Gráfelmélet/Diszkrét Matematika MSc hallgatók számára

Folyamok

2013. Előadó: Hajnal Péter

1. Folyamok elméletének alapfogalmai

Legyen $\vec{G}$ irányított gráf, $s, t \in V(G)$ két kijelölt csúcs és $c : E(G) \to \mathbb{R}^+$ függvény. Ekkor $(\vec{G}, s, t, c)$ négyesét *hálózatnak* nevezzük, ahol s pontot *forrásnak*, t pontot *nyelőnek*, c-t pedig *kapacitásfüggvénynek* nevezzük.

Megjegyzés. Hálózatok sok gyakorlati probléma absztrakciójához hasznosak. Például egy város vízvezetékhálózata írható így le, ahol a kapacitásfüggvény a csövek terhelhetőségét (például átmérő) adja meg. Egy úthálózat is modellezhető így. Egy él kapacitása az áteresztő képessége, a megfelelő útszakasz szélességével, sávjainak számával arányos.

A fenti fogalom egy statikus fogalom. Olyan mint egy programozó számára a hardwer. Az alkalmazott matematiukus/programozó számára a hálózat adott/felmért és az alkalmazás inputja. A dinamika leírásához új fogalom kell.

Definíció. Az $f : E(G) \to \mathbb{R}$ függvényt *folyamnak* nevezzük a H hálózatban, ha

(F1) minden e él esetén $0 \leq f(e) \leq c(e)$

(F2) minden $v \in V \setminus \{s, t\}$ esetén $\sum_{e:e\in E_{be}(v)} f(e) = \sum_{e:e\in E_{ki}(v)} f(e)$, ahol $E_{be}(x)$ az x-be befutó élek halmaza, $E_{ki}(x)$ az x pontból kifutó élek halmaza.

Az első feltételt megengedettségnek nevezzük. f tehát megengedett, ha a csöveken nem folyik át a kapacitásnál nagyobb, illetve negatív mennyiség. A második feltételben szereplő egyenlőségek vezérlő elvét *megmaradási törvénynek* nevezzük. Ezek természetes fizikai feltételek.

Ahhoz, hogy könnyebben elképzeljük a folyamokkal kapcsolatos fogalmakat, nézzünk egy másik alkalmazást. A hálózat legyen egy város úthálózata. A forrás lehet egy lakótelepet, lakóparkot reprezentáló csúcs. A belvárost reprezentálja a nyelő. A folyam a reggeli forgalom: a belvárosba szeretnének eljutni autóval az emberek. Minden élen a folyam megadja az ott folyó forgalmat.

Példa. Az $f \equiv 0$ folyam egy tetszőleges hálózatban. Ekkor minden élen 0 anyagmennyiség fut.

Speciálisan minden hálózatban megadható folyam. Hogy ezek a folyamok összevethetők legyenes szükségünk van egy újabb fogalomra.

Definíció. Egy folyam értéke $é(f) = \sum_{e \in E_{be}(t)} f(e) - \sum_{e \in E_{ki}(t)} f(e)$ (t a nyelő).

Az f folyam értéke negatív is lehet, ilyenkor visszafele folyik a víz a csőhálózatban. Az üres folyam értéke 0.

Folyam probléma: Adott egy hálózat. Keressünk hozzá egy maximális értékű folyamot.

A maximális jelző első olvasatban problémás. Egy folytonos problémával állunk szemben, amikor nem szüségszerű a legnagyobb érték fevétele. Egy folyam egy m élű hálózatban m valós szám leírásával adható meg, azaz azonosítható $\mathbb{R}^E \equiv \mathbb{R}^m$ egy pontjával. A folyamoknak megfelelő pontok $\mathbb{R}^m$ egy kompakt halmaza, amelyen az érték egy folytonos függvény. Ez a folytonos függvény felveszi maximumát $\mathbb{R}^{|E(G)|}$ egy kompakt részhalmazán.

Megjegyzés. Tulajdonképpen a folyam probléma a lineáris programozás feladat egy speciális esete: a maximalizálandó $é(f)$ függvény lineáris, valamint a folyamok halmaza lineáris egyenlőségekkel és egyenlőtlenségekkel van definiálva.

Az, hogy az érték nem lehet tetszőleges nagy az elemi módon is könnyen látszik. Tetszőleges f folyam esetén

$$é(f) = \sum_{e \in E_{be}(t)} f(e) - \sum_{e \in E_{ki}(t)} f(e) \leq \sum_{e \in E_{be}(t)} c(e).$$

Azaz $é(f)$ a hálózat egy paraméterével becsülhető.

Vizsgálatunkat egy fontos észrevétellel kezdjük. Bevezetjük a vágás fogalmát. Ez lehetőséget ad a folyam értékének alternatív leírására és ez alapján a legnagyobb folyamértékére alternatív felső becsléseket kapunk.

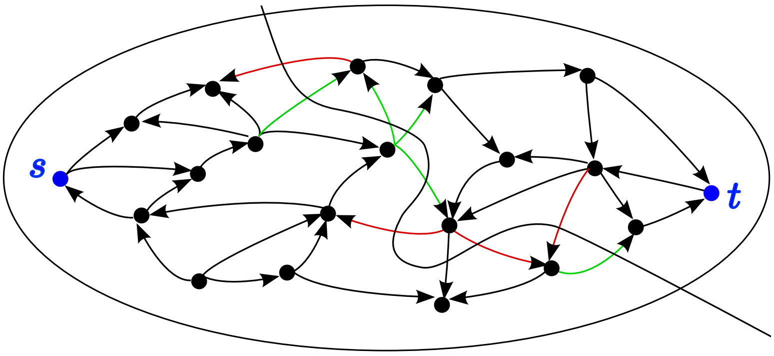
Definíció. Legyen $\overrightarrow{G}$ egy irányított gráf. Egy $\mathcal{V} = \{S, T\}$ vágás $\overrightarrow{G}$-ben a ponthalmaz egy kétosztályú partíciója. S és T a vágás két osztálya vagy partja. $\mathcal{V}$ egy **s-t vágás**, ha $s \in S$, és $t \in T$.

Jelölés. $E(\mathcal{V})$ a $\mathcal{V}$ vágás élhalmaza, azon élek halmaza, amelyek két végpontja a vágás két különböző oldalára esik.

Irányított gráfban $E(\mathcal{V})$ természetes módon két osztályba sorolható aszerint, hogy a vágás egy élének kezdőpontja a forrás vagy a nyelő oldalán van.

$$E^+(\mathcal{V}) = \overrightarrow{E}(\mathcal{V}) = \{e = \overrightarrow{xy} : x \in S, y \in T\},$$

$$E^-(\mathcal{V}) = \overleftarrow{E}(\mathcal{V}) = \{e = \overrightarrow{xy} : x \in T, y \in S\}.$$



1. Lemma. *Legyen f egy tetszőleges folyam.*

(i) $é(f) = \sum_{e:e\in E_{ki}(s)} f(e) - \sum_{e:e\in E_{be}} f(e)$

(ii) *Tetszőleges $\mathcal{V} = \{S, T\}$ s-t vágásra:*

$$é(f) = \sum_{e:e\in\overrightarrow{E}(\mathcal{V})} f(e) - \sum_{e:e\in\overleftarrow{E}(\mathcal{V})} f(e).$$

Tehát egy megfelelő $\mathcal{V}$ vágás alapján ki lehet fejezni a folyam értékét: a forrás felől átfolyó anyagmennyiségből kivonva a nyelő irányából visszafolyó anyagmennyiséget megkapjuk $é(f)$-t.

Bizonyítás. (i) az (ii) pont speciális esete ($S = \{s\}, T = V(G) - \{s\}$), így elég (ii)-t igazolni.

T minden v csúcsára egy egyenlőséget írunk fel. A $v \in T\backslash\{t\}$ csúcsokra (azaz a nem forrásokra) felírjuk az anyagmegmaradás törvény rendezett formáját:

$$\sum_{e:e\in E_{be}(v)} f(e) - \sum_{e:e\in E_{ki}(v)} f(e) = 0.$$

A $v = t$ esetben a folyam értékének definícióját írjuk fel:

$$\sum_{e:e\in E_{be}(v)} f(e) - \sum_{e:e\in E_{ki}(v)} f(e) = é(f).$$

Ezután összegezzük az összes T-beli csúcsra felírt egyenlőséget. A jobb oldal pontosan $é(f)$ lesz. Egy él viszonya a vágáshoz négyféle lehet. Az S-beli élek nem szereplnek a felírt egyenlőségekben. A T-beli e élek kettőben szereplnek. Az egyikben befutó élként, hozzájárulása az öszeghez + előjellel/+1 súllyal $f(e)$. Egy másikban kifutó élként, hozzájárulása az öszeghez − előjellel/−1 súllyal $f(e)$. Az összegzésben $f(e)$ kiesik. A maradék élek ($\mathcal{V}$ élei) két kategóriába esnek:

1. A $E^+(\mathcal{V})$-beli e élek egytelen v csúcsra felírt egyenlóségben szereplnek és ott szerepük: befutó él. Az összeghez $+f(e)$ hozzájárulást ad.

2. A $E^-(\mathcal{V})$-beli e élek egytelen v csúcsra felírt egyenlóségben szereplnek és ott szerepük: kivezető él. Az összeghez $-f(e)$ hozzájárulást ad.

Így az összegzés után a bal oldalon a lemma állításában szereplő jobb oldali kifejezést kapjuk. Az állítás adódik. ■

Az alábbi becslést adhatjuk é(f)-re:

2. Következmény. *Legyen f tetszőleges folyam, $\mathcal{V}$ vágás. Ekkor*

$$é(f) \leq \sum_{e:e\in E(\mathcal{V})} c(e) =: c(\mathcal{V}),$$

$c(\mathcal{V})$-t a **vágás kapacitás***ának nevezzük.*

Az állítás bizonyítása egyszerű. A folyam érték $\mathcal{V}$-re alapuló felírásában az $f(e)$ tagok $c(e)$-vel, a $-f(e)$ tagok 0-val becsülhetők felül. A becslésünk tetszőleges folyamra és tetszőleges vágásra igaz. Legerősebb változata:

3. Következmény.

$$max_{f\ folyam} é(f) \leq min_{\mathcal{V}\ vágás} c(V),$$

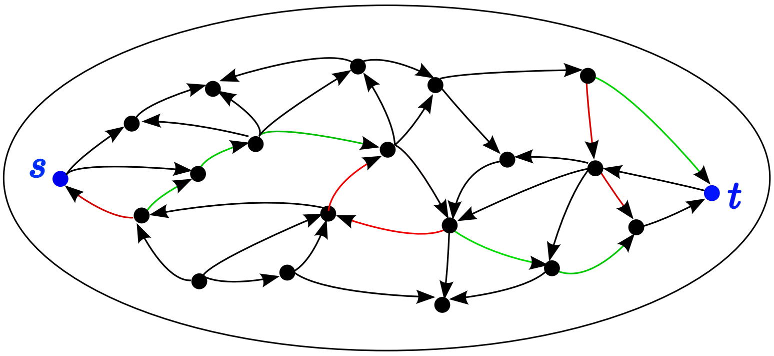
tehát a maximális folyam érték legfeljebb akkora mint a minimális vágáskapacitás.

Tudjuk, hogy véges sok vágás van egy n csúcsú gráfban, pontosan 2^{n-2} db. Azaz a jobb oldal egy véges halmazon vett optimalizálási probléma. Célunk, hogy belássuk, hogy felső becslés valójában egyenlő a maximális folyamértékkel. Ha f optimális/maximális értékű, akkor alkalmas vágással E^+-beli élek kapacitásig kihasználtak, míg az E^--beli éleken nincs visszafolyás.

Definíció. Legyen $H(\overrightarrow{G}, s, t, c)$ hálózat, ebben pedig egy f folyam. Legyen P egy irányítatlan értelemben vett út $\overrightarrow{G}$-ben. (Azaz hagyjuk el a $\overrightarrow{G}$ gráf irányítását (így kapjuk a G irányítatlan gráfot. P egy út ebben.) P éleit két kategóriába sorolhatjuk ($\overrightarrow{G}$-beli irányításának megfelelően: vagy előrehaladó él (azaz a P-t leíró pont-él-pont-él... sorozatban kiinduló végpontja előbb van) vagy hátramutató él. Ezen élek halmazai $E^{\text{előre}}(P)$ és $E^{\text{hátra}}(P)$. Így $E(P) = E^{\text{előre}}(P) \bigcup E^{\text{hátra}}(P)$. Ekkor **P javítóút** ($f$ folyamra, $H(\overrightarrow{G}, s, t, c)$ hálózatban), ha

(J1) P egy s-t út G-ban, (speciálisan $E(P) = E^{\text{előre}}(P) \bigcup E^{\text{hátra}}(P)$),

(J2) $e \in E^{\text{előre}}(P)$ esetén $f(e) < c(e)$, míg $e \in E^{\text{hátra}}(P)$ esetén $f(e) > 0$, azaz ha az előrehaladó éleken nem a folyam nem használja ki a csőszakasz által engedet maximumot (az él kapacitását) valamint visszafele (a hátramutató éleken) is történik bizonyos „visszafolyás”.



4. Lemma. *Legyen f egy folyam a $H(\overrightarrow{G}, s, t, c)$ hálózatban. Ekkor ha találunk egy P javító utat, akkor f folyam javítható, azaz nem maximális értékű.*

Bizonyítás. Legyen P egy javító út f-re. Legyen $min_{e\in E^{\text{előre}}(P)}(c(e) - f(e)) = \delta^{\text{előre}}$ (azaz, egy élhez tartozó szám azt mutatja meg, hogy legfeljebb mennyivel növelhető az anyagmennyiség ezen élen a kapacitás korlát megsértése nélkül), hasonlóan $\delta^{\text{hátra}} = min_{e\in E^{\text{hátra}}} f(e)$, valamint a minimumuk: $\delta = min\{\delta^{\text{hátra}}, \delta^{\text{előre}}\}$. Javító út esetén $\delta > 0$, azaz lehet még növelni az anyagáramlást. Legyen a **módosított folyam**

$$\widetilde{f}(e) = \begin{cases} f(e), & e \notin E(P), \\ f(e) + \delta, & e \in E^{\text{előre}}(P), \\ f(e) - \delta, & e \in E^{\text{hátra}}(P). \end{cases}$$

A következő észrevételek szolgálják a bizonyítás alapját:

(1) $\delta > 0$.

(2) $\widetilde{f}$ megengedett,

(3) $\widetilde{f}$ teljesíti a megmaradási törvényt minden nem-nyelő, nem-forrás csúcsban,

(4) $\text{é}(\widetilde{f}) = \text{é}(f) + \delta$.

(2) és (3) együtt igazolja, hogy $\widetilde{f}$ egy folyam. (1) és (4) együtt igazolja, hogy $\widetilde{f}$ értéke nagyobb mint f-é. ■

Azaz egy javító út felismerése egy módot ad folyamunk javítására. Vajon ez a módszer univerzális-e? Van-e ügyesebb módszer a folyamérték növelésére? Egy ilyen módszer javító út hiányában, egy más logika alapján adna nagyobb értékű folyamot.

2. A folyamok alaptétele és következményei

A következő tétel a korábban feltett kérdések megválaszolásához vezet.

5. Tétel. *Legyen f egy folyam a $H(\overrightarrow{G}, s, t, c)$ hálózatban. A következő állítások ekvivalensek:*

(i) f folyam értéke maximális

(ii) f-hez van olyan $\mathcal{V} = \{S, T\}$ vágás, hogy é$(f) = c(\mathcal{V})$,

(iii) f-hez nincs javító út.

Bizonyítás. $(i) \Rightarrow (iii)$: Az előző lemma szerint javító út léte bizonyítja, hogy folyamunk nem optimális. A fenti implikáció ugyanezt az állítást tartalmazza némi logikai átfogalmazással.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Tetszőleges $\mathcal{V}$ vágás kapacitása tetszőleges folyam értékét felülről becsüli. Ha egy felső becslés egyben folyam érték is, akkor ez a folyam értéke biztos maximális.

A tétel lényege a $(iii) \Rightarrow (ii)$ állítás. Ennek bizonyításához az alábbi fogalmat vezetjük be:

Definíció. P *javítóút-kezdemény* (egy H hálózatban lévő f folyamra), ha:

(J1$^-$ s-ből induló út G-ben,

(J2) tetszőleges $e \in E^{\text{előre}}(P)$ esetén $f(e) < c(e)$ és tetszőleges $e \in E^{\text{hátra}}(P)$ esetén $f(e) > 0$.

Azaz a javító útság feltételei közül csak azt dobjuk el, hogy az út a nyelőbe vezessen. Emiatt egy javítóút-kezdemény nem használható egy folyam növelésére. Ha a megfelelő lemma alapján a folyamunkat megváltoztatjuk, akkor az út x végpontjában a megmaradási törvény megsérül. A javítóút-kezdemény egy olyan út, aminél esélyt láthatunk hogy meghosszabbításával javító utat kapjunk.

Legyen $s \in S = \{x \in V : \text{található} sx \text{javítóút-kezdemény}\}$, $t \in T := V \backslash S = \overline{S}$. Megjegyezzük, ha $x \in S$, azaz x-be vezet javítóút-kezdemény, akkor ez az út végig S-ben vezet, hiszen A javítóút-kezdemény kezdőszeletei is javítóút-kezdemények.

(iii) miatt $t \notin S$. Az „s" út egy 0 hosszú út, ami nyilván javítóút-kezdemény, azaz $s \in S$ A fenti két halmaz egy $\mathcal{V} = \{S, T\}$ vágást határoz meg.

6. Állítás. *A $\mathcal{V} = \{S, T\}$ vágás bizonyítja (ii)-at, azaz é$(f) = c(\mathcal{V})$.*

Bizonyítás. Tudjuk, hogy a vágáson alapulva is felírhatjuk a folyam értékét:

$$\text{é}(f) = \sum_{e: e \in \overrightarrow{E}(\mathcal{V})} f(e) - \sum_{e: e \in \overleftarrow{E}(\mathcal{V})} f(e).$$

Legyen tetszőleges $\overrightarrow{xy} \in \overrightarrow{E}(\mathcal{V})$ él (azaz $x \in S$ és $y \in T$). Legyen P egy sx út (irányítatlan értelemben, ami $x \in S$-et bizonyítja (azaz javítóút-kezdemény). Ekkor

$\widetilde{P}: P + \overrightarrow{xy}, y$ egy sy út, ami nem lehet javítóút-kezdemény, hiszen $y \notin S$. A javítóút-kezdeménység egyetlen módon „romolhat el”: $f(\overrightarrow{xy}) = c(\overrightarrow{xy})$. Valóban $\overrightarrow{xy} \in E^{\text{előre}}(\widetilde{P})$ és $f(\overrightarrow{xy}) < c(\overrightarrow{xy})$ sérülése esetén csak $f(\overrightarrow{xy}) = c(\overrightarrow{xy})$ lehetőség marad egy folyamban.

Teljesen hasonló logika adja, hogy tetszőleges $\overrightarrow{xy} \in \overleftarrow{E}(\mathcal{V})$ él esetén $f(\overrightarrow{xy}) = 0$.

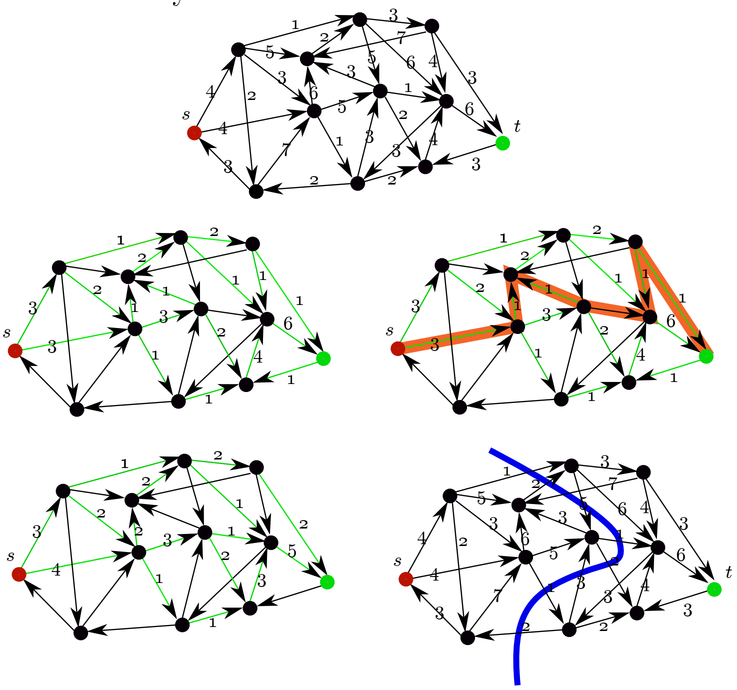
Így fent felírt, a folyam értéket adó kifejezést tovább írhatjuk:

$$\text{é}(f) = \sum_{e:e\in\overrightarrow{E}(\mathcal{V})} f(e) - \sum_{e:e\in\overleftarrow{E}(\mathcal{V})} f(e) = \sum_{e:e\in\overrightarrow{E}(\mathcal{V})} c(e) - \sum_{e:e\in\overleftarrow{E}(\mathcal{V})} 0 = c(\mathcal{V}).$$

Ahogy bizonyítani kellett. ■

Az állítás bizonyítása az alaptétel bizonyítását teljessé tette. ■

A 3. ábra a főtétel bizonyításához tartalmazza.



Egy hálózat, egy folyam, benne javító úttal, a javított folyam,
egy optimális folyam az ezt igazoló vágással.

7. Következmény (Maximális-folyam-minimális-vágás-tétel, Max-flow-min-cut-tetel, MFMC tétel).

$$max_{f\ folyam}\text{é}(f) = min_{\mathcal{V}\ vágás}c(\mathcal{V}).$$

Bizonyítás. Valóban. Már lattuk, hogy a bal oldal nem nagyobb mint a jobb oldal. Legyen F egy maximális értékű folyam. Az alaptétel szerint van hozzá (ii) pontban leírt tulajdonságú vágás. Ez éppen azt adja, hogy a jobb oldal sem nagyobb mint a bal oldal. ■

8. Következmény. *A következő algoritmus inputja egy hálózat. Az algoritmus leállásakor egy maximálsi értékű folyamot ad meg.*

Ford-Fulkerson algoritmus*:*
`Kiinduló lépés`*: Legyen $f \equiv 0$, azaz f az üres folyam.*
// A cél egy kiinduló folyam definiálása. Ha látunk egy nagyobb értékű folyamot,
// akkor kezdhetünk ezzel is.
`Keresés inicializálása`*: Legyen $S := \{s\}$.*
// S azon csúcsok halmaza, ahová javítóút-kezdeményeket találtunk.
`Javítóút-kezdemények növelése`*:*
// S növelése.
Legyen

$$B^{\text{előre}} = \{x \in V \backslash S : \text{van olyan } y \in S, \text{ hogy } \overrightarrow{yx} \in E \text{ és } f(\overrightarrow{yx}) < c(\overrightarrow{yx})\}$$

és

$$B^{\text{hátra}} = \{x \in V \backslash S : \text{van olyan } y \in S, \text{ hogy } \overrightarrow{xy} \in E \text{ és } f(\overrightarrow{xy}) < c(\overrightarrow{xy})\}.$$

Keressük meg $B^{\text{előre}} \cup B^{\text{hátra}}$ egy x elemét.
Ezután három esetet különböztetünk meg:

(i) `Bővítés:` *Ha $x \neq t$ akkor $S \leftarrow S \cup \{x\}$ és folyatssuk a* `Javítóút-kezdemények növelése` *lépéssel.*

(ii) `Javítás:` *Ha $x = t$ akkor „nyomozzuk vissza” hogyan jutottunk el ide. Az „ok” egy javító út lesz. Ez alapján javítsuk f-et: $f \leftarrow \widehat{f}$ (lásd a javító út definiáióját követő lemmát). Térjünk vissza a* `Keresés inicializálása` *lépésre.*

(ii) `Leállás:` *$B^{\text{előre}} \cup B^{\text{hátra}} = \emptyset$.*

// Ekkor $t \notin S$. S konkrét értéke megegyezik azon halmazzal, amit a főtétel

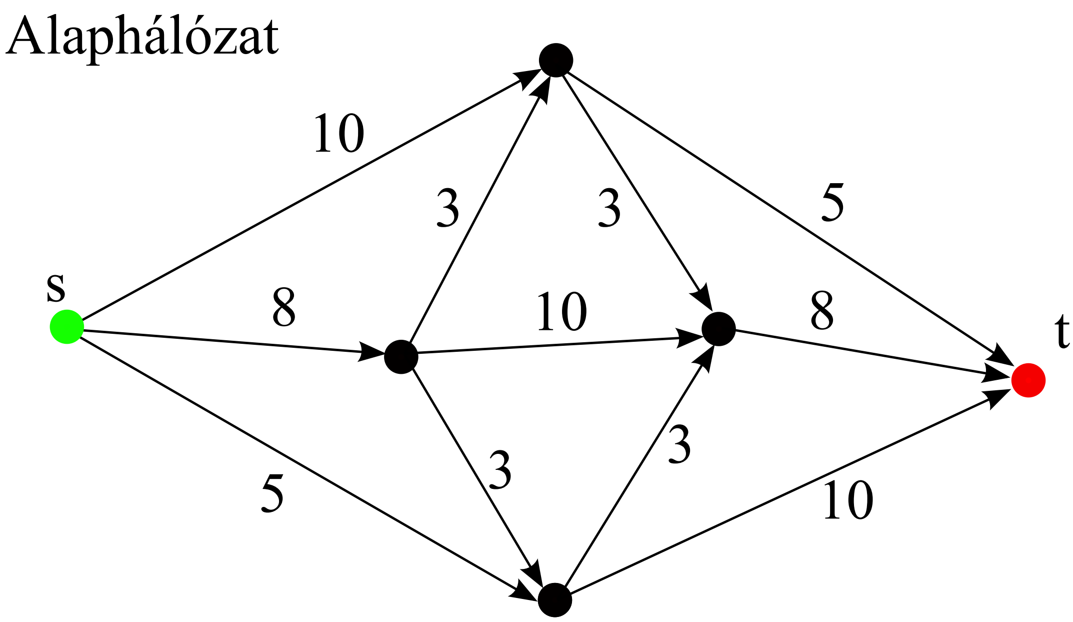
// (ii)$\Rightarrow$(i) bizonyításában szerepelt.

Ekkor STOP, az aktuális folyam értéke maximális.

A következmény igazolása nyilvánvaló a főtétel bizonyítása alapján: Leállás esetén az aktuális S halmaz egy $\mathcal{V} = (S, T)$ vágás ír le. Erre és az aktuális f-re $\text{é}(f) = c(\mathcal{V})$, azaz az output korrekt.

Megjegyzés. A fentiek alapján érdemes a Ford—Fulkerson-algorimtust úgy módosítani, hogy leálláskor a kiszámot $\mathcal{V}$ vágást is kiadja. Ez egy olyan vágás lesz, amely előremutató élein kapacitásnyi/maximális anyagmennyiség folyik, míg hátramutató élein nincs visszafolyás. Ez egy laikus számára is mutatja az output korrektségét, abban akkor is megbízhatunk, ha az algoritmus kódolása esetleg nem megbízható.

Példa. Animáció a Ford—Fulkerson-algoritmus bemutatására:



Az algoritmus javító utas növelésével próbálja elérni az optimális folyamot. A fenti következmény csak azt mondta, ha az algoritmus leáll, akkor outputja korrekt. Ciklizálhat-e az algoritmus? Azaz elképzelhető-e, hogy javítások végtelen sorozatát kapjuk, így sose érjük el az optimális folyamot. Ciklizálás esetén a kapott folyam-sorozat értéke monoton nő és a hálózat által korlátozott. Azaz az értékek sorozata konvergens. A ciklizálásnak két kimenetele lehet. Jobb esetben a kiszámolt folyamok értékei az optimális folyamértékhez konvergálnak. Elképzelhető-e, hogy az algoritmus ciklizál, de a folyamértékek sorozatának limesze nem a optimális folyam érték (hanem nyilván annál kisebb)?

A fenti kérdésekre többféle válasz is adható.

1. válasz: Valóságban a kapacitásfüggvény értékkészlete nem a pozitív valós számok halmaza, hanem $\mathbb{Q}^+$, azaza pozitív racionális számok halmaza. Ezek a kapacitás értékek (véges sok) skálázhatók úgy, hogy egészek legyenek (gondolhatunk arra, hogy alkalmas mértékegységváltást végzünk vagy a kapacitás értékeket leíró racionális számok közös nevezőjével minden beszorzunk).

Ha a kapacitások egészek és a kiinduló folyam is egészértékű (folyamot leíró függvény értékkészlete $\mathbb{N}$), akkor az algoritmus futása során végig csak egész számokkal dolgozik. Speciálisan $\delta > 0$ is egész lesz, azaz $\delta \geq 1$ (lásd a javítóút definícióját követő lemmát) Azaz a folyam minden javításánál a folyam értéke legalább 1-gyel nő, így nem lehet ciklizálás.

2. válasz: Elméletben elképzelhetjük, hogy pontos valós aritmetikával dolgozunk. A fenti algoritmus javítóút-kezdemények növelése olyan szabadon van megfogalmazva, hogy tetszőleges javítóút megtalálásához vezet. Azaz sok rövid javítóút létezése esetén is lehetséges, hogy a fenti nem-determinisztikus leírás egy hosszú javítóúthoz vezet Példák adhatók, hogy ekkor elképzelhető az, hogy a kiszámolt folyamok értékeinek

monoton növő korlátos sorozata nem az optimális folyamértékhez tart.
3. válasz: Módosítsuk a javítóút keresést a szélessségi keresés filozófiája szerint. Az így kapott algoritmus a Ford—Fulkerson-algoritmus Edmonds—Karp-változata. Ekkor csak a `Javítóút-kezdemények növelése` lépést változtatjuk meg az alábbiak szerint:

Határozzuk meg a $B = B^{\text{előre}} \cup B^{\text{hátra}}$ halmazt.
Ezután három esetet különböztetünk meg:

(i) `Bővítés:` Ha $t \notin B$ akkor $S \leftarrow S \cup B$ és folyatssuk a `Javítóút-kezdemények növelése` lépéssel.

// Ekkor az $S = S_{\text{új}}$ halmaz bővítésénél olyan x csúcsokat kell összegyűjteni,

// amelynél a hozzátartozó y csúcs a $B_{\text{régi}}$ halmazból kerül ki.

(ii) `Javítás:` Ha $x = t$, akkor az eredeti algoritmus alapján járunk el.

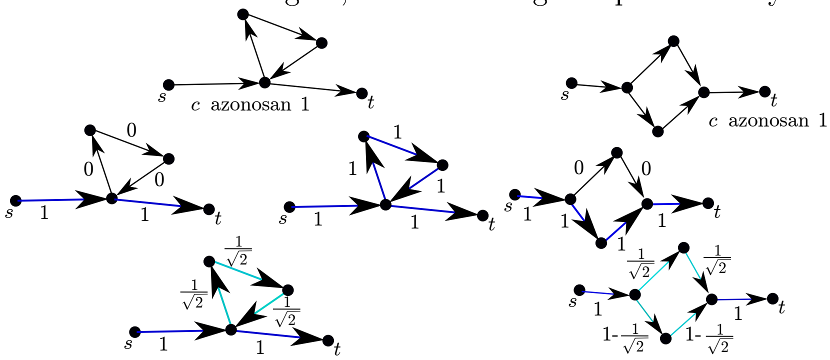
(ii) `Leállás:` Ha $B^{\text{előre}} \cup B^{\text{hátra}} = \emptyset$, akkor az eredeti algoritmus alapján járunk el.

Ez a változat garantálja, hogy a legrövidebb javító utat találjuk meg. Belátható, hogy az Edmonds—Karp-algoritmus (sőt a Ford—Fulkerson-algoritmus minden olyan változata, ami a legrövidebb javítóutakkal javít) olyan, hogy $\mathcal{O}(|V|^4)$ javítás után leáll, speciálisan nincs ciklizálás. Persze a fenti állítás jóval erősebb. A futási idő végessége helyett egy felső becslést ad rá, ami az input méretében polinomiális. A fenti változat egy úgynevezett polinomiális algoritmus. A polinomiális jelző (amit a fenti vázalatos leírás magyaráz meg) az „elméletileg hatékonynak tekintendő" elfogadott formalizálása.

A 1. válasz gondolatmenetéből kapjuk a következő következményt.

9. Következmény. *Legyen $(\overrightarrow{G}, s, t, c)$ hálózat, amelyben $c : E(\overrightarrow{G}) \to \mathbb{N}^+$. Ekkor létezik $f : E(\overrightarrow{G}) \to \mathbb{N}$ optimális folyam.*

Megjegyezzük, hogy nem állítjuk, sőt nem is igaz, hogy minden optimális folyam szükségszerűen olyan, hogy minden élen egész anyagmennyiség folyik. Az alábbi ábrán példák láthatók hálózatokra és egész, illetve nem egész optimális folyamokra.



3. 0-1 folyamok uniform hálózatokban

Definíció. Egy hálózatot uniformnak nevezzük, ha minden él kapacitása egyenlő. Feltesszük (feltehetjük), hogy a közös kapacitás 1.

Uniform hálózatokban vizsgáljuk az optimális folyamokat. Ha azzal a feltétellel élünk, hogy folyamunk minden élen egész értéket vegyen fel, akkor is elérhetjük a maximális folyamértéket. Feltételünk uniform hálózatban azt jelenti, hogy folyamunk $f : E(G) \to \{0, 1\}$ függvény. Az ilyen folyamokat 0-1 folyamnak nevezzük. Egy $f : E(G) \to \{0, 1\}$ 0-1 folyam azonosítható az $f^{-1}(1) = \{e \in E(\overrightarrow{G}) : f(e) = 1\} := F$ élhalmazzal. Azaz az f által leírt F élhalmazból visszafejthető a folyam. Ez az azonosítás ugyanaz mint az $E(\overrightarrow{G})$ részhalmazai és az $E(\overrightarrow{G})$-n értelmezett karakterisztikus függvények azonosítása.

Észrevétel. Legyen f egy k értékű 0-1 folyam.

A megmaradási törvény teljesülése azt jelenti, hogy minden v csúcsra — ami nem-forrás és nem-nyelő — ugyanannyi F él fut be, mint ki (v F-befoka egyenlő F-kifokával). Továbbá a nyelőbe k-val több él fut be mint ahány él kifut, a forrásból pedig k-val több él fut ki, mint ahány befut.

Az észrevételt egy formulában összefoglalhatjuk:

$$d^F_{be}(v) - d^F_{ki}(v) = \begin{cases} k, & v = t \\ -k, & v = s \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

10. Következmény. *Legyen f egy k értékű 0-1 folyam. Legyen F a megfelelő élhalmaz, tegyük fel, hogy F-ben ott van egy irányított kör C élhalmaza. Ekkor az $F - C$ élhalmaz is megfelel egy k értékű folyamnak.*

Bizonyítás. Valóban, az ellenőrizendők az élhalmaz be- és kifokaira vonatkozó feltételek. Az irányított kör éleinek elhagyása a kifok és befok különbségét nem változtatja. ■

11. Lemma. *Legyen f egy $k(\geq 0)$ értékű 0-1 folyam. Legyen F a megfelelő élhalmaz. Ekkor F tartalmazza k éldiszjunkt st út élhalmazát.*

Bizonyítás. $k = 0$ eset nyilvánvaló.

Feltehető, hogy $k > 1$, így $F \neq \emptyset$. F egy folyamot kódol, így észrevételünk alapján a csúcsok F-befokának és F-kifokának különbségeit ismerjük.

Legyen e egy forrásból kiinduló él F-ben (ilyennek lennie kell). Ekkor a fokszám feltételek miatt e-t előre kiterjeszthetjük egy P maximális úttá (kör nem alakulhat ki a bővítés során). Az elakadás csúcsa csak a nyelő lehet. Ezzel találtunk egy $P_1 = P$ st utat.

Ekkor $F - P$-re is teljesülnek a megmaradási törvényhez szükséges fokszám feltételek, azaz $F - P$ is egy folyamot kódol. Értéke $k - 1$. Indukcióval befejezhetjük a bizonyítást vagy leírhatunk egy rekurzív (mohó) eljárást ami megtalálja az állítást bizonyító k darab utat. ■

Ha a lemmabeli F irányított körmentes, akkor erősebbet is állíthatunk.

12. Lemma. *Legyen f egy $k(\geq 0)$ értékű 0-1 folyam. Legyen F a megfelelő élhalmaz. Tegyük fel, hogy F körmentes. Ekkor F k éldiszjunkt st út élhalmazának uniója.*

Bizonyítás. Ha a nyelőre illeszkedik befutó és kifutó él is, akkor ezen csatlakozó élpár előre/hátra folytatható. A folytatás szükségszerűen kört alakítani ki, ami ellentmond feltételünknek. Tehát a $k \geq 0$ értékű folyamot kódoló élhalmazban pontosan k él illeszkedik a forrásra és ezek kifutó élek. Hasonlóan pontosan k él illeszkedik a nyelőre és ezek befutó élek.

Az előző lemma alapján találhatunk k éldiszjunkt st út éthalmazt F-ben. Ha ezek kiadják a teljes F-et készen vagyunk. Ha nem, akkor lennie kell további éleknek. Ezek egyike sem illeszkedik a forrásra vagy nyelőre. Így egy további él előre/hátra folytatása szükségszerűen irányított körhöz vezetne, ami ellentmondás. ■

A teljesség kedvéert megemlítjük a következő tételt, ami az összes 0-1-folyam-élhalmaz esetén garantál egy felbontást/dekompozíciót éldiszjunkt körökre és utakra.

13. Tétel. *Legyen F egy élhalmaz G-ben. A következők ekvivalensek:*

(i) *F egy f folyamot ír le.*

(ii) *Minden nem nyelő és nem forrás csúcsra ugyanannyi F-él fut be, mint ahány kifut.*

(iii) *F felírható $\dot\cup_i P_i \dot\bigcup \dot\cup_i Q_i \dot\bigcup \dot\cup_i C_i$ alakban, ahol a P_i halmazok egy-egy forrás-nyelő irányított út élhalmazai, a Q_i halmazok egy-egy nyelő-forrás irányított út élhalmazai, a C_i halmazok egy-egy irányított kör élhalmazai. (A jelölésben ott van az a feltétel, hogy az unió tagjai DISZJUNKT élhalmazok.) Továbbá $\{P_i\}$ és $\{Q_i\}$ útrendszerek közül csak egy lehet nem üres.*

A tétel a korábbi ötletek segítségével egyszerűen bizonyítható. Sőt egy algoritmus is adható a felbontás megtalálására.

14. Algoritmus. *Mohó algoritmus egy F 0-1-folyam-élhalmaz dekompozíciójára.*
// F-befokok és F-kifokok különbségeit ismerjük.

Kör keresés: `Amíg` $F \neq \emptyset$
`Ha találunk, vegyük ki egy` C `irányított kör élhalmazát` F`-ből.`
`// A megtalált` C `egy lehetőség egy összetevőre.`
`// Mohó módon az output részévé tesszük.`
F`-et helyettesítsük` $F - C$`-vel és térjünk vissza kör keresésre.`
`// A körkeresésből kilépve az aktuális` F
`//irányított körmente,`

```
Út keresés: Vegyük ki egy P irányított forrás-nyelő
  vagy nyelő-forrás út élhalmazát.
    // A megtalált P egy lehetőség egy összetevőre.
    // Mohó módon az output részévé tesszük.
    // Ha st utat találunk a körmentesség miatt nem
    // lehet ts út és fordítva is.
  F-et helyettesítsük F − P-vel és térjünk vissza az út keresésre..
```

Az észrevételt egy kissé finomítjuk: Ha a fenti dekompozícióban $k > 0$ darab st-út szerepel, akkor a folyam értéke k. Ha $\ell > 0$ darab ts-út szerepel, akkor a megfelelő f folyam értéke $-\ell$. Speciálisan, ha f folyam értéke 0 (az ilyeneket cirkulációnak nevezik), akkor élhalmaza diszjunkt irányított körök uniója.

Külön megfogalmazzuk a számunkra fontos következményt.

Definíció. Egy F 0-1-folyam-élhalmaz *egyszerű*, ha körmentes és éldiszjunkt st utak vagy ts utak uniója.

15. Tétel. *Legyen* $(\overrightarrow{G}; s, t; c)$ *egy hálózat, amely kapacitásfüggvénye az azonosan* 1 *függvény. Ekkor van olyan* f *optimális folyam (értéke* k *szükségszerűen nem negatív), amely élhalmaza egyszerű.* f *értéke (a hálózatbeli maximális folyamérték)* k*, a dekompozícióban szereplő* st*-utak száma.*

4. Következmények

16. Tétel (Menger-tétele). $\overrightarrow{G}$ *egy irányított gráf* $s, t \in V$ *két* $(s \neq t)$ *kitüntetett csúccsal. Ekkor*

$$\max\{k : P_1, \ldots, P_k \text{ éldiszjunkt } st \text{ utak}\} =$$
$$= \min\{|L| : L \subseteq E(\overrightarrow{G}), \overrightarrow{G} - L\text{-ben nincs } \overrightarrow{st} \text{ út}\}.$$

Megjegyzés. A tételt a következő „mesével” világíthatjuk meg: Tegyük fel, s lakótelep, t belváros, a rendőrök tudják, hogy bünözők a lakótelepről a belvárosba tartanak. Utak lezárásával szeretnék ellenőrizni a belvárosba bemenő forgalmat (amely a kresz betartásával történik, azaz az útszakaszok irányítása szerint halad mindenki). A bizonyítandó állítás bal oldala a bünözők független terveinek maximális száma, míg a jobb oldal a rendőrök számára lezárandó útszakaszok minimális száma.

Bizonyítás. $\leq$: Egyszerű. A fenti mesén alapuló konkrét példa jól megvilágítja az állítást. Tegyük fel, hogy a bal oldal értéke 10. Azaz a bünözők 10 éldiszjunkt tervvel állhatnak elő. Minden útlezárás legfeljebb egy tervet akadályozhat meg (itt használjuk a tervek függetlenségét/éldiszjunktságát). Azaz a rendőrök számára legalább 10 út lezárása szükséges.

$\geq$: A feladat gráfjában minden él kapacitása legyen 1. Az így kapott H hálózatban az optimális folyamok közt lesz egy, amely egy egyszerű élhalmazzal azonosítható. Ha értéke k, akkor k éldiszjunkt st útra szétszedhető. Ez megfordítva is igaz. k éldiszjunkt st útból összerakható egy k értékű folyam. Azaz

$$\max\{k : P_1, \dots, P_k \text{ éldiszjunkt } st \text{ utak}\} = \max\{\text{é}(f) : F \text{ folyam } H\text{-ban}\}$$

A Menger-tételben szereplő élhalmazokat nevezzük szeparáló élhalmazoknak (elhagyásuk után nem lesz st út G-ben). Minden st-vágás $S \to T$ élei egy szeparáló halmazt adnak. Fordítva is igaz: Bármely L szeparáló élhalmaznak van olyan részhalmaza ami egy vágás élhalmaza: Például a

$$\mathcal{V} = (s\text{-ből } G - L\text{-ben elérhető csúcsok}, s\text{-ből } G - L\text{-ben nem elérhető csúcsok})$$

vágás $S \to T$ élei L egy részhalmazát adják. Azaz a minimális szeparáló halmazt megkapjuk, ha vesszük azt az st-vágást, amely S-T élei a legkevesebben vannak. Másrészt

$$\min_{V \text{ vágás}} c(\mathcal{V}) = \min_{V \text{ vágás}} |\{\overrightarrow{xy} : x \in S, y \in T\}|.$$

Összegezve

$$\min\{c(\mathcal{V}) : \mathcal{V} \text{ egy } st\text{-vágás}\} = \min\{|L| : L \subseteq E(\overrightarrow{G}), \overrightarrow{G} - L\text{-ben nincs } \overrightarrow{st} \text{ út}\}.$$

Az MFMC-tétel következménye a Menger-tétel. ■

A tételben az alapgráf irányítottsága nem lényeges.

17. Következmény (Menger tétele (irányítatlan gráfban élfüggetlen utakra vonatkozó változat)). *Legyen G egy irányítatlan gráf, és s, t két pont a gráfban. Ekkor*

$$\begin{aligned} &\max\{k : P_1, \dots, P_k \text{ éldiszjunkts } st \text{ utak}\} = \\ &\qquad = \min\{|L| : L \subset E(G), G - L\text{-ben nincs } st \text{ út}\}. \end{aligned}$$

Csak vázoljuk ennek egy lehetséges igazolását: Legyen $\overrightarrow{G}$ az a gráf, amelyet G-ből úgy kapunk, hogy minden $e = xy$ élét helyettesítjük két éllel: egy $\overrightarrow{xy}$ és egy $\overrightarrow{yx}$ éllel (azaz az e él oda-vissza irányított két példányával). Írjuk fel az MFMC-tételt.

A maximális folyamérték kombinatorikus leírásánal kell egy kissé óvatosnak lennünk. Vegyünk egy $f : E(\overrightarrow{G}) \to \{0, 1\}$ optimális folyamot és az ezt leíró F élhalmazt. Ez egyszerűvé tehető egy mohó algoritmussal. Ezt úgy alkalmazzuk, hogy az oda-vissza menő élpárokat (kettő hosszú irányított köröket) dobjuk el F-ből. Ha ezek elfogytak, akkor fejezzük be az egyszerűvé tételt. Legyen F_0 a kapott élhalmaz. (ebben minden eredeti élnak maximum egy példánya szerepel). F_0 éldiszjunkt $\overrightarrow{st}$-utak élhalmazainak uniója. Ezek G-ben megfelelnek st-utak élhalmazainak. Ezek előzetes előkészületeink miatt éldiszjunkt utak lesznek G-ben. (Az előkészületek nélkül ezt nem tudnánk.) Azaz a maximális folyamérték éppen a bizonyítandó egyenlőség bal oldala.

A további része a bizonyításnak teljesen analóg az irányított esettel.

Továbbá útrendszerünk éldiszjunktsága helyettesíthető az útrendszer belső ponthalmazainak páronkénti diszjunktságára vonatkozó feltétellel.

18. Következmény (Menger tétele (pontfüggetlen utakra vonatkozó változatok)).

(i) Legyen $\overrightarrow{G}$ egy irányított gráf, és legyen s, t két pont a gráfban. Tegyük fel, hogy nincs $\overrightarrow{st}$ irányított él, a gráfban. Ekkor

$$\max\{k : P_1, \ldots, P_k \textit{ pontfüggetlen } \overrightarrow{st} \textit{ út}\} =$$
$$= \min\{|U| : U \subseteq V(\overrightarrow{G}) \backslash \{s,t\} \textit{ és } G - U\textit{-ban nincs } \overrightarrow{st} \textit{ út}\}.$$

(ii) Legyen G egy irányítatlan gráf, és legyen s, t két pont a gráfban. Tegyük fel, hogy nincs st él a gráfban. Ekkor

$$\max\{k : P_1, \ldots, P_k \textit{ pontfüggetlen } st \textit{ út}\} =$$
$$= \min\{|U| : U \subseteq v(\overrightarrow{G}) \backslash \{s,t\} \textit{ elválasztja } s\textit{-et és } t\textit{-t}\}.$$

Ismét csak vázoljuk mi a teendő, ha ezen változatot szeretnénk a fentiek után igazolni.

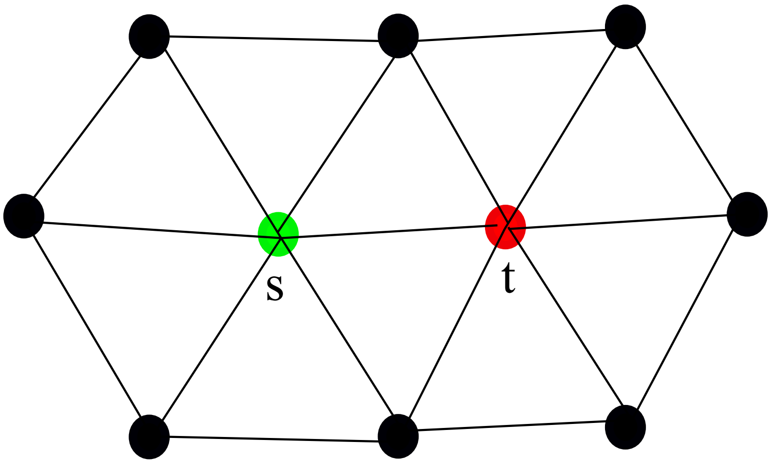
(i)-hez legyen $\overrightarrow{G}'$ az a gráf amely $\overrightarrow{G}$-ből nyerünk a következő módon: Legyen $V(\overrightarrow{G}') = \{s,t\} \cup \{x_{\text{be}}, x_{\text{ki}} : x \in V(\overrightarrow{G}) - \{s,t\}\}$. Minden $e = \overrightarrow{xy} \in E(\overrightarrow{G})$ élnek feleljen meg egy $e' = \overrightarrow{x_{\text{ki}}, y_{\text{be}}}$ él (legyen $s_{\text{ki}} = s_{\text{be}} = s$ és $t_{\text{ki}} = t_{\text{be}} = t$). $E(\overrightarrow{G}')$ élhalmazt alkossák ezek az élek és az $\{\overrightarrow{x_{\text{be}} x_{\text{ki}}} : x \in V(\overrightarrow{G}) - \{s,t\}\}$ élek.

Írjuk fel az MFMC-tételt $\overrightarrow{G}'$ gráfból uniform kapacitások definiálásával kapott hálózatra. A kapott két egyenlőség két oldaláról lássuk be, hogy a bizonyítandó egyenlőség egy-egy oldalával egyenlők.

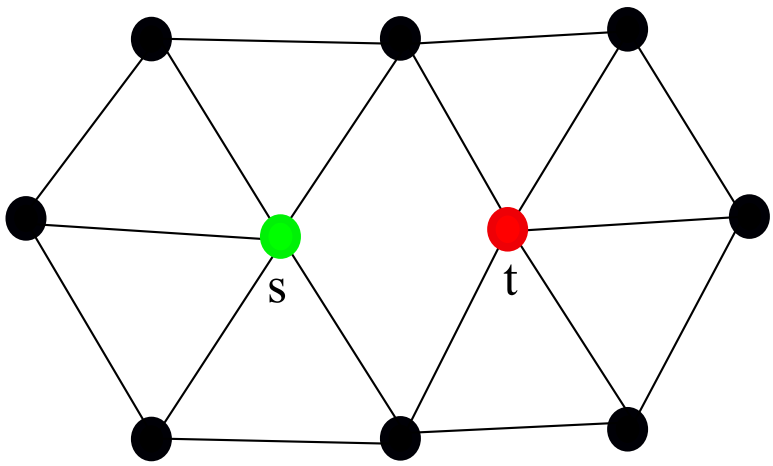
(ii)-hez korábbi ötleteinket kell összegezni. A részletek kidolgozását az érdeklődő hallgatókra bízzuk.

Példa. A folyam algoritmusok használhatók Menger tételeiben szereplő két optimalizálási probléma egyidejű megoldására. A következő animáció az irányítatlan éldiszjunkt utak esetét demonstrálja. Az ebben szereplő hálózatok mindegyik élének 1 kapacitása van.

Animáció Menger tétételének algoritmikus bemutatására:



Példa. A következő animáció az irányítatlan pontfüggetlen utak esetét demonstrálja. Az ebben szereplő hálózatok mindegyik élének 1 kapacitása van.



⋆

A Bsc-ben látott Kőnig-tétel is belátható a folyamok elméletének segítségével, illetve Menger tételenek alkalmazásával.

Emlékeztető. Ha egy gráf csúcshalmaz $A\dot{\cup}F$ (alsó és felső pontok) és minden él egyik vége A-beli, másik F-beli, akkor gráfunk páros gráf.

Egy gráf esetén

$$\nu(G) = \max\{|M| : \ M \text{ párosítás } G\text{-ben}\},$$

$$\tau(G) = \max\{|L| : \ L \text{ lefogó } G\text{-ben}\},$$

ahol $M \subset E(G)$ párosítás, ha az M-beli élek végpontjai egy $2|M|$ elemű halmazt alkotnak (és így állítanak párba), továbbá $L \subset V(G)$ lefogó ponthalmaz, ha minden élnek legalább az egyik végpontja L-beli. Általában $\nu(G) \leq \mu(G)$, vannak példák, ahol szigorú egyenlőtlenség teljesül.

19. Tétel (Kőnig-tétel). *Legyen G egy páros gráf. Ekkor*

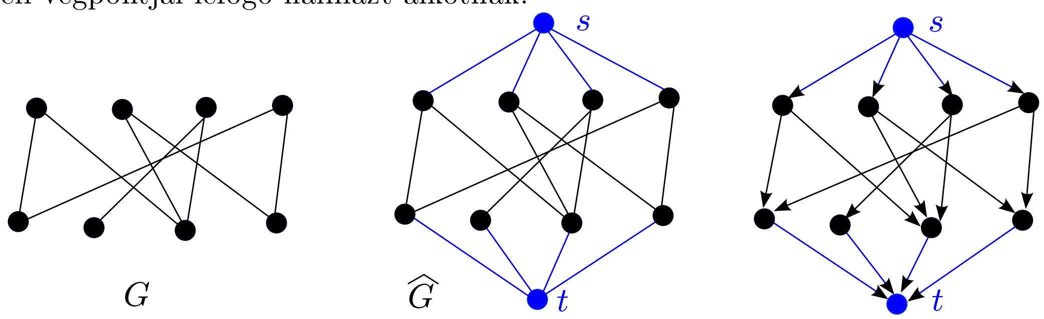
$$\nu(G) = \tau(G).$$

Bizonyítás. F „fölé” helyezzünk egy s csúcsot és pontosan F elemeivel kössük össze. A „alá” helyezzünk egy t csúcsot és pontosan A elemeivel kössük össze. G csúcsai és élei a fenti leírt kiterjesztéssel alkossák a $\widehat{G}$ gráfot.

Ezen gráf minden élét irányítsuk lefelé. Minden élnek legyen 1 kapacitása. Az így kapott uniform hálózatban az egyszerű folyamok megfelelnek egy M párosítás elemeinek (k független élnek) st úttá való kiterjesztésével kapott $\widehat{M}$ úthalmaznak. Az utak számának maximuma

$$\max\{\text{é}(f) : \ f \text{ folyam}\} = \nu(G).$$

A szeparáló élhalmazok esetén G-beli élhalmazt nem érdemes beválasztani (egyetlen „folytató” éle elvégzi ugyanazt a munkát). Ha pedig csak s-re vagy t-re illeszkedő élekkel dolgozunk, akkor ez az élhalmaz pontosan akkor választja el s-et és t-t, ha G-beli végpontjai lefogó halmazt alkotnak.



Összefoglalva

$$\min\{|S| : \ S \text{ szeparáló élhalmaz}\} = \tau(G).$$

Az MFMC tétel adja a bizonyítandót. ■

A fenti bizonyítás az MFMC alapján dolgozik. Menger tételei után jóval egyszerűbb, ha a $\widehat{G}$ gráfban hivatkozunk Menger tételének irányítatlan, pontfüggetlen változatára.

5. Gráfok magasabb fokú összefüggése

Definíció. Legyen k egy pozitív egész. G gráf *k-szorosan élösszefüggő* ($k$élöf), ha tetszőleges k-nál kisebb elemmszámú élhalmazát elhagyva a kapott gráf összefüggő lesz. Formulával

$$\forall F \subseteq E(G) : |F| < k \Rightarrow G - F \ \text{ összefüggő.}$$

A feltételnek teljesülni kell $F = \emptyset$ esetén is, azaz alapgráfunk összefüggő. Az összefüggőségnek meg kell maradnia, ha valódi élelhagyás történik.

Definíció. Egy G gráf *k-szorosan (pont)összefüggő* ($k$öf.), ha tetszőleges k-nál kisebb elemszámú csúcshalmazát elhagyva a kapott gráf összefüggő és $|V(S)| > k$. Formálisan

$$\forall U \subseteq V(G) \quad |U| < k \Rightarrow G - U \ \text{ összefüggő..}$$

A pontszámra adott technikai feltétel szerepe, hogy a gráf elegendően nagy legyen: a csúcsok elhagyása után is legalább két pont maradjon.

Példa. A fák nem kétszeresen élösszefüggőek, ha van élük. A körök kétszeresen élösszefüggőek, és így kétszeresen összefüggőek is, de nem háromszorosan összefüggőek. A $k+1$ ponttú gráfok közül csak a teljes gráf k-összefüggő.

Megjegyzés. A következő diagram a különböző összefüggőségi fogalmak viszonyait foglalja össze. Azon gráfosztályok között, amelyek tartalmazása nem vezethető le a diagramból nincs is tartalmazás.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1\text{öf} & \Leftarrow & 2\text{öf} & \Leftarrow & 3\text{öf} & \Leftarrow & \dots & \Leftarrow & k\text{öf} & \Leftarrow \\
\Updownarrow & & & & & & & & & \\
\text{öf} & & \Downarrow & & \Downarrow & & & & \Downarrow & \\
\Updownarrow & & & & & & & & & \\
1\text{élöf} & \Leftarrow & 2\text{élöf} & \Leftarrow & 3\text{élöf} & \Leftarrow & \dots & \Leftarrow & k\text{élöf} & \Leftarrow
\end{array}$$

A vízszintes sorokban levő kapcsolatok a definíciók alapján nyilvánvalóak. A függőleges nyilakkal jelölt kapcsolatok egy kicsit nehezebbek, az alábbi lemmából következnek.

20. Lemma. *Legyen e egy G gráf tetszőleges éle és v egy tetszőleges pontja. Legyen $k \geq 2$.*

(a) Ha G k-szorosan élösszefüggő, akkor $G - e$ $(k-1)$-szeresen élösszefüggő.

(b) Ha G k-szorosan összefüggő, akkor $G - v$ $(k-1)$-szeresen összefüggő.

(c) Ha G k-szorosan élösszefüggő, akkor $G - v$-nek tetszőleges számú komponense lehet.

(d) Ha G k-szorosan összefüggő, akkor $G - e$ $(k-1)$-szeresen összefüggő.

Célunk, hogy belássuk a többszörösen összefüggő gráfok következő jellemzését.

21. Tétel. *(i) Egy G gráf akkor és csak akkor k-szorosan élösszefüggő, ha tetszőleges két pontja között létezik k darab páronként éldiszjunkt út.*

(ii) *Egy G gráf akkor és csak akkor k-szorosan összefüggő, ha tetszőleges két pontja között létezik k darab út, amelyek belső pontjainak halmaza páronként diszjunktak (Útjaink pontfüggetlenek), továbbá $|V(G)| > k$.*

A két állítás egy-egy iránya egyszerű: a megfelelő utak létezése garantálja a megfelelő összefüggőséget. Valóban: Tegyük fel, hogy a gráfunk megfelelő ritkítása után nem összefüggő gráfot kapunk, azaz két maradék pont között — x és y — nem lesz út. A feltételt x és y-ra alkalmazva a garantált útrendszer mindegyikét megszüntette a ritkítás. Az utak függetlensége miatt ez nem lehet.

22. Tétel. *Legyen G gráf, k pozitív egész.*

(i) *G akkor és csak akkor k-szorosan élösszefüggő, ha bármely $x, y \in V(G)$-re létezik k darab páronként éldiszjunkt xy út G-ben.*

(ii) *G akkor és csak akkor k-szorosan összefüggő, ha $|V(G)| > k+1$, és bármely x, y csúcsra létezik k darab páronként pontfüggetlen xy út G-ben, azaz utak, amelyek belső pontjainak halmazai páronként diszjunktak.*

Bizonyítás. Legyen G, x, y és k adott.

(i) Ha létezik k darab éldiszjunkt xy út G-ben, akkor $k-1$ él elhagyásával még el lehet jutni x-ből y-ba, ezért G k-szorosan élösszefüggő.

Tegyük fel, hogy G k-szorosan élösszefüggő, és alkalmazzuk a Menger-tételt.

$$k \leq \min\{|L| : \ L \subseteq E(G), G - L\text{-ben nincs } xy \text{ út}\} =$$
$$= \max\{l : P_1, \ldots, P_l \text{ éldiszjunkt } xy \text{ utak}\}$$

Ezért létezik k darab éldiszjunkt xy út G-ben.

(ii) Ha létezik k darab pontfüggetlen xy út G-ben, akkor $k-1$ darab $V(G) \setminus \{x, y\}$-beli pont elhagyásával még el lehet jutni x-ből y-ba, ezért G k-szorosan összefüggő.

Tegyük fel, hogy G k-szorosan összefüggő. Legyen az xy élek halmaza P, P elemszáma p. A P-beli élek pontfüggetlen xy utak. Ha $p \geq k$, akkor teljesül az állítás. Ha $p \leq k-1$, akkor $G - P$ $k - p$-szeresen összefüggő, azt kell belátni, hogy létezik $k - p$ pontfüggetlen xy út $G - P$-ben. Alkalmazzuk a Menger tételének irányítatalan, pontfüggetlen változatás ($G - P$-ben x és y nem összekötött).

$$k - p \leq \min\{|U| : \ U \subseteq V(G) \setminus \{x, y\}, \ G - P - U\text{-ban nincs } xy \text{ út}\} =$$
$$= \max\{l : \ P_1, \ldots P_l \text{ pontfüggetlen } xy \text{ utak } G - P\text{-ben}\}$$

Ezért létezik $k - p$ darab pontfüggetlen xy út $G - P$-ben. k darab pontfüggetlen st utat kapunk G-ben, ha ehhez hozzávesszük P elemeit minde 1-hosszú st utakat. ■

⋆

Definíció. A G gráf összefüggőségi paraméterei:

$$\kappa_e(G) = \begin{cases} \max\{k : \ G \ k\text{-szorosan élösszefüggő}\}, & \text{ha } G \text{ összefüggő} \\ 0, & \text{ha } G \text{ nem összefüggő} \end{cases}$$

$$\kappa(G) = \begin{cases} \max\{k : \ G \ k\text{-szorosan összefüggő}\}, & \text{ha } G \text{ összefüggő} \\ 0, & \text{ha } G \text{ nem összefüggő} \end{cases}$$

Észrevétel. Minden G gráfra teljesülnek a következők:

$$\kappa_e(G) = \min_{x,y \in E(G)} \max\{k : \ P_1, ...P_k \text{ éldiszjunkt } xy \text{ utak}\} =$$
$$= \min_{x,y \in E(G)} \min_{\mathcal{V} \ xy \text{ vágás}} |E(\mathcal{V})| = \min_{\mathcal{V} \text{ vágás}} |E(\mathcal{V})|,$$

ahol $\mathcal{V} = \{S, T\}$, $S \cup T = V(G)$, $S \cap T = \emptyset$, $S, T \neq \emptyset$.

23. Lemma. *$\kappa_e(G)$ és $\kappa(G)$ is hatékonyan kiszámolható folyam-algoritmussal.*

Megjegyzés. $\max\limits_{\mathcal{V} \text{ vágás}} |E(\mathcal{V})|$ kiszámítása nehéz, $\mathcal{NP}$-teljes probléma.