**Gráfelmélet/Diszkrét Matematika MSc hallgatók számára**

Fák összeszámlálása

*2013.* Előadó: Hajnal Péter

# 1. Adott fokszámsorozatú fák összeszámlálása

**1. Tétel.** *Legyen $(d_i)_{i=1}^n \in \mathbb{N}^n, n \geq 2$ fokszámsorozat olyan, melyre teljesül a*

$$\sum_{i=1}^n d_i = 2(n-1)$$

*egyenlőség, ekkor ezen fokszámsorozatot realizáló fák száma:*

$$(n-2)! \prod_{i=1}^n \frac{d_i}{d_i!}. \tag{1}$$

***Bizonyítás.*** Ha valamely $j$ indexre $d_j = 0$, akkor a fokszámsorozat nem realizálható fával, hiszen legalább egy legalább két pontból álló fa csúcsainak fokszáma minimum 1. Ilyen esetben a formula értéke is 0.

Tegyük fel, hogy $1 \leq d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$ és a realizáló fa csúcsai $\{v_i\}_{i=1}^n$, ahol $d(v_i) = d_i$. Tudjuk, hogy

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n d_i = 2\frac{n-1}{n} < 2,$$

így $d_1 = 1$, azaz a $v_1$ csúcs minden realizáló fában levél. A realizáló fákat $n-1$ diszjunkt csoportba oszthatjuk aszerint, hogy a $v_1$ csúcsnak melyik másik csúcs a szomszédja. Ha realizáljuk a $d_2, d_3, \ldots, d_{i-1}, d_i - 1, d_{i+1}, \ldots, d_n$ fokszámsorozatot fával, akkor megkapjuk az eredeti fokszámsorozat egy realizációját, amelyben $v_1$ szomszédja $v_i$.

Ezt felhasználva teljes indukcióval igazoljuk a formula helyességét. Az állítás $n = 2$ esetén nílvánvalóan igaz. Tegyük fel, hogy (1) teljesül $n-1$ csúcsú fák esetén. Ekkor a $\{d_i\}_{i=1}^n$ fokszámsorozatot realizáló fák száma

$$\sum_{j=2}^n (n-3)! \left(\prod_{i=2}^{j-1} \frac{d_i}{d_i!}\right) \cdot \frac{d_j - 1}{(d_j-1)!} \cdot \left(\prod_{i=j+1}^n \frac{d_i}{d_i!}\right) =$$
$$(n-3)! \left(\prod_{i=1}^n \frac{d_i}{d_i!}\right) \sum_{j=2}^n (d_j - 1) = (n-2)! \prod_{i=1}^n \frac{d_i}{d_i!}.$$

■

**2. Következmény (Cayley).** *A $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ halmazon $n^{n-2}$ fa adható meg. Azaz az $n$ csúcsú teljes gráf ($K_n$) feszítőfáinak száma $n^{n-2}$.*

***Bizonyítás.*** A fokszámsorozataik szerint csoportosítva a megszámolandó fákat a számukra a következő összefüggés adódik

$$\sum_{\substack{d_1,d_2,\ldots,d_n\in\mathbb{N}\\ d_1+d_2+\cdots+d_n=2(n-1)}} (n-2)!\prod_{i=1}^{n}\frac{d_i}{d_i!} = \sum_{d_1^-+d_2^-+\cdots+d_n^-=n-2} \frac{(n-2)!}{\prod_{i=1}^{n} d_i^-!}, \tag{2}$$

ahol $d_i^- = d_i - 1$.

Vegyük észre, hogy a (2) egyenlőség jobb oldala a multinomiális tétel speciális esete, így

$$\sum_{d_1^-+d_2^-+\cdots+d_n^-=n-2} \frac{(n-2)!}{\prod_{i=1}^{n} d_i^-!} =$$

$$\sum_{d_1^-+d_2^-+\cdots+d_n^-=n-2} 1^{d_1^-}1^{d_2^-}\cdots 1^{d_n^-}\frac{(n-2)!}{\prod_{i=1}^{n} d_i^-!} = (1+1+\cdots+1)^{n-2} = n^{n-2}.$$

■

# 2. Fák és lineáris algebra

*Irányított gráf* alatt olyan $(V, E, K, B)$ rendszereket értünk, ahol $V$ és $E$ diszjunkt halmazok, $K, B \subset E \times V$ illeszkedési relációk, ahol minden $e$ élre egyetlen $v$ csúcs $K$-illeszkedik (az $e$ él kezdőpontja), és egyetlen $u$ csúcs $B$-illeszkedik (ez $e$ él végpontja). A $(V, E, K, B)$ irányított gráfból az *irányítás elhagyásával* a $(V, E, K \cup B)$ gráfot kapjuk. Egy irányítatlan gráfnak *irányítása* egy irányított gráf, ha abból az irányítás elhagyásával az eredeti gráfot kapjuk vissza. (Ez nem egyértelmű. Egy $G$ gráfnak $2^{|E'|}$ darab irányítása van, ahol $E'$ a nem hurokélek halmaza.)

**Definíció.** Legyen $G$ hurokélmentes, irányítatlan gráf. A $G$ gráf pont-él illeszkedési mátrixán a következő, $|V| \times |E|$-s mátrixot értjük: $A_G = (a_{ij})$, ahol

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } v_i \text{ illeszkedik az } e_j \text{ élre,} \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Hasonlóan, ha $\overrightarrow{G}$ irányított, akkor $A_{\overrightarrow{G}} = (a_{ij})$, ahol

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } e_j \text{ befut a } v_i \text{ csúcsba,} \\ -1, & \text{ha } e_j \text{ kifut a } v_i \text{ csúcsból,} \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Vegyük észre, hogy bármely oszlopban pontosan két darab nemnulla elem van, és irányított gráf esetében ezek egyike 1, a másik $-1$. Ebből adódik, hogy $A_{\vec{G}}$ sorainak összege $\overrightarrow{0}$.

**Definíció.** Adott egy $G$ (irányított vagy irányítatlan) gráf, rögzítsük valamely $r \in V(G)$ csúcsát. Ekkor a $(G, r)$ párt *gyökeres gráfnak* nevezzük.

**Jelölés.** Legyen $(G, r)$ egy gyökeres gráf. $\overrightarrow{G}$ legyen $G$ egy tetszőleges irányítása. Legyen $F$ egy tetszőleges élhalmaz. Ekkor $A_{\vec{G}}^{-r}[F]$ jelöli azt a mátrixot, amit $\overrightarrow{G}$ pont-él-illeszkedési mátrixából ($A_{\vec{G}}$-ből) kapunk az $r$ csúcs sorának eltörlésével és az $F$-beli éleknek megfelelő oszlopok kiemelésével kapunk (azaz $E(G) - F$ éleinek megfelelő oszlopokat is elhagyjuk $r$ sora mellett).

A fenti definíciók mögött fizikai motiváció is áll. Egy ármakörhöz tartozik egy gráf. Ha az egyes huzalszakaszokon/éleken folyó áramerősséget vizsgáljuk. A folyó áramnak iránya is van. Ehhez hasznos vennünk az alap $G$ gráf egy irányítását (a lerögzített irányban áramló áram erőssége pozitív, míg az ellenkező irányú áram negatív erősségű lesz). Kirchoff csomóponti törvénye azt mondja, hogy gráfunk minden csúcsában a bevezető éleken az áramerősségek összege ugyanaz mint a kivezető éleken (a két összeg különbsége 0). Ezeket az egyeneleteket felírva egy lineáris egyenletrendszert kapunk, amely mátrixa $A_{\vec{G}}$. A mátrix sorainak össze $\overrightarrow{0}$. Azaz a rendszer egyenletei nem függetlenek. Egy $r$ csúcsra felesleges felírnunk, ha a többire már tudjuk. Az így redukált egyenletrendszer mátrixa $A_{\vec{G}}^{-r}$.

# 3. Kirchoff tétel

**Emlékeztető.** Egy $G$ hurokélmentes gráfnak vettük egy $\overrightarrow{G}$ irányítását. $A_{\vec{G}}$ az irányított gráf pont-él illeszkedési mátrixa (speciálisan minden oszlopban egy darab 1-es, egy darab $-1$-es és további 0-k szerepelnek). Kijelöltünk egy tetszőleges $r$ csúcsot gyökérnek. Jelölést vezettünk be $A_{\vec{G}}$ néhány részmátixára. $A_{\vec{G}}^{-r}$ a gyökér ($r$) sorának eltörlésével nyert mátrix. Egy $F$ élhalmaz esetén $A_{\vec{G}}^{-r}[F]$ az a mátrix, amit $A_{\vec{G}}^{-r}$-ből kapunk $F$ éleinek megfelelő oszlopk megtartásával ($E(G) - F$ éleinek megfelelő oszlopok törlésével) kapunk.

**3. Lemma.** *Legyen $G$ gráf, $\vec{G}$ egy tetszőleges irányítása, és $r$ egy tetszőleges gyökér. Legyen $F \subseteq E(G)$ olyan, hogy $|F| = |V| - 1$ (azaz $A_{\vec{G}}^{-r}[F]$ egy négyzetes mátrix). Ekkor*

*(1) $F$ akkor és csak akkor a $G$ gráf egy feszítőfájának élhalmaza, ha* $\det A_{\vec{G}}^{-r}[F] \in \{\pm 1\}$

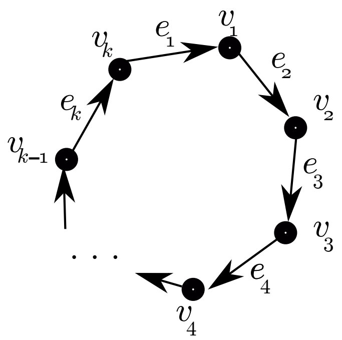
*(2) $F$ akkor és csak akkor nem egy feszítőfa élhalmaza, ha* $\det A_{\vec{G}}^{-r}[F] = 0$.

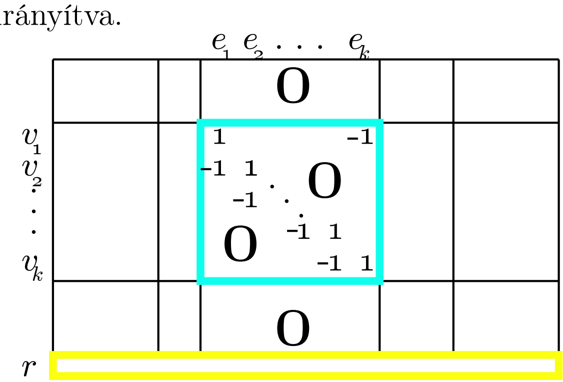
***Bizonyítás.*** A két állítás feltételei komplementer lehetőségek. Így elegendő a két „akkor és csak akkor” állítás „akkor” részének irányát. Valóban ekkor mindkét „csak akkor” rész következik indirekt módon a másik állítás „akkor” részéből.

(1): Mivel $F$ fa élhalmaza, a hozzá tartozó gráf $r$-ből felépíthető ághajtásokkal. Jelölje $v_i$ és $f_i$ az $i$-edik ághajtás során keletkező csúcsot és élt. Vegyük észre, hogy ekkor egyrészt $f_i$ mindig illeszkedik $v_i$-re, másrészt $f_i$ egyetlen, nála nagyobb indexű csúcsra sem illeszkedik. Ez azt jelenti, hogy abban az illeszkedési mátrixban, ahol a(z $r$-től különböző) csúcsok és az $F$-beli élek is index szerint vannak felsorolva, a főátlóban mindig $\pm 1$, a főátló alatt pedig 0 áll. Így a mátrix felső trianguláris, és a determinánsa $\pm 1$. Vegyük észre, hogy $A_{\vec{G}}^{-r}[F]$ megkapható belőle sor-oszlop cserékkel, így a determinánsuk legfeljebb előjelben különbözik. Ezzel az első állítást beláttuk.

(2): $F$ egy $n-1$ elemű élhalmaz egy $n$ pontú gráfban. Ez pontosan akkor nem egy feszítőfa élhalmaza, ha van benne kör. Jelölje az $F$-beli kör élhalmazát $C = \{e_1, \ldots, e_k\}$ (speciálisan $C \subset F$). A bizonyítást két esetre bontjuk a $C$-beli élek irányítása szerint.

<u>1. eset</u>: $C$ élei csatlakozóan vannak irányítva.





Vizsgáljuk meg az $A_{\vec{G}}$ mátirx $C$-nek megfelelő oszlopai és körünk csúcsainak megfelelő sorok találkozásában álló elemeket. Nem jelent megszorítást, ha feltesszük, hogy a csúcsok, illetve élek olyan sorrendben vannak, ahogy az ábrán látható. (Ha nem ilyen sorrendben lennének, akkor ez a sor- és oszlopcserékkel elérhető a kívánt sorrend, amely változtatás a determinánsnak csak az előjelét változtatja, és ez a tétel szempontjából lényegtelen.)

Könnyű meggondolni, hogy a kék színű blokkban minden sorban pontosan egy 1-es és egy $-1$-es szerepel, hiszen minden $v_i$-re az $e_1, \ldots, e_k$ élek közül pontosan kettő illeszkedik, az egyik befut $v_i$-be, a másik pedig kifut $v_i$-ből. A kijelölt blokk feletti és alatti részeken pedig csupa 0 értékek állnak, hiszen minden körbeli él a két körbeli csúcstól különböző, harmadik csúcsra nem illeszkedhet.

Innen viszont rögtön adódik, hogy az $e_1, \ldots, e_k$ éleknek megfelelő oszlopvektorok összege $\vec{0}$. Ez igaz lesz az $M_{\vec{G}}^{-r}$ mátrixban is (ott egyetlen sor lett lehagyva $A_{\vec{G}}$-ből). Így a vizsgált determináns szükségképp zéró (akkor is, ha az ábrával ellentétben a kék mátrix egyik sora, az elhagyott, $r$-nek megfelelő sor).

<u>2. eset</u>: $C$ élei „össze-vissza” irányítottak.

Egy él irányításváltásának hatása az $A_{\vec{G}}$ mátrixra a megfelelő oszlop előjelváltása.

A $2^n$ különböző irányítás bármelyikéből kiindulva irányításváltásokkal eljuthatunk az 1. esethez. Tehát a kiindulási és az 1. eset-beli mátrix mindössze néhány oszlopvektor előjelében különbözik. Így a speciális (első) esetből következik az általános eset is. ∎

**4. Következmény.** + *Az $A_{\vec{G}}$ mátrix rangjára fennáll, hogy $r(A_{\vec{G}}) = |V| - c(G)$, ahol $c(G)$ a $G$ gráf komponenseinek számát jelöli.*

***Bizonyítás.*** Két esetet különböztetünk meg.
1. eset. Tegyük fel, hogy $G$ összefüggő, ekkor $G$-ben létezik feszítőfa, legyen egy ilyen fa élhalmaza $F$. Ekkor az 1. Tétel (i) pontja alapján $\det M_{\vec{G}}^{-r}[F]$ egy nemeltűnő $(n-1) \times (n-1)$-es determináns, így $A_{\vec{G}}$-ben van $(n-1) \times (n-1)$-es nemzéró részdetermináns. Ekkor $A_{\vec{G}}$ rangjára a következő alsó korlát adódik: $n - 1 \leq r(A_{\vec{G}})$. Másrészt $r(A_{\vec{G}}) < n$, hisz azt tudjuk, hogy $A_{\vec{G}}$ sorvektorainak összege 0, így bármely $n \times n$ részmátrix determinánsa 0. Összefoglalva: $n - 1 \leq r(A_{\vec{G}}) \leq n - 1$, ahonnan nyerjük, hogy $r(A_{\vec{G}}) = n - 1$. Mivel összefüggő gráfokban a komponensszám 1, ez éppen a tétel állítását igazolja.
2. eset. Tegyük fel most, hogy a $G$ gráf $t$ darab $(t > 1)$ komponensből áll: $G = L_1 \cup \ldots \cup L_t$. A komponensek osztályozzák a csúcsok és élek halmazát is. Ezen osztályozások alapján természetes módon blokkosíthatjuk az $A_{\vec{G}}$ mátrixot:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $A_{\vec{L}_1}$ | 0 | 0 | $\ldots$ |
| 0 | $A_{\vec{L}_2}$ | 0 | $\ldots$ |
| 0 | 0 | $A_{\vec{L}_3}$ | $\ldots$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ |

Nyilván a főátló blokkjain kívül minden blokk csupa zéró. Míg a diagonális mentén sorra az $L_1, \ldots, L_t$ komponensgráfok illeszkedési mátrixai találhatók. Egyszerű lineáris algebrai eredmény szerint $A_{\vec{G}}$ rangjára fennáll a következő: $r(A_{\vec{G}}) = \sum_{i=1}^{t} r(A_{\vec{L}_i})$. Minden $i$ indexre $L_i$ már összefüggő gráf, így az 1. esetből kapott összefüggést alkalmazva

$$r(A_{\vec{G}}) = \sum_{i=1}^{t} (|V(L_i)| - 1) = \sum_{i=1}^{t} |V(L_i)| - t = |V| - t = |V| - c(G).$$

∎

A továbbiakhoz szükségünk lesz egy lineáris algebrai tételre:

**5. Tétel (Cauchy—Binet-formula).** *Legyen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Ekkor*

$$\det(A \cdot B^T)_{n \times n} = \sum_{\substack{F \subset \{1,\ldots,m\} = oszlopok\ halmaza \\ |F| = n}} \det A[F] \cdot \det B[F].$$

**Megjegyzés.** A Cauchy-Bintet-féle tétel $n = m$ esetén (ekkor a szumma egy tagból áll) a determinánsok szorzástétele.

Ha $n > m$, akkor a szumma üres, definíció szerint értéke 0. Könnyen látható, hogy a bal oldal is 0: $A$ sorvektorai $\mathbb{R}^m$-beli vektorok, számuk több mint $m$, a terünk dimenziója. Így van köztük nem-triviális lineáris összefüggés. Ez öröklődik $A \cdot B^T$-re is, így determinánsa 0.

A tétel „újdonsága" az $n > m$ eset.

Ezt alkalmazzuk, hogy főeredményünket beláthassuk.

**6. Következmény (Kirchoff tétele).** *Tetszőleges $\vec{G}$ gráf feszítőfáinak száma*

$$\det[A_{\vec{G}}^{-r} \cdot (A_{\vec{G}}^{-r})^T].$$

***Bizonyítás.*** Írjuk fel a Cauchy—Binet-formulát az $A = B = A_{\vec{G}}^{-r}$ esetben:

$$\det[A_{\vec{G}}^{-r} \cdot (A_{\vec{G}}^{-r})^T] = \sum_{\substack{F \subset E(G) \\ |F|=|V|-1}} A_{\vec{G}}^{-r}[F] \cdot A_{\vec{G}}^{-r}[F].$$

Az 1. Tétel miatt ezen fenti determinánsok vagy zérók vagy $(-1)^2$ vagy $(+1)^2$ alakúak attól függően, hogy $F$ tartalmaz-e kört vagy sem. Ha a nullákat elhagyjuk a fenti összegből, akkor $\sum_{\substack{F \subset E(G) \\ F \text{feszítőfa}}}$ 1-t kapunk. Ez $G$ feszítőfáinak száma, ahogy bizonyítani kellett. ∎

*Érdekesség.* + Gustav Robert Kirchhoff (Königsberg, Poroszország, 1824. március 12.—Berlin, 1887. október 17.) német fizikus volt. Jelentős az áramkörök fizikájával kapcsolatos munkássága. Egy áramkör felfogható pontok és élek halmazaként (egy megfelelő illeszkedési relációval), tehát gráfként. Mivel minden élen az ott folyó áramnak iránya van, természetes hogy irányított gráfként tekintsünk egy áramkörre (az élek iránya egy viszonyítási alap, az áramerősseg pozitív, ha az áramlás iránya megegyezik az él irányával, különben negatív).

Kirchoff első törvénye szerint egy áramkörben minden csomópontban a befolyó áram erőssége megegyezik a kifolyó áram erősségével. Azaz minden csúcsra felírható egy egyenlet, amelyben az $I_e$ (az $e$ élen folyó áram erőssége) változók szerepelnek. Ennek a lineáris egyenletrendszernek mátrixa $A_{\vec{G}}$. Ezek után érthetővé válik, hogy miért érdeklődött ezen mátrixok iránt Kirchoff. Ő (mint minden fizikus) nyilván természetesnek vette, hogy gráfunk összefüggő. A rang meghatározása számára persze azt a kérdést jelentette, hogy: „Az összes csomóponti törvény között milyen összefüggések vannak, közülük hány tekinthető függetlennek, amelyek meghatározzák a többit is?" A rangra vonatkozó eredményünk azt adta, hogy a csomóponti törvények közül bármelyik $|V(\vec{G})| - 1$ darab független és meghatározza a fel nem írt csomóponti törvényt (feltesszük, hogy $G$ összefüggő).

Egy konkrét áramkörnél persze csak a független törvényeket írjuk fel. Ezek mátrixa az $A_{\vec{G}}^{-r}$ mátrix.

Mielőtt továbbhaladnánk nézzük meg az $A_{\vec{G}}^{-r}(A_{\vec{G}}^{-r})^T$ szorzatmátrixot közelebbről. Ezen mátrix általános, $(u,v)$ indexű eleme $A_{\vec{G}}^{-r}$ $u$-adik sorának és $(A_G^{-r})^T$ $v$-edik oszlopának belső szorzata, azaz $A_G^{-r}$ $u$-adik és $v$-edik sorainak belső szorzata. Ha $u \neq v$, akkor a belsőszorzat (a megfelelő koordináták szorzatainak összege) az $u$ és $v$ közötti élek számának $(-1)$-szerese. Ugyanis csak azok az elemek lesznek 0-tól különbözők az összegben, ahol mindkét vektor megfelelő eleme egyszerre nemzéró, ami pontosan akkor fordul elő, ha fut egy $L_i$ él $u$-ból $v$-be vagy $v$-ből $u$-ba. Mindkét esetben ez az él $(-1)$-gyel járul hozzá az összeghez (az első esetben $(-1)(+1)$-gyel, a másodikban $(+1)(-1)$-gyel). Ha pedig $u = v$, akkor ez a belső szorzat $d(u)$ lesz: Akár $u$-ból indult, akár $u$-be befutott egy él, ezt az információt jelző $(-1)$-es vagy $(+1)$-es a belső szorzatban négyzetre emelődik. Így végül minden $u$-ra illeszkedő él 1-et ad az összeghez.

Összefoglalva:

$$(A_{\vec{G}}^{-r}(A_{\vec{G}}^{-r})^T)_{uv} = \begin{cases} -(u \text{ és } v \text{ közötti élek száma}) & \text{ha } u \neq v \\ d(u) & \text{ha } u = v \end{cases}.$$

Így a Kirchoff tétel egy új alakjához jutottunk:

**7. Tétel (Kirchoff-tétel, II. alak).** *A feszítőfák száma $G$-ben $\det(D^{-r} - A_G^{-r})$, ahol $D$ a fokszámokat tartalmazó diagonlás mátrix, $A_G$ pedig gráfunk szomszédsági mátrixa. (A $-r$ felső index arra emlékeztet, hogy csak az $r$-től különböző csúcsok számítanak, speciálisan mátrixaink mérete $(|V|-1) \times (|V|-1)$.)*

Kirchoff tételéből könnyen adódik a Cayley-formula.

**8. Következmény (Cayley tétele).** *$K_n$-nek (az $n$ pontú teljes gráfnak) $n^{n-2}$ darab feszítőfája van, azaz a $\{v_1, \ldots, v_n\}$ csúcshalmazon $n^{n-2}$ darab fa van.*

***Bizonyítás.*** Kirchoff tételét a $G = K_n$ speciális esetre felírva adódik a kívánt állítás:

$$K_n \text{ feszítőfáinak száma } = \det \begin{bmatrix} n-1 & -1 & -1 & \ldots & -1 & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \ldots & -1 & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & \ldots & -1 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \ldots & n-1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \ldots & -1 & n-1 \end{bmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

A determináns kiszámításához mátrixunkon olyan átalakításokat végzünk, amelyek nem változtatják meg a determináns értékét. Először a másodiktól kezdve az összes sort hozzáadjuk az első sorhoz. Majd az új első sort adjuk hozzá az összes többihez:

$$K_n \text{ feszítőfáinak száma } = \det \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 & \dots & +1 & +1 \\ -1 & n-1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & \dots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & n-1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & n-1 \end{bmatrix} =$$

$$= \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{bmatrix} = n^{n-2},$$

hiszen felső trianguláris mátrix determinánsa a főátlón lévő elemek szorzata, a főátlón pedig egy darab 1-es és $n-2$-es darab $n$ szerepel. ■

# 4. Cayley tételének kombinatorikus bizonyítása

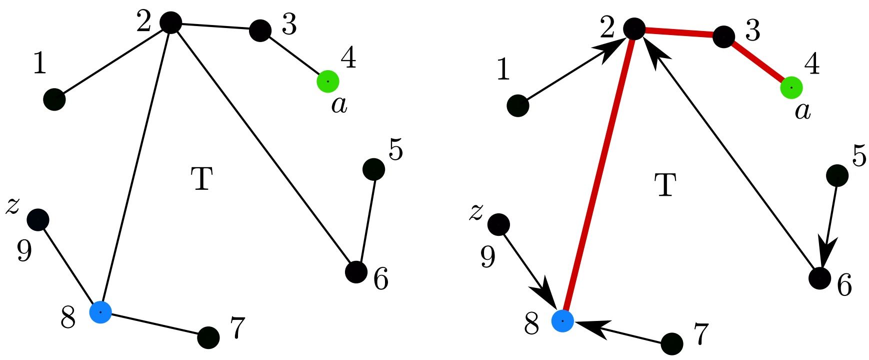
A Cayley-tétel állításában rejlő összeszámlálási feladatra nagyon kompakt, szép formula adja meg a választ. Sejthető, hogy az egyszerű alakú eredményhez szép, kompakt érvelés is elvezethet. Kettőt is ismertetünk.

**Első kombinatorikus bizonyítás Cayley formulárára (Joyal)**

Megadunk egy bijekciót a $\{(T, a, z) : \text{T fa az } [n] \text{ halmazon és } a, z \in [n]\}$ halmaz és az $\{f : [n] \to [n]\}$ függvényhalmaz között. Az első halmaz elemei fák az $[n]$ halmazon két kitüntetett csúccsal (címkézett fák), amelyekben a két címkézett csúcs akár egybe is eshetnek. Ezek száma a Cayley-tételben rejlő összeszámlálási feladatra adott válasz $n^2$-szerese (ennyi lehetőség van minden $[n]$ csúcshalmazú fán az $a$ és $z$ címkéjű csúcs kijelölésére). A második halmaz elemszáma $n^n$. A két halmaz közötti bijekció igazolja azonos elemszámúságukat, így Cayley tételét.

A bijekció minden $F$ címkézett fához hozzá fog rendelni egy $J_F : [n] \to [n]$ fuggvényt, az $F$ fa Joyal-kódját, amit a következő módon kaptunk. A függvény leírását egy példával mutatjuk be.

**Példa.**




A fában legyen $a = 4$ és $z = 8$.

Erre az esetre le is írjuk a kódolás kimenetelét.

Írjuk le az $a$-$z$ út (ez fában egy jól meghatározott út) csúcsait 2-féle sorrendben egymás alá:

- növekvő sorrendben (példánkban 2 3 4 8),
- $a$-tól $z$-ig az úton való haladás sorrendjében (példánkban 4 3 2 8).

A két csúcsok/számok sorrendjét írjuk egymás alá és olvassuk el mint egy permutációt: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 8 \\ 4 & 3 & 2 & 8 \end{pmatrix}$.

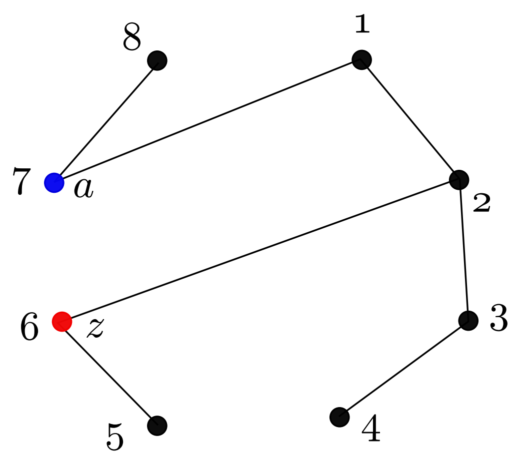
Az $F$ fához rendelt $J_F$ függvény ennek a kiterjesztése lesz (ez a kiterjesztés már nem feltétlenül permutáció). Minden olyan $x$ csúcsra, ami nem eleme az $a$-$z$ útnak, legyen $f(x) :=$ $x$-nek azon szomszédja, ami az úthoz közelebb van, mint $x$. A körmentesség és összefüggőség miatt ez jó definíció.

Tehát példánk címkézett fájának Joyal-kódja:

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $J_F(i)$ | 2 | 4 | 3 | 2 | 6 | 2 | 8 | 8 | 8 |

**9. Állítás.** *A Joyal-kódolás bijekció, vagyis az $f$ függvény ismeretében felépíthető az eredeti fa.*

**Példa.** Az alábbi animáció a Joyal kódolására mutat példát:




Ismét csak az inverz függvényt írjuk le, mint egy dekódoló eljárást. A részletek kidolgozása az érdeklődő hallgató feladata.

Vegyük észre, ha $x$ a fa egy olyan csúcsa, ami nem eleme az $a$-$z$ útnak, akkor $y = f(x)$-re $xy$ a fa éle. Tehát ha ismernénk az $a$-$z$ út csúcsait, akkor már csak annyit kellene tenni, hogy egyrészt valamilyen módon kitaláljuk ezek sorrendjét az $a$-$z$ úton és ezáltal meghatározzuk az út éleit, másrészt az úton kívüli $x$ csúcsban behúzzuk az $xf(x)$ éleket, és ezzel vissza is kapjuk a fát.

Az $a$-$z$ út csúcsain az $f$ megszorítása permutáció, így idegen ciklusok szorzatára bomlik. Ugyanakkor vegyük észre, hogy az $a$-$z$ úton kívül az $f$ sehol másutt nem működhet hasonlóan, egy úton kívüli $x$ csúcsa semmilyen $k$-ra nem lesz $f^k(x) = x$. Valóban: Az $x$, $f(x)$, $f(f(x))$, $\ldots$ sorozatban lesz egy első elem, ami már az útra esik, és úton lévő elemhez az $f$ csak úton lévő elemet rendelhet, tehát $x$ nem térhet vissza e sorozatban újra.

Ezzel konstruálhatunk egy algoritmust az $a$-$z$ út elemeinek kiszűrésére. Minden egyes csúcsra vegyük sorra az $f(x)$, $f(f(x)), \ldots$ elemeket. Ha $x$ eleme ennek a sorozatnak, akkor (és csak akkor) $x$ eleme az $a$-$z$ útnak. Innen megvan az út csúcsainak $H$ halmaza. Ezeket írjuk le növekvő sorrendben egymás mellé. Alájuk írjuk le az $f$ melletti értéküket. Az $f$ melletti függvényértékek sorozata (ilyen *sorrendben*) adja a $a$-$z$ út csúcsait, és mivel ekkor már egymást követő rendben állnak, ezeket a sorra össze kell kötni.

Befejezésül húzzuk be az összes $\{xf(x)|x \text{ nincs az } a\text{-}z \text{ úton}\}$ élt.

**Példa.** Az alábbi példa a Joyal-kódolás dekódolására mutat példát:

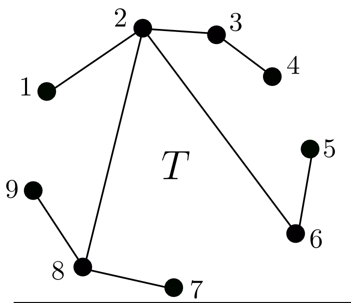
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 4 | 1 | 1 | 6 | 8 | 2 | 5 | 2 |

**Második kombinatorikus bizonyítás Cayley formulájára (Prüfer)**

Tekintsünk egy tetszőleges $T$ fát $V = \{1, \ldots, n\}$ csúcshalmazzal, $|V| \geq 2$. Bevezetjük $T$ Prüfer-kódjának fogalmát, amelyet a következő algoritmus hoz létre. Az algoritmus során egy változó $T_i$ fánk lesz, ami kezdetben $T$, így $T_0 = T$.

Legyen $v_1$ a minimális indexű levél a fában (minden legalább két pontú fában van legalább két levél, így $v_1$ definíciója jó), $k_1$ pedig legyen $v_1$ szomszédja. $T_1$ jelölje azt a fát, amelyet $T_0$-ból a $v_1$ csúcs (és $v_1k_1$ él) elhagyásával kapunk. Általában $v_i, k_i, T_i$ rekurzív definíciója: $v_i$ a legkisebb indexű levél a $T_{i-1}$ fában, $k_i$ pedig $v_i$ szomszédja. A $T_i$ fa a $v_i$ levél elhagyásával kapható $T_{i-1}$-ből. Ha $|V(T_i)| = 1$, akkor megállunk.

**Példa.** Az ala'bbi anima'cio' a Pru;fer-ko'dola'sra mutat pe'lda't:




A kód: ␣␣␣␣␣␣␣

A $T$ fa Prüfer-kódja a $k_1, k_2, \ldots, k_{n-2}$ sorozat. Példánkban a fa kódja 2326288.

Tehát a kód eleme a $\overbrace{V \times \ldots \times V}^{|V|-2\text{-szer}} = V^{|V|-2}$ halmaznak. Mivel ezen halmaz $n^{n-2}$ elemszámú, a Cayley-tétel bizonyításához elegendő kimutatni, hogy a Prüfer-kódolás bijekció (azaz van hozzá inverz, dekódoló függvény).

Megjegyezzük, hogy $k_{n-1}$et azért hagytuk ki a kódból, mert az szükségszerűen $n$, a legnagyobb csúcs. Ugyanis amikor összegyűjtjük a leveleket, akkor legalább két lehetőséghez jutunk. A minimális levél tehát biztos nem $n$ lesz. Speciálisan $T_{n-1}$ egyetlen csúcsa $n$ lesz, ami egyben $v_{n-1}$ szomszédja.

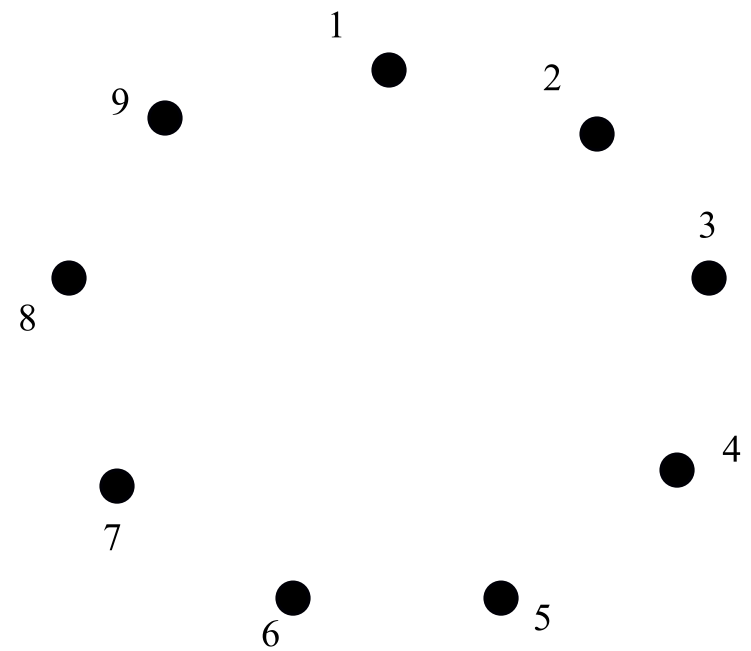
Megadjuk ezek után a kód visszafejtését, ami igazolja, hogy a Prüfer-kódolás bijekció. Ehhez vegyük észre, hogy egyrészt levél nem szerepel a Prüfer-kódban, másrészt minden olyan csúcs, ami nem levél elő fog fordulni. Így a levelek halmaza pont a kódban nem szereplő csúcsok halmaza. $v_1$ ennek minimális eleme: $v_1 = \min \overline{\{k_1, \ldots, k_{n-2}\}}$. $v_2$ rekurzíven meghatározható. Azaz $v_2$ a minimális elem $\{k_2, \ldots, k_{n-2}\}$ komplementeréből, !! de a $V(T) - \{v_1\}$ halmazban !!. Azaz $v_2 = \min \overline{\{v_2, k_2, \ldots, k_{n-2}\}}$. Általában $v_i = \min \overline{\{v_1, \ldots, v_{i-1}, k_i, \ldots, k_{n-2}\}}$.

Az érdeklődő hallgató beláthatja, hogy az így leírt $v_i$ sorozat a kódban lévő $k_i$ csúcsokkal (és $k_{n-1} = n$ csúccsal) mint szomszédokkal egy fát ír le, továbbá a hozzárendelés a Prüfer-kódolás inverze.

**Példa.**

n=9

A kód: 8 2 2 1 7 8 5



# 5. + A Cauchy—Binet-féle formula bizonyítása

A teljesség kedvéért vázoljuk a Cauchy—Binet-formula bizonyítását.

Tekintsük az alábbi determinánst:

$$D = \det \begin{array}{c} \\ \mathcal{S}\{ \\ \mathcal{O}\{ \end{array} \left[ \begin{array}{c|c} \overbrace{\phantom{0}}^{\mathcal{S}} & \overbrace{\phantom{A}}^{\mathcal{O}} \\ 0 & A \\ \hline B^T & I \end{array} \right],$$

ahol az $A$ és $B$ (közös méretű) mátrixok sorait az $\mathcal{S}$, oszlopait a $\mathcal{O}$ halmazzal azonosítottuk. Feltehető, hogy $\mathcal{S} = [n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ és $\mathcal{O} = [m] = \{1, 2, \ldots, m\}$. A $D$ mátrix sorai és oszlopai is $\mathcal{S}\dot{\cup}\mathcal{O}$-val azonosíthatók. Vigyáznunk kell mert az $[n]$ és $[m]$ halmazok nem diszjunktak így igazából 1 indexű sorból kettő van: $1_{\mathcal{S}}$ és $1_{\mathcal{O}}$. A $D$ mátrix első sorának indexe az $\mathcal{S}$-beli 1. A $\mathcal{O}$-beli 1-nek megfelelő sor a $D$ mátrix $(n+1)$-edik sora.

$D$ **első kifejtése:** Használjuk a Laplace-tételt és fejtsük ki $D$-t az első $n$ sora szerint:

$$D = \sum_{\substack{F\subseteq\mathcal{O}\\|F|=n}} (-1)^{\sum_{i=1}^n i + \sum_{f\in F}(n+f)} \det A[F] \cdot \det(B^T|I)[\overline{F}].$$

Az $n$ elemű oszlophalmaz nem fut végig $\mathcal{S}\dot{\cup}\mathcal{O}$ összes $n$ elemű részhalmazán. A kihagyott tagoknak megfelelő szorzat első tényezőjének mátrixában van $\vec{0}$ oszlop, azaz determinánsa 0, a szorzat szummához való hozzájárulása 0. A Laplace-formulában szereplő előjelek a kiválasztott részmátrix sorainak, oszlopainak indexeitől függ. Mivel $F \subset \mathcal{O}$, ezért egy $f \in F$ elemének megfelelő oszlop $D$ mátrixában az $n + f$-edik oszlop.

A $\det(B^T|I)[\overline{F}]$ determinánst fejtsük ki az első $n$ oszlopa szerint. Egy mátrix több oszlopa szerinti kifejtésben ki kell vennünk a kifejtő oszlopok $M$ mátrixából egy $F'$ sorhalmaza által meghatározott négyzetes részmátrixát. Jelöljük ezt $[F']M$-mel. A formula:

$$\det(B^T|I)[\overline{F}] = \sum_{\substack{F'\subseteq\mathcal{O}\\|F'|=n}} (-1)^{\sum_{i=1}^n i + \sum_{f'\in F} f'} \det[F']B^T \cdot \det[\overline{F'}]I[\overline{F}]$$

Könnyű látni, hogy a fenti összegnek csupán az az egy tagja lesz nemzéró, ahol $F = F'$. Ugyanis ha $F \neq F'$, akkor $\overline{F'} \neq \overline{F}$, és az egységmátrix $\overline{F}$ - ezek megfelelő oszlopaiból és $\overline{F'}$-nak megfelelő soraiból álló részmátrixban ekkor lesz csupa nulla sor, ami azt jelenti, hogy $\det[\overline{F'}]I[\overline{F}] = 0$. Ha $F = F'$, akkor $\det[\overline{F'}]I[\overline{F}] = 1$. Ezért a fenti egyenlőség az alábbi formulára redukálódik.

$$(-1)^{\sum_{i=1}^n i + \sum_{f\in F} f} \det[F]B^T = (-1)^{\sum_{i=1}^n i + \sum_{f\in F} f} \det(B[F])^T = (-1)^{\sum_{i=1}^m i + \sum F} \det B[F].$$

Innen

$$D = \sum_{\substack{F\subseteq\mathcal{O}\\|F|=n}} (-1)^{2\sum_{i=1}^n i + 2\sum_{f\in F} f + n^2} \det A[F] \cdot \det B[F] == \sum_{\substack{F\subseteq\mathcal{O}\\|F|=n}} (-1)^n \det A[F] \cdot \det B[F],$$

hiszen $-1$ kitevőjében a páros tagok elhagyhatok és az $n^2$ tag a vele azonos paritású $n$-re cserélhető.

**D második kifejtése.**

$$D = \det \left[\begin{array}{ccc|cccc} 0 & \dots & 0 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jm} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \\ \hline b_{11} & \dots & b_{n1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ b_{12} & \dots & b_{n2} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1m} & \dots & b_{nm} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right].$$

Átalakítjuk a determinánst úgy, hogy a $j$ sorhoz $(1 \leq j \leq m)$ hozzáadjuk az első $\mathcal{O}$-sor $-a_{j1}$-szeresét, a második $\mathcal{O}$-sor $-a_{j2}$-szeresét, és így tovább. Ezen elemi átalakítások után a következő összefüggéshez jutunk

$$D = \det \left[\begin{array}{ccc|cccc} c_{11} & \dots & c_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{j1} & \dots & c_{jn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline b_{11} & \dots & b_{n1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ b_{12} & \dots & b_{n2} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1m} & \dots & b_{nm} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right],$$

ahol az átalakított mátrix bal felső sarkában szereplő $C$ mátrix $u$-adik sorának $v$-edik eleme éppen $A$ $u$-adik sorvektorának és $B^T$ $v$-edik oszlopvektorának belső szorzatának ellentettje, azaz $C = -A \cdot B^T$. Így

$$D = \det \left[\begin{array}{c|c} C & 0 \\ \hline B^T & I \end{array}\right] = \det C = \det(-A \cdot B^T) = (-1)^n \det A \cdot B^T.$$

A két kifejtés eredményét összevetve kapjuk a Cauchy-Binet-féle tételt.