, hogy a BSc-ben tanult Kőnig-tétel egy egyszerű következménye a következő tétel.

4. Tétel. *Ha G egy páros gráf, akkor*

$$\chi_e(G) = \Delta(G).$$

A fentiek alapján úgy tűnhet, hogy egyszerű gráfok élszínezése egy egyszerűbb feladat mint a csúcsszínezési probléma. A látszat csal. A következő tétel erre világít rá azon hallgatók számára, akik bonyolultságelmélet kurzust is teljesítettek.

5. Tétel. *Vizsgáljuk az alábbi döntési problémát: Adott G egyszerű gráfról döntsük el, hogy $\chi_e(G)$ értéke $\Delta(G)$ vagy $\Delta(G)+1$. Ez a probléma $\mathcal{NP}$-nehéz.*