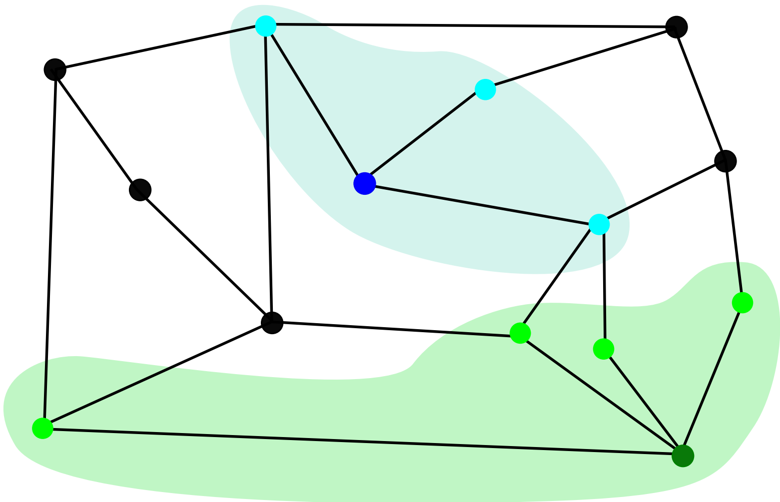
Gráfok derékbősége és kromatikus szám

2013. Előadó: Hajnal Péter

1. A kromatikus szám és a derékbőség paraméter

1. Tétel (BSc). *Létezik olyan $\{G_n\}$ gráfsorozat, melyre teljesül, hogy $\omega(G_n) = 2$ (azaz G háromszögmentes), illetve $\chi(G_n) \to \infty$, ha $n \to \infty$.*



Vegyünk egy olyan gráfot, amelyben nincs háromszög. Tegyük fel, hogy ennek a gráfnak egy pontjában állunk. Ez a pont a szomszédaival együtt egy csillagot feszít ki, ami az eredeti gráf részgráfja. Egy ilyen helyzet látható a fenti ábrán. Ezen lokális részeket látva semmilyen nehézséget nem érzékelünk a színezési problémaval kapcsolatban. A gráf globális színezéséhez szükséges színszám tetszőlegesen nagy lehet. Ez rávilágít a probléma nehézségére. A nehézség formálisan is igazolható: ez az egyik alap $\mathcal{N}P$-teljes probléma (szerepel Richard Karp 1972-ben összegyűjtött 21 $\mathcal{NP}$-teljes problémája között).

Definíció. Tetszőleges G gráf esetén rögzítsünk egy $o \in V(G)$ csúcsot, és tetszőleges $r \in \mathbb{N}^+$ esetén definiáljuk a következő részgráfot:

$$B(o,r) = G\,|_{\{v\in V: d(o,v)\leq r\}},$$

ahol $d(o,v)$ a legrövidebb ov út hosszát jelöli.

Az, hogy minden $B(o,1)$ csillag az azzal ekvivalens gráfunkban nincs háromszög.

Erősíthetjük a lokális feltételünket azzal, hogy nagyobb sugár esetén követeljük meg, hogy minden gömb egyszerű legyen.

Hasonlóan $B(o,r)$-re tett egyszerűségi feltételek megfogalmazhatók globálisan: Az hogy minden o csúcsra $B(o,r)$ páros az azzal ekvivalens, hogy G-ben nem létezik $2r+1$ hosszú, vagy rövidebb páratlan kör. Az, hogy minden o csúcsra $B(o,r)$ fa (körmentes, hisz a gömbök öszefüggősége nyilvánvaló) az azzal ekvivalens, hogy G-ben nem létezik $2r+1$ hosszú, vagy rövidebb kör.

Definíció. A G gráf derékbőségének (girth) nevezzük a következő gráfparamétert

$$g(G) = \min\{l : G\text{-ben létezik } l \text{ hosszú kör}\}.$$

A következőkben arra keressük a választ, hogy, ha adott egy γ és egy τ pozitív egész szám, akkor létezik-e olyan G gráf, melyre $g(G) \geq \gamma$ és $\chi(G) \geq \tau$. Azaz az erősített lokális egyszerűség mellett is elképzelhető-e globálisan színezésre bonyolult gráf. A válasz igen.

2. Tétel (Erdős Pál). *Bármely $\gamma, \tau \in \mathbb{N}^+$ számokhoz létezik olyan G gráf, amelyre $g(G) \geq \gamma$ és $\chi(G) \geq \tau$.*

Nem konstruktív bizonyítást adunk a tételre. (Konstruktív bizonyítások is léteznek, de azok nehezebbek.) A következőkben egy valószínűségszámítási módszeren alapuló bizonyítást mutatunk meg.

Bizonyítás. Legyen V egy n elemű csúcshalmaz. **Most csak annyit kell tudnunk n-ről, hogy elég nagy.** A továbbiakban is fogunk ilyen előre kijelentett „ígéreteket" tenni, és ezeket vastag betűtípussal fogjuk jelölni. Majd a bizonyítás végén megmutatjuk, hogy ezek az ígéretek valóban teljesülhetnek/kielégíthetők. Bármely V-beli pontpárra behúzzuk a közöttük lévő élt p valószínűséggel (azaz az össze nem kötöttség valószínűsége $1-p$). **A p értékét később adjuk meg n függvényében.** Persze ezzel azt is ígérjük, hogy $0 < p < 1$. Ezzel a módszerrel felépítünk egy gráf értékű valószínűségi változót. Ez az Erdős—Rényi-féle véletlengráf modell, jelölése $\underline{G}_{n,p}$.

Jelölje $\mathcal{A}_t$ azt az eseményt, hogy $\alpha(G) \leq t$. Ez ekvivalens azzal, hogy G-ben nincs $t+1$ elemű független ponthalmaz. Jelölje $\mathcal{F}_R$ pedig azt az eseményt, hogy R független ponthalmaz G-ben. Ekkor

$$\mathbb{P}(\mathcal{F}_R) = (1-p)^{\binom{|R|}{2}}.$$

Érvényes továbbá az alábbi összefüggés:

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}_t) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{\substack{R\subseteq V\\|R|=t+1}} \mathcal{F}_R\right).$$

Valóban, korábbi megjegyzéseink alapján $\mathcal{A}_t$ az $\cup_{R\subseteq V,|R|=t+1}\mathcal{F}_R$ esemény komplementere. Felhasználva azt a triviális mértékelméleti tényt, hogy $\mathbb{P}(\cup_{i=1}^n E_i) \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(E_i)$ azt kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}_t) \geq 1 - \binom{n}{t+1}(1-p)^{\binom{t+1}{2}}.$$

Felhasználtuk azt is, hogy $\binom{n}{t+1}$ tag unióját kell nézni, illetve az unió által leírt esemény valószínűségét egy olyan öszeggel becsülhetjük, amelyben minden $\mathbb{P}(\mathcal{F}_R)$ tag értéke közös: $(1-p)^{\binom{t+1}{2}}$.

A becslést egyszerűsíthetjük a $\binom{n}{t+1} < n^{t+1}$ durva és az $1-p < e^{-p}$ nem annyira durva becslésekkel (p pozitív és közel lesz 1-hez)

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}_t) \geq 1 - n^{t+1}e^{-p\binom{t+1}{2}} = 1 - n^{t+1}e^{-p\frac{t(t+1)}{2}} = 1 - \left[ne^{-\frac{pt}{2}}\right]^{t+1} = 1 - \left[e^{\log n - \frac{pt}{2}}\right]^{t+1}.$$

A t paramétert a következőkben úgy választjuk majd meg, hogy az egyenlet jobb oldala nagyobb legyen mint $\frac{1}{2}$. Legyen $t = 4\log n/p$. Mivel n tetszőleges nagyra választható ezért az alsó becslésre mint $1 - o(1)$-re gondolhatunk. Az, hogy nagy valószínűséggel az α paraméter kicsi az azt is jelenti, hogy a kromatikus szám nagy.

Áttérünk egy új gondolatmenetre, amely a derékbőség nagyságának garantálásához vezet. Jelöljük ξ_γ-val azt a valószínűségi változót, amely megadja a γ-nál nemhosszabb körök számát G-ben. Keressük ennek a várható értékét. Ehhez vezessük be a

$$\xi_C = \begin{cases} 1, & \text{ha } C \subseteq G_{n,p} \\ 0, & \text{különben} \end{cases}.$$

valószínűségi változót, ahol C egy lehetséges kör. Ekkor

$$\mathbb{E}(\xi_\gamma) = \mathbb{E}\left(\sum_{C \text{hossza} \leq \gamma} \xi_C\right) = \sum_{l=3}^{\gamma}\left(\sum_{C \text{hossza} = l} \mathbb{E}(\xi_C)\right). \tag{1}$$

Ha a C hossza ℓ, akkor $\mathbb{E}(\xi_C) = p^\ell$. Hány darab lehetséges ℓ hosszú kör van? A válasz $\binom{n}{\ell}\frac{(\ell-1)!}{2}$, ugyanis a csúcsokat $\binom{n}{l}$-féleképpen választhatjuk ki, és ezeket a kiválasztott l pontokat $\frac{(l-1)!}{2}$-féleképpen rendezhetjük körbe. Felhasználva az

$$\binom{n}{l}\frac{(l-1)!}{2} = \frac{n(n-1)\ldots(n-l+1)}{2l} \leq \frac{n^l}{2l} \leq \frac{n^l}{6}$$

egyenlőtlenséget, felírhatunk $\mathbb{E}(\xi_\gamma)$-ra egy felső becslést:

$$\mathbb{E}(\xi_\gamma) \leq \sum_{l=3}^{\gamma}\frac{n^l}{6}p^l = \sum_{l=3}^{\gamma}\frac{n^l p^l}{6} \overset{(!)}{\leq} \sum_{l=3}^{\gamma}\frac{(np)^\gamma}{6} \leq \gamma\frac{(np)^\gamma}{6}.$$

A becslésnél feltettük, hogy $np \geq 1$ **(az** 1**-nél nagyobb kvóciensű geometriai sorozat monoton nő, elemei az utolsóval felül becsülhetők). Továbbá** p**-t úgy fogjuk megválasztani, hogy** $\gamma(np)^\gamma/6 < n/4$ **teljesüljön. Pontosabban legyen** $p = n^\omega/n$**, ahol** $0 < \omega < 1/\gamma$**. Így** $\gamma(np)^\gamma/6 = o(n)$**.** A fenti választások után a Markov-egyenlőtlenségből adódik, hogy

$$\mathbb{P}\left(\xi_\gamma < \frac{n}{2}\right) > \frac{1}{2}.$$

Ezek után felírhatjuk a $\mathbb{P}\left(\mathcal{A}_t \wedge \left(\xi_\gamma < \frac{n}{2}\right)\right) > 0$ megállapítást, mivel a $\wedge$ két oldalán álló események valószínűsége külön-külön legalább $\frac{1}{2}$.

Ebből következik, hogy létezik olyan G gráf, amelynek n csúcsa van, és amelyre teljesül a következő két állítás:

- A G-ben lévő γ-nál nem hosszabb körök száma $\frac{n}{2}$-nél kevesebb.
- $\alpha(G) \leq t = 4\log n/p = 4(\log n)n^{1-\omega}$.

Vegyük ezt a G gráfot, és minden γ-nál nem hosszabb körből hagyjunk el egy-egy pontot, jelölje az így kapott gráfot G_0. Ekkor G_0-ban nincs legfeljebb γ hosszúságú kör ($g(G_0) \geq \gamma$), csúcsszáma legalább $\frac{n}{2}$, azaz $|V(G_0)| \geq \frac{n}{2}$, és $\alpha(G_0) \leq t$. Továbbá igaz a

$$\chi(G_0) \geq \frac{n/2}{t} = \frac{n}{2t} = n^\omega/8\log n \geq \tau$$

becslés is (n-et elég nagynak választottuk). ■