Gráfelmélet/Diszkrét Matematika MSc hallgatók számára

Fokszámsorozatok

2013. Előadó: Hajnal Péter

Az előadás a BSc Kombinatorika kurzus folytatása. Sokszor vissza kell utalnunk, fel kell idéznünk ott elhangzott fogalmakat, összefüggéseket. Az ilyen „emlékeztetők” rendszeresen megszakítják az előadást.

Emlékeztető. Idézzünk fel néhány fontos gráfelméleti fogalmat. *Gráfnak* nevezzük azokat a (V, E, I) hármasokat, ahol V és E tetszőleges diszjunkt halmazok, $I \subseteq V \times E$ illeszkedési reláció. A V halmazt a gráf *csúcshalmazának*, E-t *élhalmaznak* nevezzük. Azt mondjuk, hogy a v csúcs illeszkedik az e élre, ha $(v, e) \in I$. Az illeszekdési reláció olyan, hogy minden élre egy vagy két csúcs illeszkedik.

Az egy csúcsra illeszedő éleket *hurokéleknek* nevezzük. Ha e_1 és e_2 olyanok, hogy ugyanazon csúcs(ok)ra illeszkednek, őket *párhuzomos éleknek* nevezzük. Az olyan gráfokat, amelyek nem tartalmaznak hurokélt és párhuzamos éleket, *egyszerű gráfoknak* hívjuk.

Egy csúcs *fokán* a csúcsra illeszkedő élek számát értjük, úgy számolva, hogy minden hurokél kétszer illeszkedik egyetlen pontra.

1. Fokszámsorozatok

Definíció. A $d_1, \ldots, d_n$ számsorozatot a G gráf fokszámsorozatának nevezzük, ha G fokainak nemcsökkenő sorozata. Speciálisan $n = |V|$, $d_1 \leq \ldots \leq d_n$ teljesül.

Megjegyezzük, hogy a fokszámsorozatból a gráf élszáma is kiolvasható az $|E| = \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{2}$ összefüggés alapján.

A témakör alapkérdése a következő: adott $\{d_i\}_{i=1}^n$ számsorozat mikor lesz valamely G gráf fokszámsorozata? (Ekkor azt mondjuk, hogy a sorozatot realizálja a G gráf.) Amennyiben G-re semmilyen kikötést nem teszünk, a válasz egyszerű.

1. Állítás. *A $\{d_i\}_{i=1}^n$ számsorozat pontosan akkor realizálható, ha $\sum_{i=1}^n d_i$ páros.*

Az egyszerű bizonyítás (ami egy gyakorló feladat) a hurokélek lehetőségét erősen kihasználja.

⋆

Természetesen adódik a kérdés, hogy mi a helyzet, ha hurokéleket nem engedünk meg. Vagy általában: Mikor realizálható természetes számok egy adott sorozata egy speciális feltételekkel rendelkező gráffal? A következőkben ilyen kérdéseket vizsgálunk.

2. Tétel. *A $\{d_i\}_{i=1}^n$ számsorozat pontosan akkor realizálható hurokél nélküli gráffal, ha*

1. $\sum_{i=1}^n d_i$ *páros, és*

2. $d_n \le d_1 + \cdots + d_{n-1}$.

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy $\{d_i\}_{i=1}^n$ realizálható hurokél nélkül. Ekkor az *1.* feltételről láttuk, hogy teljesül. A *2.* feltételhez tekintsük a realizáló gráf d_n-hez tartozó csúcsát, ez d_n élre illeszkedik. Másrészt az összes többi csúcs összesen $d_1 + \cdots + d_{n-1}$ élre illeszkedik. A hurokélek kizárása miatt az előbbi csúcson átmenő élek mind illeszkednek egy másik csúcsra is, tehát legfeljebb $d_1 + \cdots + d_{n-1}$ van belőlük. Ebből a *2.* feltétel adódik.

A másik irányt ismét $\sum_{i=1}^n d_i$ szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. Először tekintsük az elfajuló esteket: ha $d_n \le 1$, akkor az állítás könnyen látható (fokszámsorozatunk egy párosítással realizálható). Ha $n = 2$, akkor a *2.* feltételből $d_1 = d_2$ adódik, így a két csúcs között d_1 darab párhuzamos élt tartalmazó gráf realizálja a sorozatot. A továbbiakban így feltesszük, hogy $n \ge 3$ és $d_n \ge 2$.

A $\sum_{i=1}^n d_i = 0$ esetet ismét realizálja az n pontú, üres élhalmazú gráf. Tegyük fel, hogy $\sum_{i=1}^n d_i \le m - 1$-re teljesül az állítás, és tekintsük $\sum_{i=1}^n d_i = m$-et. Az indukciós lépést két esetre bontjuk:

(a) $d_{n-2} \lneq d_n$

(b) $d_{n-2} = d_{n-1} = d_n$

Mindkét esetben a $d_1, \dots d_{n-2}, d_{n-1} - 1, d_n - 1$ számsorozatból képzett nemcsökkenő sorozatot fogjuk realizálni. Azt állítjuk, hogy ez teljesíti a *2.* feltételt, így alkalmazható rá az indukciós feltevés. Valóban, az (a) esetben d_n még mindig maximális elem a sorozatban, és $d_n - 1 \le d_1 + \cdots + d_{n-1} - 1$ fennáll. A (b) esetben a legnagyobb elem d_{n-2}, így $d_{n-2} \le d_1 + \cdots + d_{n-3} + d_{n-1} + d_n - 2$ a bizonyítandó egyenlőség, de mivel $d_n \ge 2$, így már az erősebb $d_{n-2} \le d_{n-1} + d_n - 2$ egyenlőtlenség is teljesül. A fenti sorozatot realizáló gráfhoz egy élt illesztve a d_{n-1}, d_n-hez tartozó csúcsokra megkapjuk az eredeti számsorozatot realizáló gráfot. ■

Megjegyezzük, hogy az indukciós bizonyításból könnyen kiolvasható egy rekurzív algoritmus, amely az adott feltételeknek elegettevő sorozathoz egy megfelelő realizáló gráfot konstruál.

3. Lemma. *Ha a $\{d_i\}_{i=1}^n$ számsorozat realizálható egyszerű gráffal, akkor van olyan realizáló egyszerű gráf, amely csúcsai $v_1, \dots, v_n$, ahol $d_i = d(v_i)$, és a v_n csúcs szomszédai pontosan a $v_{n-1}, v_{n-2}, \dots, v_{n-d_n}$ csúcsok (speciálisan $d_n < n$).*

A lemma előtt nézzük meg egy következményét.

4. Következmény (V. Havel és S. Hakimi tétele). *$\{d_i\}_{i=1}^n$ akkor és csak akkor realizálható egyszerű gráffal, ha*

$$d_1, \ldots, d_{n-d_n-1}, d_{n-d_n} - 1, d_{n-d_{n+1}} - 1, \ldots, d_{n-1} - 1$$

is.

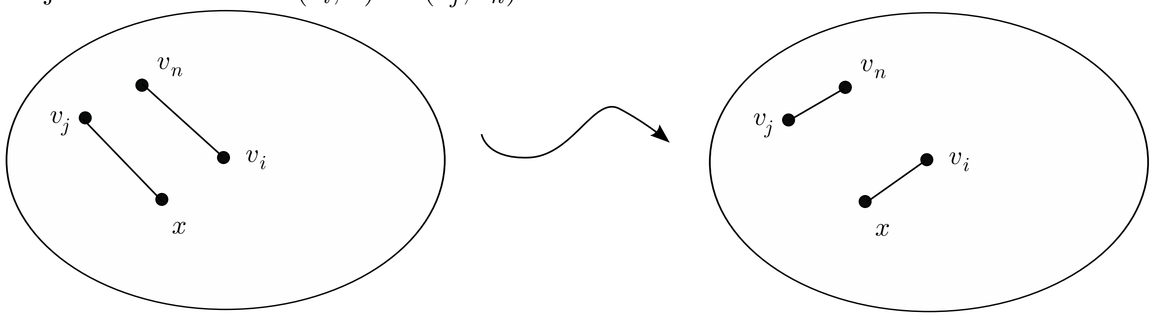
A következmény egyszerűen adódik az előbbi lemmából, hiszen ha vesszük azt a $\{d_i\}_{i=1}^n$-t realizáló gráfot, amelyben v_n a d_n további legnagyobb indexű csúccsal szomszédos, akkor a v_n csúcsot elhagyva olyan gráfot kapunk, amely éppen a fenti fokszámsorozatot realizálja. Az állítás megfordítása a lemma nélkül is egyszerű.

Vegyük észre, hogy így a következmény által rekurzív algoritmust (Havel—Hakimi-algoritmus) kaptunk a realizálásra.

Lemma bizonyítása. Legyen G olyan realizáló gráf, amelyre $d(v_i) = d_i$ és v_n szomszédainak indexösszege maximális. Azt állítjuk, hogy ez a gráf olyan, amilyet a lemma állít.

Indirekt úton tegyük fel, hogy nem, azaz létezik $i < j$ úgy, hogy v_n szomszédos v_i-vel, de nem szomszédos v_j-vel. v_i-nek egy szomszédja tisztázott (v_n), $d_i - 1$ másikról még nem tudunk semmit. v_j-nek van d_j „tisztázatlan" szomszédja. Nyilván $d_i - 1 \leq d_j - 1 < d_j$. Ez csak úgy lehet, ha van egy olyan x csúcs, amely v_j-vel szomszédos, de v_i-vel nem.

Képezzük G-ből a $\widetilde{G}$ gráfot úgy, hogy a (v_i, v_n) és (v_j, x) éleket elhagyjuk G-ből, majd hozzávesszük a (v_i, x) és (v_j, v_n) éleket.



Így a gráf egyszerű maradt és fokszámsorozata sem változott, viszont $\widetilde{G}$-ben megint csak $j - i$-vel nagyobb v_n szomszédainak indexösszege, így G-ben nem lehetett maximális. ∎

Emlékeztető. Fa, ághajtás operáció.

5. Tétel. *Tegyük fel, hogy $n \geq 2$. Ekkor a $\{d_i\}_{i=1}^n$ sorozat pontosan akkor realizálható fával, ha $\sum_{i=1}^n d_i = 2n - 2$ és $d_1 > 0$ teljesül.*

Bizonyítás. A feltételek szükségessége könnyen adódik, hiszen bármely fa összefüggő, így $d_1 > 0$, másrészt egy n-pontú fának $n - 1$ éle van, így $\frac{\sum_{i=1}^n d_i}{2} = |E| = n - 1$ is fennáll.

Az elégségesség bizonyítása n szerinti teljes indukcióval történik. Ha $n = 2$, akkor a feltételek miatt $d_1 = d_2 = 1$, és ezt realizálja a kétpontú, egy élt tartalmazó gráf. Tegyük fel, hogy $n - 1$ csúcsra igaz az állítás, és $n \geq 3$. Ekkor egyszerű számolással $1 < \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n} < 2$ adódik, és persze $d_1 \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n}$ és $d_n \geq \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n}$ teljesül. Ebből $d_1 = 1$, és $d_n \geq 2$ adódnak, hiszen a fokszámok egészek. Így a $d_2, d_3, \ldots, d_n - 1$ sorozat rendezésével kapott számsorozat is teljesíti a tételbeli feltételeket, tehát az indukciós feltevés szerint fával realizálható. Ebből a fából megkapható az eredeti fokszámsorozathoz tartozó fagráf egy, a d_n-hez tartozó csúcsból történő ághajtással. ■