Gráfelmélet/Diszkrét Matematika MSc hallgatók számára

Extremális gráfelmélet

2013. Előadó: Hajnal Péter

1. Turán Pál tétete: az extremális gráfelmélet kezdete

Emlékeztető. A G gráfban $K \subset V(G)$ egy *klikk*, ha tetszőleges két különböző eleme szomszédos.

$$\omega(G) = \max\{|K| : \ K \text{ klikk}\}$$

Egy G gráf esetén az $F \subset V(G)$ halmazt *független halmaznak* nevezzük, ha bármely $e \in E(G)$ esetén e-nek nincs mindkét végpontja F-ben.

Legyen $\alpha(G)$ az a maximális k szám, amelyre G-ben van k elemű független ponthalmaz.

A G gráfban $L \subset V(G)$ egy *lefogó halmaz*, ha tetszőleges $e \in E(G)$ élnek van L-beli végpontja.

$\tau(G) = \min\{|L| : L \text{ lefogó halmaz}\}$.

Észrevétel. Legyen G egy gráf, H azon pontok halmaza, amelyekre támaszkodik hurokél és G^0 a G gráf egyszerűsítettje (hurokéleket elhagyjuk, párhuzamos élseregekből egyet-egyet hagyunk). Ekkor

$$\omega(G) = \omega(G^0), \qquad \alpha(G) = \alpha(G^0 - H), \qquad \tau(G) = \tau(G^0 - H) + |H|.$$

Észrevétel. (i) Legyen G egy gráf, és $G_1, G_2, \ldots, G_k$ a komponensei. Ekkor

$$\alpha(G) = \sum_{i=1}^{k} \alpha(G_i), \qquad \tau(G) = \sum_{i=1}^{k} \tau(G_i),$$

$$\omega(G) = \max\{\omega(G_i) : \ i = 1, 2, \ldots, k\}.$$

(ii) Legyenek $B_1, B_2, \ldots, B_l$ a G gráf blokkjai (kétszeresen összefüggő komponensei). Ekkor

$$\omega(G) = \max\{\omega(B_i) : \ i = 1, 2, \ldots, l\}.$$

A fenti észrevételek alapján a legtöbb α, τ, illetve ω-ra vonatkozó kérdés esetén feltehető, hogy a vizsgált gráf egy összefüggő egyszerű gráf.

Észrevétel. Legyen G egy egyszerű gráf.

(i) $F \subset V(G)$ akkor és csak akkor független, ha $\overline{F} = V(G) - F$ lefogó.

(ii) $F \subset V(G)$ akkor és csak akkor független G-ben, ha $F \subset V(G)$ klikk $\overline{G}$-ben, G komplementerében.

(iii) $L \subset V(G)$ akkor és csak akkor lefogó halmaz G-ben, ha $\overline{L} = V(G) - L$ klikk $\overline{G}$-ben, G komplementerében.

1. Következmény. *(i)* $|V(G)| = \tau(G) + \alpha(G)$, *azaz* $\alpha(G) = |V| - \tau(G)$.

(ii) Egyszerű gráf esetén $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$.

(iii) Egyszerű gráf esetén $\tau(G) = |V| - \omega(\overline{G})$.

A fenti észrevétel azt mutatja, hogy a legtöbb esetben az α, τ és ω függvényekre vonatkozó feladatok ekvivalensek.

A továbbiakban azt vizsgáljuk milyen nagy méretű független ponthalmaz kereshető/garantálható egy adott gráfban. Nagy független ponthalmaz keresésére könnyen tervezhető egy egyszerű mohó algoritmus.

2. Algoritmus. `Input:` `Egy` G `egyszerű gráf`
`Output:` `Egy` F `független ponthalmaz`

Inicializálás:
`Legyen` $F := \emptyset$.
`// `F` egy független halmaz, amelyet az algoritmus során mohó`
`// módon növelünk.`
$T := V(G)$.
`// `T` a túlélő csúcsok halmaza, amely vizsgálata ezek után`
`// következik.`
`Amíg` $T \neq \emptyset$ **Mohó növelés:**
`Válasszunk ki egy tetszőleges `x` csúcsot `T`-ból.`
`// `x`-szel növeljük `F`-et`
$K \leftarrow K \cup \{x\}$
$T \leftarrow T - \{x\} - N_T(x)$
`// Az `x` csúcs beválasztását a „nem-szomszédai” élik túl.`

3. Lemma. *A mohó független ponthalmazt kereső algoritmus outputjának mérete legalább*

$$\frac{|V(G)|}{D(G)+1}.$$

Bizonyítás. Minden mohó növelési lépésben T legfeljebb $D(G)+1$ csúccsal csökken. Az output mérete megegyezik a növelési lépések számával, amelyek során T a kezdeti $|V(G)|$ elemszámról 0-ra csökken. Azaz a növelési lépések száma legalább $|V(G)|/(D(G)+1)$. ■

Megjegyzés. A bizonyítás alapgondolata egyszerű, érdemes összefoglalni, Azt mondhatjuk, hogy minden növelési lépésnél T-ból „leharapunk” egy darabot. A leharapott rész elemszámát felülről becsültük. Az algoritmus során egész T-t „megettük”, így a harapások számára egy alsó becslés adódott.

A fenti algoritmusban semmit sem mondtunk a választott x-ről. Egy természetes heurisztikával algoritmusunk javítható. Célunk minél több harapás szám elérése. Így x-re egy logikus választás az a csúcs T-ből, amely a legkisebb harapáshoz vezet, azaz amelynek legkevesebb szomszédja van T-ban. (Egyszerű gráfok esetén egy minimális fokú csúcsot választunk $G|_T$-ból.)

4. Algoritmus. Inializálás:

```
Legyen F := ∅.
// F egy független ponthalmaz, amelyet az algoritmus során mohó
// módon növelünk.
T := V(G).
// T a túlélő csúcsok halmaza, amely vizsgálata ezek után
// következik.
Amíg T ≠ ∅ Mohó növelés:
   Válasszunk ki egy olyan x csúcsot T-ből, amelynek minimális
   számú szomszédja van G|_T-ben.
   F ← F ∪ {x}
   // x-szel növeljük F-et
   T ← T − ({x} ∪ N_T(x))
   // A beválasztott x-szel együtt szomszédait is kiveszük a
   // túlélő csúcsok halmazából.
```

A kis módosítás jelentős javításhoz vezet.

5. Tétel. *A módosított mohó független halmazt kereső algoritmus outputjának mérete legalább*

$$\frac{|V(G)|}{\overline{d}(G)+1},$$

ahol $\overline{d}(G)$ *az átlagos fokszám, azaz* $\overline{d}(G) = \frac{\sum_{x\in V} d(x)}{|V|} = \frac{2|E|}{|V|}$.

Bizonyítás. Legyen G egy tetszőleges egyszerű gráf és futassuk a módosított mohó algoritmust rajta.

Legyen H_i az i-edik növelési lépésnél T-ből elhagyott csúcsok halmaza (az i-edik harapás). x_i legyen az i-edik növelési lépésnél kiválasztott csúcs. Ekkor $x_i \in H_i$. Nyilván $V(G) = H_1 \dot\cup H_2 \dot\cup \ldots \dot\cup H_\ell$, ahol ℓ a növelési lépések száma, azaz az output mérete. Legyen $\mathcal{E} = \mathcal{E}(H_1, H_2, \ldots, H_\ell)$ az az egyszerű gráf, ahol két pont akor és csak akkor szomszédos, ha ugyanahhoz az H_i-hez tartzonak.

A bizonyítás „lelke” a következő észrevétel: minden x csúcsra $d_G(x) \geq d_{\mathcal{E}}(x)$, speciálisan $|E(G)| \geq |E(\mathcal{E}(H_1, \ldots, H_\ell))|$. Valóban: Egy $x \in H_i$ csúcsban összefutó éleket két csoportba sorolhatunk: $H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_{i-1}$-be, illetve $H_i \cup \ldots \cup H_\ell$-be vezető élek. Ezek száma legyen $d^{\text{hátra}}(x)$, illetve $d^{\text{előre}}(x)$. Tudva, hogy $x \in H_i$ $d_{\mathcal{E}}^{\text{hátra}}(x) = 0$, illetve

$$d_{\mathcal{E}}^{\text{előre}}(x) = |H_i| - 1 = d_G^{\text{előre}}(x_i) \geq d_G^{\text{előre}}(x).$$

Természetesen $\mathcal{E}$ az algoritmusunk G-n történő futása alatt alakul ki, speciálisan függ G-től. Tetszőleges G-t feltételezve $\mathcal{E}$-ről csak egy struktúrális ismeretünk van: ℓ komponense van, mindegyik teljes. Ezen ismeret alapján csak G pontszáma és ℓ függvényében adhatunk egy alsó becslést az élszámára.

Legyen $h_i = |H_i|$. Ekkor

$$|E(\mathcal{E})| = \sum_{i=1}^{\ell} \binom{h_i}{2},$$

ahol az ℓ darab h_i összege $|V|$. A Jensen-egyenlőtlenség alapján ($\binom{x}{2} = x(x-1)/2$ konvex függvény) ez akkor lesz minimális, ha mindegyik h_i átlagos nagyságú. Azaz

$$|E(\mathcal{E})| \geq \ell \binom{|V|/\ell}{2}.$$

Így

$$|E(G)| \geq \ell \binom{|V|/\ell}{2},$$

ahol ℓ az algoritmusunk által kiszámolt független halmaz mérete. A bizonyítandó egyenlőtlenség egyszerű rendezéssel kapható. ■

A tétel bizonyításában szereplő ötletek egy kicsit hatékonyabban is alkalmazhatók. A Jensen-egyenlőtlenség éles, de optimalitását olyan h_i értékek adják, amik nem szükségszerűen természetes számok. Így élessége nem szükségszerű esetünkben.

Tegyük fel, hogy algoritmusunk nem választ ki $\ell + 1$ csúcsot (az ℓ-edik vagy korábbi csúcs kiválasztása után kimeríti a gráfot). Ekor is definiálható $H_1, \ldots, H_\ell$ csupán elképzelhető, hogy a halmazsorozat néhány utolsó eleme üres, 0 elemű. A bizonyításban meghatároztunk egy alsó becslést az élszámára. Ügyesebben dolgozva a pontos minimum is adódik. Jelöljük ezt minimumot $\mu_{n,\ell}$-el.

Az új észreveéteünk: Ha G élszáma kisebb mint $\mu_{n,\ell}$, akkor algoritmusunk garantáltan legalább $\ell + 1$ pontot kiválaszt.

Definíció. Egy halmaz k osztályra történő osztályozására azt mondjuk, hogy osztályai *majdnem ugyanakkorák* vagy az osztályozás *kiegyensúlyozott*, ha a következő ekvivalens állítások egyike/mindegyike teljesül

(i) Minden O osztályra $|O| \in \left\{ \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor, \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil \right\}$.

(ii) Bármely két, O és O', osztályra $||O| - |O'|| \leq 1$.

(iii) $n - k \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$ darab $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ méretű és $k - \left(n - k \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor\right)$ darab $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$ méretű osztály van.

Definíció. $T_{n,k}$ (n pontú, k részes) Turán-gráf csúcshalmaza V, amelyre $|V| = n$ és a csúcshalmazt k diszjunkt osztály adja ki: $V = O_1 \dot\cup \ldots \dot\cup O_k$, ahol az osztályok „majdnem” ugyanakkorák.

A Turán-gráf (amely egyszerű gráf) éleit a következőben írjuk le: x és y akkor és csak akkor szomszédosak, ha különböző osztályokba esnek.

6. Lemma.

$$\mu_{n,\ell} = |E(\overline{T}_{n,\ell})|.$$

Bizonyítás. (Vázlat) Tegyük fel, hogy egy $\mathcal{E}$ gráf koponenseinek csúcs-osztályozása nem kiegyenesúlyozott. Ekkor található két osztály, amelyek méretének különbsége legalább kettő. Változtassuk meg $\mathcal{E}$-t: A fenti két osztály közül a kisebbet növeljük meg egy csúccsal a nagyobb osztályból. A többi osztályt hagyjuk meg. Így egy módosított $\mathcal{E}$ gráfhoz jutunk. Egyszerű ellenőrizni, hogy a módosítás csökkenti az élszámot. ■

Észrevételünk átfogalmazása ezekután:

7. Tétel. *Ha az n pontú G gráfra $|E(G)| < |E(\overline{T}_{n,\ell})|$, akkor a módosított mohó algoritmus legalább $\ell + 1$ pontot kiválaszt. Speciálisan $\alpha(G) \geq \ell + 1$.*

Azaz

8. Tétel. *Ha az n pontú G gráfra $\alpha(G) < k$, akkor $|E(G)| \geq |E(\overline{T}_{n,k-1})|$.*

Komplementárisan fogalmazva:

9. Tétel (Turán Pál). *Ha G n pontú egyszerű gráf és nem tartalmaz k elemű klikket, akkor*

$$|E(G)| \leq |E(T_{n,k-1})|.$$

Illetve

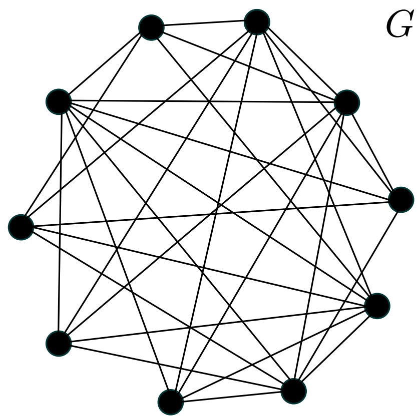
10. Tétel (Turán Pál). *Legyen G n pontú egyszerű gráf. Ha*

$$|E(G)| > |E(T_{n,k-1})|,$$

akkor tartalmaz k elemű klikket.

A tétel algoritmikus változata is igaz. A klikk keresésre megfogalmazott módosított mohó algoritmus egy n pontú egyszerű gráf inputon $|E(G)| > |E(T_{n,k-1})|$ esetén garantáltan talál egy k elemű klikket.

Példa. A független halmaz keresésére vonatkozó algoritmus könnyen átfogalmazható klikk kereső algoritmusra. Erre a következő animáció ad példát. Az algoritmus k elemű klikk mellett (melléktermékként) egy teljes k-részes gráfot, is kiszámol, ami fokszámban majorálja az inputot. Ezzel a Turán-tételt is bizonyítja.



Észrevétel. A Turán-tétel éles: $T_{n,k}$ Turán-gráf nem tartalmaz $k+1$ elemű klikket (ami olyan csúcshalmaz, amelynek bármely két eleme összekötött). Valóban, ha egy ponthalmaz mérete eggyel nagyobb, mint az osztályok száma, akkor a skatulya-elv miatt szükséges, hogy egy osztályból egynél több elemet vegyünk ki. A Turán-gráf definíciója viszont azt mondja, hogy ez a két elem nem összekötött, a kivett csúcshalmaz nem lehet klikk.

A $k+1$ elemű klikk hiánya egy kissé általánosabb észrevételből is adódik.

Észrevétel. $T_{n,k}$ összes részgráfja k színezhető (a gráfot úgy definiáltuk, hogy a k darab osztály felfogható k színosztálynak). Azaz $T_{n,k}$ nem tartalmaz R részgráfot, ha $\chi(R) \geq k+1$ (azaz R nem k színezhető).

2. Extremális gráfelmélet

A Turán-tétel egy speciális esete, amikor gráfunkban nincs 4 pontú klikk. Ekkor a tétel azt mondja ki, hogy nem lehet $|E(T_{n,3})|$-nál több élünk. A feltételünket úgy is megfogalmazhatjuk, hogy gráfunk nem tartalmazza a tetraéder gráfját részgráfként (minden testnek van egy egyszerű gráfja, ahol a test csúcsai a gráf csúcsai, élei pedig a gráf éleinek felelnek meg). Turán tétele bizonyítása után a következő kérdést tette fel:

Mi van más szabályos testekkel? Például hány éle lehet egy gráfnak, ha nincs benne oktaéder, vagy ha nincs benne kocka, vagy ha nincs benne dodekaéder?

Definíció.

$$ext(n;T) = \max\{|E(G)| : \ G \ n \text{ pontú, egyszerű gráf, } T \not\subseteq G\}.$$

T-re úgy hivatkozunk, hogy tiltott részgráf. n a csúcsméret. A továbbiakhoz hasznos, ha bevezetjük a következő jelölést: Az n pontú egyszerű gráfok osztályát jelölje $\mathcal{G}_n$. Tehát $G \in \mathcal{G}_n$ jelentése G egy n pontú egyszerű gráf.

Újból átfogalmazzuk Turán tételét: $ext(n;K_k) = |E(T_{n,k-1})|$.

Az $ext(n;T)$ függvény vizsgálatával kapcsolatos problémákat Turán-típusú kérdéseknek nevezzük. Ez az extremális gráfelmélet első kérdésköre. Az extremális gráfelméletben bizonyos feltételeknek eleget tevő gráfok közt nézzük meg, hogy bizonyos gráfparaméter milyen határok között változik. Azaz a paraméter milyen extremális értékeket vehet fel.

Megjegyezzük, hogy Turán Pál kérdése a kocka gráfjára mind a mai napig megoldatlan kérdés.

Azt is megjegyezzük, hogy a háromszög tiltásának esete már a huszadik század elején Mantel egy munkájában megoldott volt. A kérdéskör elméletté fejlődése azonban Turán Pál eredményeinek és kérdéseinek köszönhető. Közeli munkatársa, Erdős Pál különösen sokat tett az extremális gráfelmélet és általában az extremális kombinatorika fejlődéséhez.

3. Extremális gráfelméleti eredmények

A továbbiakban feltesszük, hogy a T tiltott gráfban nincsenek izolált csúcsok: Az izolált csúcsok hozzáadása/elvétele csak ott játszik szerepet, ahol T mérete meghaladja n-et.

Észrevétel. Legyen I a két pontot és egyetlen élt tartalmazó gráf. Ekkor $ext(n; I) = 0$.

Ha egy élt tiltunk, akkor nyilván a maximális élszám nulla lesz.

Észrevétel. Legyen $\wedge$ a három pontot és két élt tartalmazó gráf. Ekkor $ext(n; \wedge) = \lfloor n/2 \rfloor$.

Ha két összefutó élt tiltunk, akkor minden csúcs foka 0 vagy 1. Azaz a fokok összege legfeljebb n. Az élszám legfeljebb $n/2$. Mivel az élszám mindig egy természetes szám, ezért felső becslésünk igazából $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

A másik irányú egyenlőtlenség bizonyításához konstruálnunk kell egy $\wedge$ részgráfot nem tartalmazó gráfot: Ez egy teljes párosítás n vagy $n-1$ csúcson (ha n paritásától függően). Ennek élszáma $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Észrevétel. Legyen M_2 a négy pontot és két nem összefutó élt tartalmazó gráf (azaz egy két élű párosítás). Ekkor $ext(n; M_2) = n - 1$, ha $n \geq 4$.

Ennek ellenőrzése az érdeklődő hallgatók számára egy egyszerű feladat.

11. Következmény. *Ha T olyan, hogy $|E(T)| \geq 2$, akkor elég nagy n esetén $ext(n; T) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.*

A továbbiakban legalább két élű tiltott részgráfokkal foglalkozunk. A körmentes tiltott gráfok esete egyszerű.

12. Tétel. *Legyen T erdő (azaz körmentes gráf; azaz olyan gráf, amely a komponensei fák). Legyen T-nek legalább két éle. Ekkor $\alpha_T \cdot n \leq ext(n; T) \leq \beta_T \cdot n$, ahol $\alpha_T, \beta_T > 0$. Azaz $ext(n; T)$ nagyságrendje lineáris.*

A tételben szereplő alsó becslés már ismert, hiszen tiltott részgráfunknak legalább két éle van. Mielőtt a tétel nehezebb részét igazolnánk felidézünk két fogalmat és belátunk egy lemmát.

Jelölés. Legyen H egy gráf. Ekkor $\overline{d}(H)$ a H gráf átlagos foka, $\delta(H)$ a H gráf minimális foka.

13. Lemma. *$G \in \mathcal{G}_n$ esetén létezik olyan R részgráf ($R \subseteq G$), amelyre $\delta(R) \geq \frac{\overline{d}(G)}{2}$ teljesül.*

Megjegyzés. Nyilván a feszített részgráfok közt kell keresgélnünk.

Bizonyítás. Egy algoritmus leírásával kezdjük a bizonyítást.

14. Algoritmus. *Input: G egyszerű gráf. Output: R feszített részgráf, amely minden foka legalább $\overline{d}/2$.*
$A := G$
`// `A` az aktuális gráf, kezdetben `G`.`
`Amíg találunk `$x \in V(A)$`-t,úgy, hogy `$d_A(x) < \frac{\overline{d}}{2}$
    $A \leftarrow A - x$.
`// Ha egy csúcs foka túl kicsi, akkor nem lehet az outputban.`

A lemma ekvivalens azzal, hogy az algoritmus nem „üríti ki" G-t. Indirekten érvelünk. Tegyük fel, hogy a fenti algoritmus az összes csúcsot eltörli. Ekkor az algoritmus ad egy kiürítési sorrendet $V(G)$re, jelöljük ezt π-vel: $\pi : v_1, \ldots, v_n$, azaz v_i az i-ediknek elhagyott csúcs ($n = |V(G)|$).

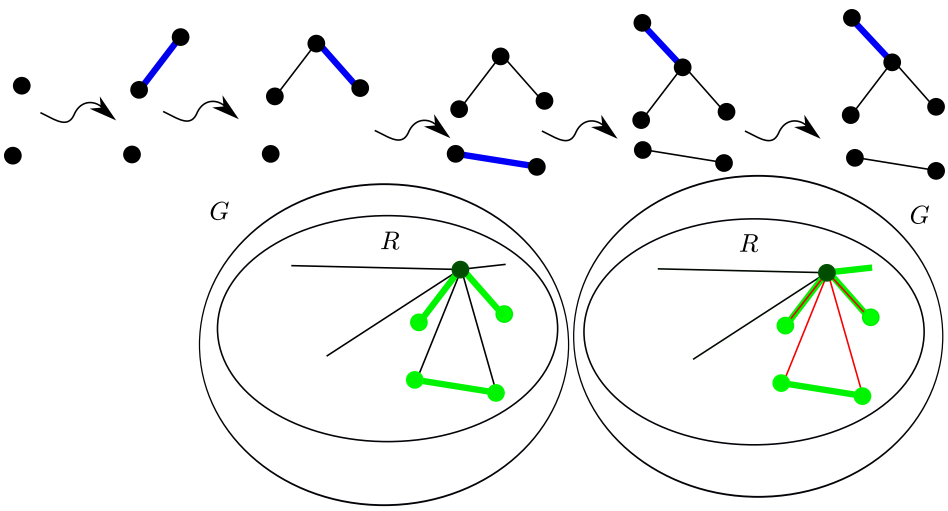
Tudjuk: v_1-nek kevesebb mint $\frac{\overline{d}}{2}$ szomszédja volt a G gráfban. Utána a v_2-nek a v_1 elhagyása után kevesebb mint $\frac{\overline{d}}{2}$ szomszédja volt. Bevezetünk ehhez egy jelölést: $d_\pi^{\text{hátra}}(v)$ a v csúcs nagyobb indexű szomszédainak száma. Általában igaz, hogy $d_\pi^{\text{hátra}}(v) < \frac{\overline{d}}{2}$, azaz a kiürítési sorrendre vonatkozólag minden csúcs „hátrafoka" kevesebb mint $\frac{\overline{d}}{2}$.

Észrevétel: $\sum d_\pi^{\text{hátra}}(v) = |E|$, azaz a hátrafokok összege pontosan kiadja az élszámot. Ez az összeg a kiürítési sorozat esetén határozottan kisebb, mint $n\frac{\overline{d}}{2}$. Viszont az élek száma pontosan $n\frac{\overline{d}}{2}$. Ez ellentmondás, ami a lemmát bizonyítja. ■

Ezek után már egyszerű a bizonyítás vége.

Bizonyítás. (A tételé.) Továbbra is azt akarjuk bebizonyítani, hogy az extremális érték $< \beta_T n$. Pontosan megadjuk β_T-t: Legyen T egy tetszőleges erdő. Legyen $G \in \mathcal{G}_n$, amelyre $|E(G)| \geq |V(T)|n$ (azaz G-ben az átlag fok: $\frac{\sum d_i}{n} \geq \frac{2|V(T)|n}{n} = 2|V(T)|$). Ekkor G biztos tartalmaz T-vel izomorf részgráfot. A lemma alapján G-ben van olyan R részgráf, amelyre $\delta(R) \geq |V(T)|$. T példányát már R-ben megtaláljuk.

Valóban.T-t építsük fel egy üres gráfból ághajtások alkalmazásával. Ez könnyen megtehető: annyi ponttal indulunk ahány komponense van T-nek, mondjuk c. T_0 legyen a c pontú üres gráf. Mindegyik komponens egy fa, ami egyetlen csúcsból ághajtásokkal felépíthető. A komponensek egyenkénti felépítésével egy $\{T_i\}_{i=0}^{|E(T)|}$ gráfsorozatot kapunk, amelyben T_i-nek i éle van, továbbá $T_{|E(T)|} = T$. Indukcióval igazoljuk, hogy mindegyik T_i megtalálható R-ben.



Ha T_i-t megtaláltuk, akkor mohó módon ezt a részgráfot terjesztjük ki egy T_{i+1}-gyel izomorf részgráffá. Legyen x az a csúcs, amiből induló ághajtás adja T_{i+1}-et. x minden olyan szomszédja, ami nem reprezentál eddigi csúcsot (és az ehhez vezető él) megteszi az indukciós lépést. Ilyen szomszéd viszont könnyen található, hiszen legalább $|V(T)|$ szomszéd van, míg T_i csúcsait kevesebb mint $|V(T)|$ csúcs reprezentálja. ∎

A fáknál jóval bonyolultabb gráfokra is tudunk valamit.

Észrevétel. Ha T olyan, hogy $\chi(T) = k$ akkor $ext(n; T) \geq |E(T_{n,k-1})|$.

A fenti észrevételnél jóval mélyebb az alábbi tétel.

15. Tétel (Erdős—Stone, Erdős—Simonovits). *Ha T olyan, hogy $\chi(T) = k$, akkor $ext(n; T) = |E(T_{n,k-1})| + o(n^2)$.*

Ugyanez a tétel részletesebben:

16. Tétel (Erdős—Stone, Erdős—Simonovits). *(i) Legyen T olyan, hogy $\chi(T) = k \geq 3$ (azaz $k-1$ — a T-hez tartozó Turán-gráf osztályszáma — legalább 2). Ekkor $ext(n; T) = |E(T_{n,k-1})| + o(n^2)$ (azaz a $o(n^2)$ tag egy maradéktag).*

(ii) Legyen T olyan, hogy $\chi(T) = 2$. Ekkor $ext(n; T) = o(n^2)$ (a korábbi maradéktag főtaggá vált).

A fentiek alapján azonosítani tudjuk az érdekes eseteket: Ha T páros, kört tartalmaz, akkor a fentiek nem sokat mondanak. Minden más esetben $ext(n; T)$ nagyságrendje kiolvasható az ismertetett eredményekből.

Az érdekes esetben nagyon kevés pontos eredmény ismert. Ha a tiltott részgráf C_4, C_6, C_{10} vagy $K_{2,k}$, $K_{3,k}$, akkor $ext(n; T)$ nagyságrendje ismert. C_8, C_{12}, C_{14}, …, $K_{4,4}$, $K_{4,5}$, …, továbbá a kocka esete nem ismert.

Csak egy eredményt emelünk ki. Amihez előkészületek szükségesek.

Legyen $\mathbb{F}$ egy véges test. (Gondolhatunk $\mathbb{F}_p$-re, ahol p egy prím. Azaz $\mathbb{F}_p$ a $\{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ halmaz a modulo p aritmetikával.)

A valós projektív sík koordináta geometriája a valós számokon alapul. Ahogy az Euklideszi sík koordináta geometriája is a valós számok aritmetikáján alapulva egy geometriai struktúrát hoz létre. A konstrukciók véges tesetekre is végrehajthatók. Így kapjuk a $PG(2, \mathbb{F})$ projektív síkot (a 2-es a dimenzióra utal), amely koordináta geometriája az $\mathbb{F}$ testen alapul. (PG a projektív geometria két szavának kezdőbetűiből ered.) Ebben a geometriai struktúrában a pontok, egyenesek száma véges. A véges projektív geometriák alappéldáját az alábbiakban írjuk le.

Definíció. $\mathbb{F}^3 = \{(a, b, c) : a, b, c \in \mathbb{F}\}$. Ezen a halmazon definiálunk egy relációt: $(a, b, c) \sim (a', b', c')$ akkor és csak akkor, ha található olyan nem-nulla $\lambda \in \mathbb{F}$, hogy $(a, b, c) = \lambda(a', b', c')$. Ez egy ekvivalenciareláció. $(0, 0, 0)$ egy egyelemű ekvivalenciaosztályt alkot. Minden más ekvivalenciaosztály $|\mathbb{F}| - 1$ elemű. Ezen ekvivalenciaosztályok halmaza alkotja a geometriánk $\mathcal{P}$ ponthalmazát. Azaz $\mathbb{F}^3 - \{(0, 0, 0)\}|_\sim$, ennek elemeit $[a, b, c]$-vel, vagy $(a : b : c)$-vel szokás jelölni. Mi az első jelölést használjuk. Az egyenesek $\mathcal{E}$ halmazát ugyanezen ekvivalenciaosztályokkal azonosítjük. $[a, b, c]^*$ az (a, b, c) vektor ekvivalenciaosztályának neve, ha egyenest reprezentál. $[a, b, c]$ és $[a', b', c']^*$ akkor és csak akkor illeszkedik, ha $a \cdot a' + b \cdot b' + c \cdot c' = 0$.

Az így kapott geometriai struktúra minden illeszkedési tulajdonságot teljesít, amit a valós projektív síkon megszoktunk (például bármely két különböző egyenes pontosan egy pontban metszi egymást). Ezek ellenőrzése az $\mathbb{F}$ feletti lineáris algebra ismerősei számára egyszerű gyakorlatok.

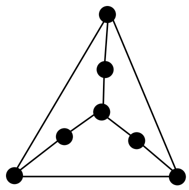
Megjegyzés. A fentiekben egy algebrai struktúrából konstruáltunk egy geometriait, amely szép geometrai tulajdonságokkal rendelkezik. A fordított logika is természetes. Elvárjuk a szép geometriai tulajdonságokat (axiómák) és keresünk ezt teljesítő modelleket. Esetünkben (az axiómák leírását itt nem részletezzük) ezek a véges projektív síkok. $PG(2, \mathbb{F})$ csak egy modell (igazábol egy modell-sorozat) a sok lehetőség közül.

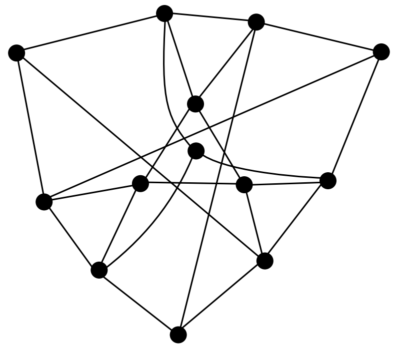
A fentiek alapján nyilvánvaló, hogy $PG(2, \mathbb{F})$-ben $|\mathcal{P}| = |\mathcal{E}| = (|\mathbb{F}|^3 - 1)/(|\mathbb{F}| - 1) = |\mathbb{F}^2| + |\mathbb{F}| + 1$. Az is könnyen számolható, hogy minden egyenesre $|\mathbb{F}| + 1$ pont illeszkedik.

Konstrukció (Sok élt tartalmazó gráf C_4 nélkül). Legyen p egy prímszám. Definiálunk egy G_p egyszerű gráfot.

G_p csúcsait $PG(2, \mathbb{F}_p)$ pontjai alkotják. Két csúcs, $[a, b, c]$ és $[a', b', c']$ akkor és csak akkor szomszédos ha $a \cdot a' + b \cdot b' + c \cdot c' = 0$. (Azaz az egyik csúcs koordinátáit pontként, a másikét egyenesként olvasva illeszkedő párt kapunk.)

Példa. A következő ábrán a $p = 2$ és $p = 3$ esetből adódó két gráfot láthatjuk.





Észrevétel. (i) *G_p-ben nincs négy hosszú kör.* Valóban, ha ilyen lenne, akkor felvátva pontnak, egyenesnek értelmezve a négy hosszú kör csúcsait két olyan egyenest kapnánk, ami két különböző pontban metszenék egymást. Ez pedig nem lehetséges.

(ii) $|V(G_p)| = p^2 + p + 1 =: n$.

(iii) Az $v = [a, b, c]$ csúcs szomszédai az $v^* = [a, b, c]^*$ egyenesre illeszkedő v-től különböző pontok. Azaz, ha a v pont nem illeszkedik v^* egyenesre, akkor $p + 1$ szomszédja van, különben p szomszédja van. Azon v pontok, amelyek illeszkednek a v^* egyenesre olyanok, hogy koordinátáik teljesítik az $x^2+y^2+z^2 = 0$ egyenletet (modulo p aritmetikában dolgozunk!). Ez az egyenlet geometriailag egy kúpszeletet ír le. Ismert, hogy pontainak száma $p + 1$. Azaz $p + 1$ darab csúcs foka p és így p^2 csúcs foka $p + 1$.

(iv) $2|E(G_p)| = p^2(p+1) + (p+1)p = p^3 + 2p^2 + p$, azaz $|E(G_p)| = (p^3 + 2p^2 + p)/2$.

Az észrevételből az élek pontszámtól való függésének nagyságrendjét emeljük ki: $|E| \sim \frac{1}{2}n^{3/2}$. Ez az extremális élszám helyes nagyságrendje.

17. Tétel.

$$ext(n, C_4) \sim \frac{1}{2}n^{\frac{3}{2}}.$$