Gráfelmélet/Diszkrét Matematika MSc hallgatók számára

Gráfok élszínezései

2013. Előadó: Hajnal Péter

1. Élszínezések alapfogalmai

Definíció. G gráf élszínezése $c : E(G) \to \mathbb{N}^+$ függvény. c egy k-élszínezése G-nek, ha $c(E(G)) \subseteq \{1, 2, \ldots, k\}$.

Definíció. c jó élszínezése G-nek, ha minden x csúcsra az ott összefutó éleknek $d(x)$ darab különböző színe van.

A következő optimalizálási feladat adódik: keressük azt a minimális k természetes számot, amellyel egy G gráf jól k-él-színezhető. E gráfparaméter neve: G élkromatikus száma, jelölése χ_e. Azaz

$$\chi_e(G) := \min\{k \in \mathbb{N}^+ : G\text{-nek van jó } k\text{-élszínezése}\}.$$

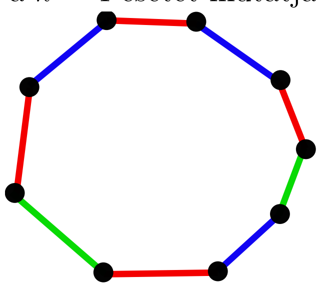
A hurokél akadálya a jó színezésnek: Ha van hurokél, akkor nem létezik jó élszínezés (az összefutó $d(x)$ él között ismétlődés van), ha nincs hurokél, akkor pedig létezik jó színezés (például ha minden él különböző színt kap, akkor jó színezésünk van).

Szoros kapcsolat van a párosítások és az élszínezések között: Egy gráf jó élszínezésében az azonos színű élek egy párosítást alkotnak a gráfban. Tehát jó színezés keresése ekvivalens az élhalmaz párosításokra történő osztályozásával.

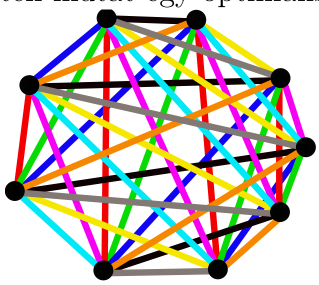
Emlékeztető. $\Delta(G) := \max_{x \in V(G)} d(x)$, a G gráf maximális fokszáma.

Nyilvánvalóan $\Delta(G) \leq \chi_e(G)$. Az alábbi példák mutatják, hogy az egyenlőtlenség két oldala között lehet különbség.

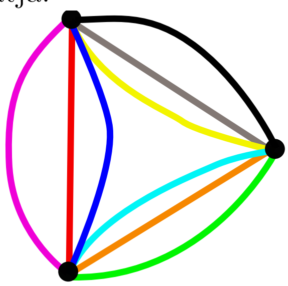
Példa. C_{2k+1} páratlan kör ($k \in \mathbb{Z}^+$). Könnyen látható, hogy $\Delta(C_{2k+1}) = 2$ és $\chi_e(C_{2k+1}) = 3$. Az alábbi ábra a $k = 4$ esetet mutatja.



Példa. K_{2k+1} páratlan pontú teljes gráf. Ekkor $\Delta(K_{2k+1}) = 2k$ és $\chi_e(K_{2k+1}) = 2k+1$. Az alábbi ábra kilenc pont esetén mutat egy optimális élszínezést.



Példa. Legyen T_k az a gráf, amelynek három csúcsa és bármely kettőt k párhuzamos él köti össze. Ekkor bármély két él szomszédos. Így $\Delta(T_k) = 2k$ és $\chi_e(T_k) = 3k$. Az alábbi ábra a $k = 3$ esetet mutatja.



Egy gráf élkromatikus számát a maximális fokszámmal már korlátoztuk alulról ($\Delta(G) \le \chi_e(G)$). A következő két tétel felső korlátot is ad.

1. Tétel (Shannon tétele). *Legyen G hurokél-mentes gráf. Ekkor*

$$\chi_e(G) \le \frac{3}{2}\Delta(G).$$

2. Tétel (Vizing tétele). *Legyen G egyszerű gráf. Ekkor*

$$\chi_e(G) \le \Delta(G) + 1.$$

Bizonyítás. Adott egy G egyszerű gráf. Be kell látnunk, hogy élei jól színezhetők a $P = \{1, 2, \dots, \Delta(G) + 1\}$ palettával.

Legyen $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ és legyen $G_i := G|_{\{v_1,\dots,v_i\}}$. i-re vonatkozó teljes indukcióval belátjuk az állítást G_i-re. Bizonyításunk konstruktív lesz, azaz G_i egy jó-él-színezéséből megkonstruálunk G_{i+1} jó-él-színezését. Azaz G_i élszínezését kiterjesztjük a v_{i+1}-re illeszkedő G_i-hez haladó élekre (amik kezdetben színezetlenek). Legyen F a G_i és v_{i+1} közötti élek halmaza, így $|F| = d|_{G_{i+1}}(v_{i+1}) =: d$.

G_i élszínezésének kiterjesztése fázisokban történik. Legyen $H := \{\text{színezetlen élek}\}$. Kezdetben $H = F$. A kiterjesztés során a H halmaz élei egyenként színt kapnak. Így $|H|$ csökken, amíg $H = \emptyset$ lesz. Ekkor térünk át a következő, v_{i+2} csúcsra.

Legyen $O := \{F\text{-beli élek, amiknek már osztottunk színt}\}$. Azaz $O \dot\cup H = F$ és $|O \dot\cup H| = |O| + |H| = d$.

Minden H-beli e élhez tartozik egy lehetséges színek halmaza. Azaz az aktuális színezésben megnézzük a két végpontjára illeszkedő színezett élek színeit (ezek $T(e)$ halmaza tiltott szín számára). $L(e) = P - T(e)$, azaz a palettánk nem tiltott színeinek halmaza.

Kezdetben minden $e \in H = F$ élre $|L(e)| \geq 2$. Valóban egy $xv_{i+1} \in H = F$ él esetén csak az x-re G_i-ben illeszkedő elek színei tiltottak. Ezen élek száma $d|_{G_i}(x) \leq d(x) - 1 \leq \Delta(G) - 1$. Így $|L(e)| = |P| - |\{$ x-re vagy v_{i+1}-re illeszkedő színezett éle színei$\}| \geq \Delta(G) + 1 - (\Delta(G) - 1) = 2$.

Az $L(e)$ halmazokból kiválasztunk egy preferált részt, amit $P(e)$-vel jelölünk. Azaz $P(e) \subset L(e)$, azaz $P(e)$ mindegyik eleme alkalmas szín e színezésére. Definiáljuk az alábbi $(\star)$ tulajdonságot, amit a kiterjesztés során végig megőrzünk:

$(\star)$ Mindegyik $P(e)$ egy- vagy kételemű, továbbá maximum egy H-beli élre lesz preferált színhalmaza egyelemű.

Ha e egy olyan él, amely preferált színhalmaza egyelemű, akkor kivételes élnek nevezzük e-t. Kivételes élekből vagy egy van vagy egy sincs.

Most lássuk a kiterjesztés legegyszerűbb esetét:

Mohó eset: *Van olyan s szín, ami egyetlen preferált halmazban szerepel.* Ha $s \in P(e)$ $(e \in H)$, akkor a korábbi színezés megtartása mellett e-nek az s színt adjuk. $H - e$ lesz a színezetlen élek új halmaza. Egy színezetlen f élre $L(f) = L(e) - \{s\}$. s egyedisége miatt megtarthatjuk a régi $P(e)$ halmazokat.

Sajnos ezt a mohó esetet nem használhatjuk mindig.

Nem mohó eset: *A preferált színek halmazaiban előforduló színek mindegyike több preferált halmazban is szerepel.* Azaz $s \in \bigcup_{e \in H} P(e)$ esetén s legalább kettő $P(e)$-ben szerepel.

Először igazolunk egy lemmát a nem mohó esetről.

3. Lemma. *A nem mohó esetben van olyan σ szín, amit nem osztottunk ki O elemein, de a preferált színek között sincs ott. Azaz $\sigma \notin c(O) = \{c(e) : e \in O\}$ és $\sigma \notin \bigcup_{e \in H} P(e)$.*

Lemma bizonyítása: Legyen $c(O)$ az F elemein eddig kiosztott színek halmaza, azaz az O-beli élek színeinek halmaza. O elemei összefutnak v_{i+1}-ben, azaz a színeik különbözőek, $|c(O)| = |O|$. A nem mohó esetben

$$|\bigcup_{e \in H} P(e)| \leq \frac{\sum_{e \in H} |P(e)|}{2} \leq 2\frac{|H|}{2} = |H|.$$

Azaz $c(O)$ és $\bigcup_{e \in H} P(e)$ együtt is egy legfeljebb

$$|O| + |H| = |F| = d = d|_{G_{i+1}}(v_{i+1}) \leq \Delta(G)$$

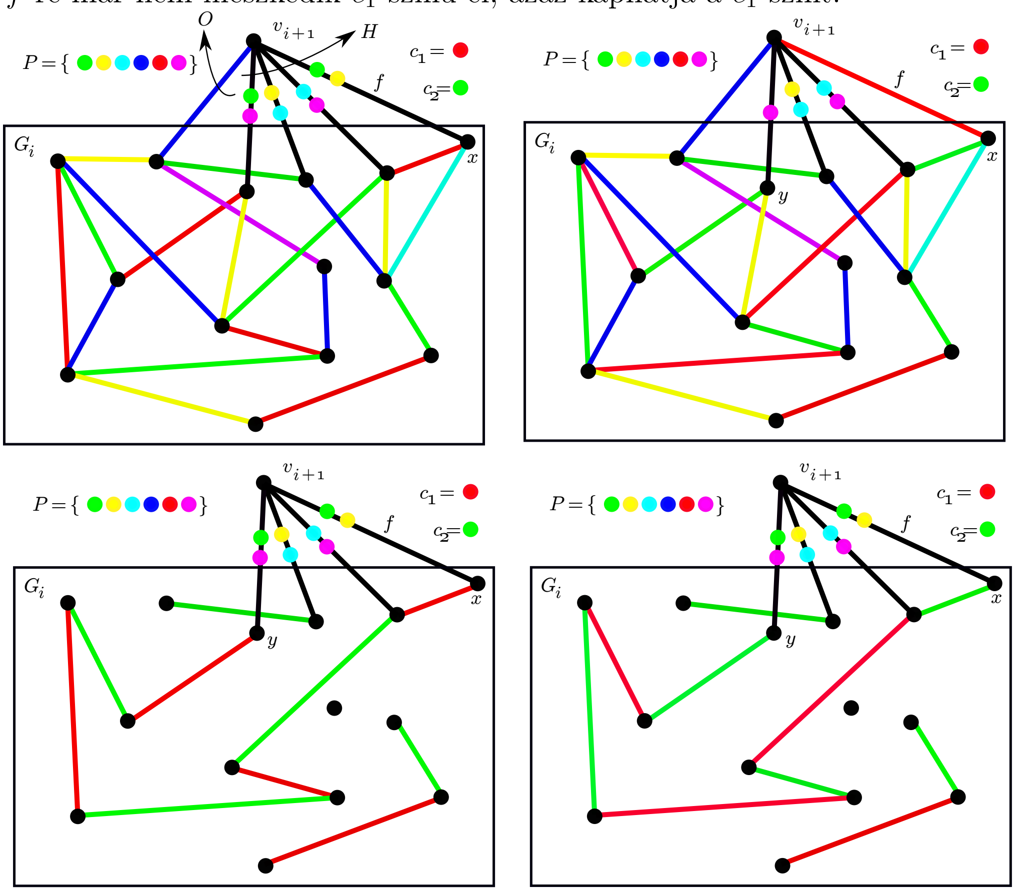
elemű színhalmazt adnak. Azaz palettánknak garantáltan lesz szabad színe. Q.e.d.

Legyen c_1 egy a lemma által garantált szín. Legyen c_2 az a szín, amelyre $\{c_2\}$ a kivételes él preferált színhalmaza, illetve tetszőles szín egy preferált halmazból, amennyiben nincs kivételes él. Legyen $f = xv_{i+1}$ az az él, amely a kivételes él, vagy amennyiben ilyen nincs, egy olyan él amely preferált színhalmazában szerepel c_2. Mindenképpen $c_2 \in P(f)$.

G_{i+1}-ből emeljük ki a c_1 és c_2 színű éleket: Összes $V(G_{i+1})$ csúcs és a c_1, c_2 színű élek gráfjában minden fok legfeljebb 2, azaz a komponensek színalternáló utak vagy körök.

Az x csúcs komponense szükségszerűen út: $c_2 \in P(f)$ és $P(f)$ definíciója miatt x-re nem illeszkedhet c_2 színű él. Legyen ez egy U xy-út, amiben x-re maximum egy c_1 színű él illeszkedik (elképzelhető, hogy x-re nem illeszkedik sem c_1, sem c_2 színű él sem).

U mentén cseréljük fel a színeket! Ekkor megmarad a színezés jó mivolta. Valamint f-re már nem illeszkedik c_1 színű él, azaz kaphatja a c_1 színt.

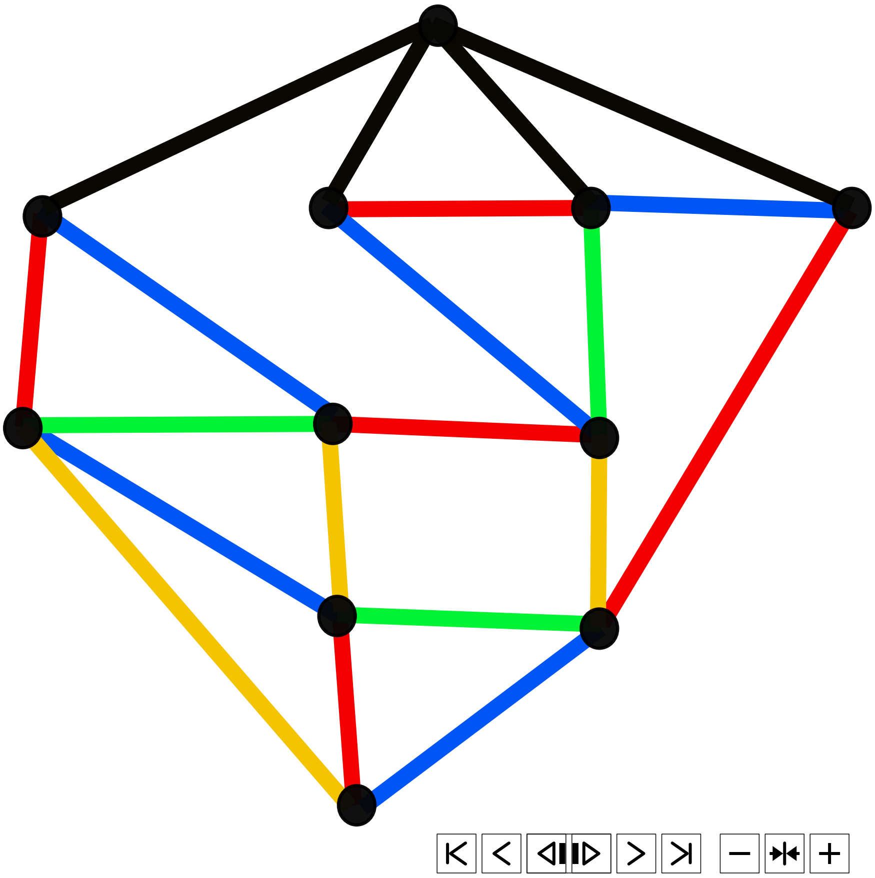


Az $L(e)$ halmazokat is újra kell értékelni: Azon éleknek, amelyek nem az U út valamelyik csúcsába vezetnek a lehetséges színhalmaza nem változik. Azon éleknek, amelyek az U út köztes csúcsába vezetnek szintén nem változik a lehetséges színhalmazuk!

Baj akkor van, ha v_{i+1}-ből vezet egy g él y-ba ($y \neq x$). g nem volt kivételes él, tehát ha $P(g) \leftarrow P(g) - \{c_2\}$ változtatást hajtjuk végre, akkor $P(g)$ egyeleművé változik vagy kételemű marad. A $(\star)$ tulajdonság mindenképpen megmarad! $\blacksquare$

Megjegyzés. A bizonyításból egy algoritmus is kiolvasható, ami egyszerű gráfokat a Vizing-korlát méretű palettával jól-élszínez.

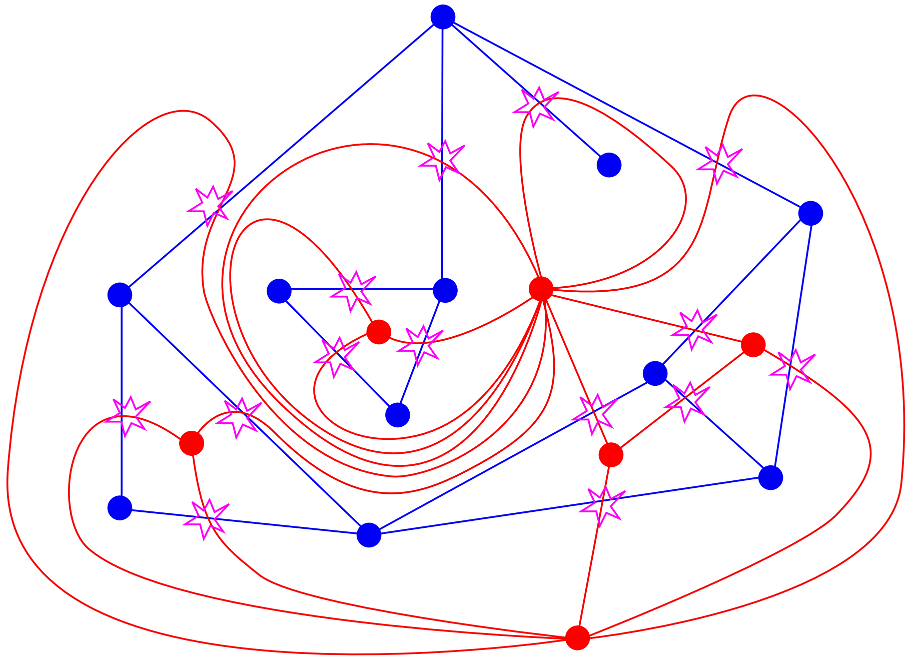
Példa. A megjegyzésben említett algoritmusra egy animációval is rávilágítunk. Az alábbi példa a Vizing-tétel bizonyításán alapuló algoritmus egy fázisára mutat példát:



2. Síkgráfok, négy-szín-tétel és élszínezések

Az élszínezési probléma fontos alkalmazásokkal rendelkezik. A gráfelméleti vizsgálata azonban már a XIX. században megkezdődött. Az ösztönző a négy-szín-sejtés volt. Manapság már tételként ismerjük ezt (angolul 4-color-theorem, rövidítve 4CT).

A továbbiakhoz fel kell idéznünk a síkrarajzolt gráfokról és duálisukról a BSc-s Kombinatorika kurzusban tanultakat. A következő ábrán egy síkrarajzolt gráfot (kék) és duálisát (piros) láthatjuk.



Az ábrán látható lila csillagok párbaállítják az eredeti és duális gráf éleit.

A következő táblázatban összefoglaljuk síkrarajzolt gráf és duálisa közötti sokrétű kapcsolatot.

EREDETI	DUÁLIS
G síkra rajzolt gráf	G^* síkra rajzolt gráf
tartományok/országok	csúcsok/fővárosok
élek	élek
közös határéllel rendelkező (szomszédos) tartományok	szomszédos csúcsok
tartományszínezés	csúcsszínezés
jó tartományszínezés (szomszédos tartományok különböző színűek)	jó csúcsszínezés
jó színezhetőség feltétele: nincs olyan él, amely mindkét oldalán ugyanaz a tartomány fekszik	jó színezhetőség feltétele: nincs hurokél
csúcsok	tartományok
egy csúcsban összefutó élek	egy tartományt határoló élek
fokszám	határ bejárásának hossza
Négy-szín-tétel ($4CT$): kétszeresen élösszefüggő síkra rajzolt gráf tartományai négy színnel jól színezhetők	Négy-szín-tétel ($4CT$): hurokélmentes síkra rajzolt gráf csúcsai négy színnel jól színezhetők
Színezés esetén feltehető: G háromreguláris	Színezés esetén feltehető: minden tartomány háromszög (gráfunk triangulált)

Megjegyezzük, hogy 3-regularitás esetén a mohó algoritmus minden gráfot jól csúcsszínez. Illetve duálisan triangulált síkrarajzolt gráf tartományai nyilvánvalóan jól 4-színezhetők.

A fentiek alapján a négy-szín-tétel megfogalmazható tartomány, illetve csúcsszínezési változatban is. A következő tétel egy harmadik ekvivalens alakot ad, amely élszínezési problémaként fogalmazza meg a központi kérdést/tételt.

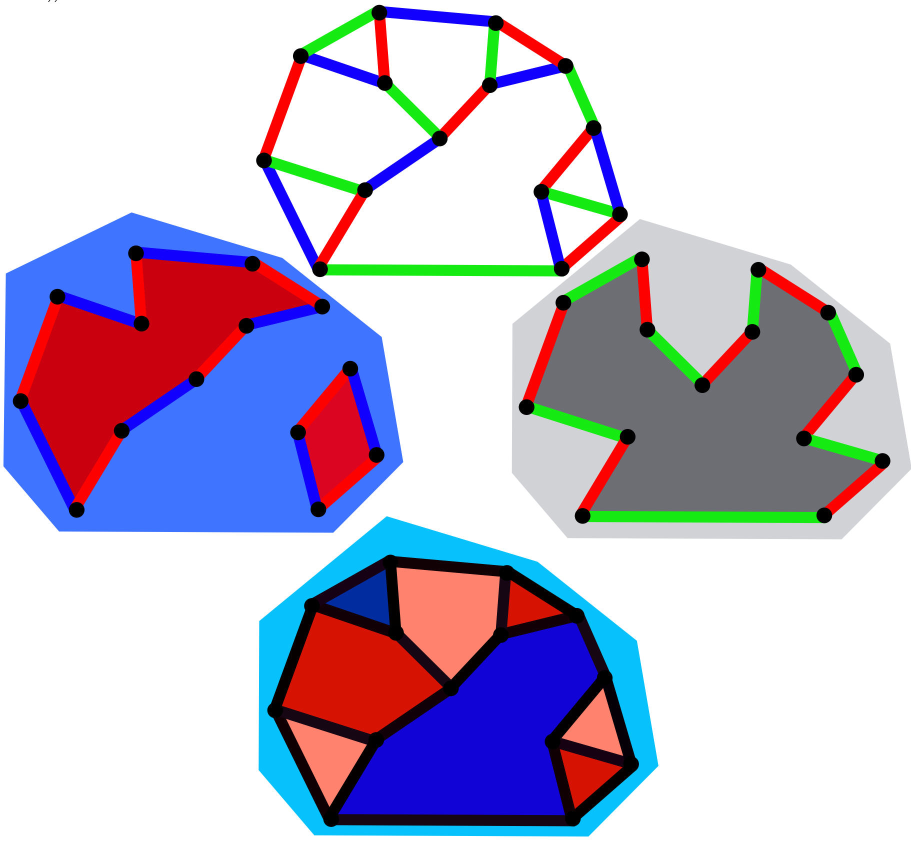
4. Tétel. *A következők ekvivalensek:*

(i) Ha G 3-reguláris, 2-szeresen élösszefüggő síkgráf, akkor $\chi_e(G) = 3$.

(ii) $4CT$.

Bizonyítás. (i)$\Rightarrow$ a 4CT tartományszínezési verziója 3-reguláris gráfokra. Legyen G egy a síkra szépen lerajzolt 3-reguláris kétszeresen élösszefüggő gráf.

Tudjuk, hogy G élhalmaza M_1, M_2, M_3 teljes párosítások uniója. Legyen $M_1 + M_2$ az $M_1 \cup M_2$ élek által meghatározott feszítő részgráf G-ben. $M_1 + M_2$ egy 2-reguláris részgráf, azaz komponensei körök. Nyilván a részgráfunknak is szépen lerajzolt ésK könnyen látható, hogy az $M_1 + M_2$ tartományai jól színezhetők két színnel (például a komponensek sz'amára vonatkozó teljes indukcióval). Legyen ez a két szín „piros" és „kék". Hasonlóan $M_1 + M_3$ tartományai is jól színezhetők két színnel. Legyen ez „világos" és „sötét".



Így a síkot kétszer is kiszíneztük, speciálisan a G gráf lerajzolásának minden tartománya kétszer is színt kapott. Egy tartomány kapott színpárja négyféle lehet: „világoskék", „világospiros", „sötétkék", „sötétpiros". Ez egy jó 4-színezése G-tartományainak, mivel bármelyik két szomszédos tartomány $M_1 + M_2$-ben vagy $M_1 + M_3$-ben is külöböző tartományba esik, így színeiknek már ezen komponense is megkülönbözteti őket.

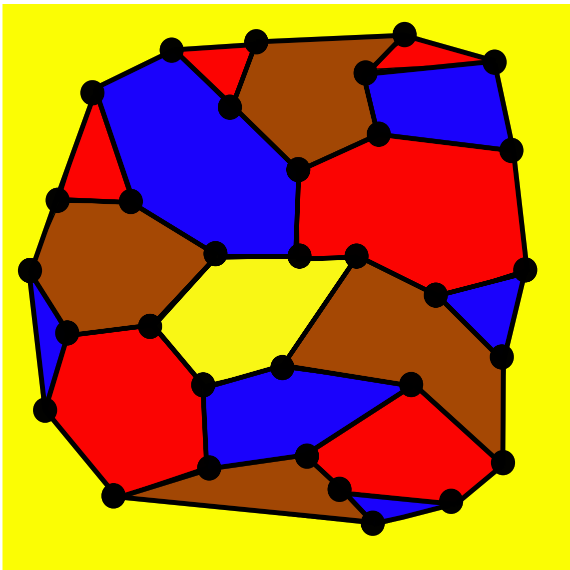
A 4CT tartományszínezési változata 3-reguláris gráfokra $\Rightarrow$ (i): Tehát tudjuk, hogy a G kétszeresen élösszefügggő, 3-reguláris síkgráf tartományait jól 4-színezhetjük. Legyen $1, 2, 3, 4$ a felhasznált színek.

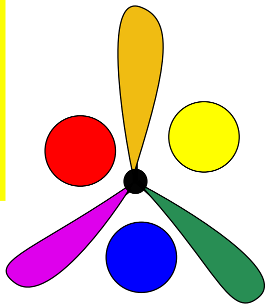
Legyen

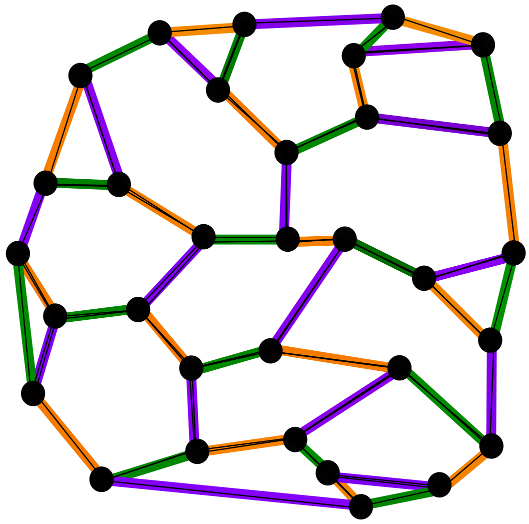
$$M_1 := \{e \in E(G) | \; e \text{ két oldalán } 1,2 \text{ vagy } 3,4 \text{ színt látjuk}\},$$

$$M_2 := \{e \in E(G) | \; e \text{ két oldalán az } 1,3 \text{ vagy } 2,4 \text{ színt látjuk}\},$$

$$M_3 := \{e \in E(G) | \; e \text{ két oldalán az } 1,4 \text{ vagy } 2,3 \text{ színt látjuk}\}.$$







Belátjuk, hogy ekkor M_1, M_2, M_3 teljes párosítások G-ben és diszjunktak.

A diszjunktság triviális a definíciókból.

Először azt igazoljuk, hogy M_1, M_2, M_3 párosítások: Tegyük fel, hogy $e, f \in M_i$ valamely $i = 1, 2, 3$ esetén és az x csúcs illeszkedik e-re és f-re is. x-ben három tartomány fut össze: τ_1, τ_2, τ_3. Ezek különböző színűek. Így e és f nem lehet ugyanabban az M_i élhalmazban.

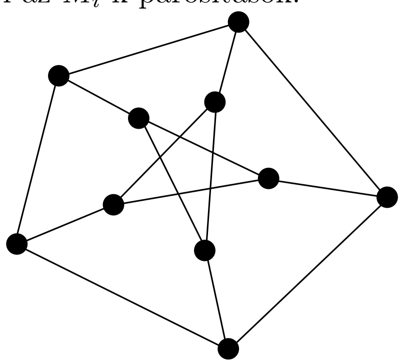
Végül $M_1 \cup M_2 \cup M_3 = E(G)$. Valóban, úgy definiáltuk az M_i-ket, hogy bármely két szín találkozik egy e él két oldalán az valamelyik M_i halmaz definíciójának eleget tesz. (A $\binom{4}{2} = 6$ lehetőség mindegyike szerepel a három definícióban.)

Ebből adódik az állítás. ■

A fenti három formája a négy-szín-sejtésnek a XIX. századi matematika eredménye. A XX. század, benne a számítógépek elterjedésével elvezetett a négy-szín-sejtés igazolásához. A négy-szín-sejtés bizonyítása után a következő tételt mondhatjuk ki.

5. Tétel. *Ha G 3 reguláris 2-szeresen élösszefüggő, továbbá síkgráf is, akkor élhalmaza három teljes párosítás uniója, azaz találhatók olyan M_1, M_2, M_3 teljes párosítások G-ben, hogy $M_1 \dot{\cup} M_2 \dot{\cup} M_3 = E(G)$ teljesüljön.*

Megjegyzés. A síkgráf feltétel szükséges. Az ellenpéldát Petersen adta. Petersen-gráf: 3-reguláris, kétszeresen élösszefüggő, nem síkgráf, és élhalmaza nem áll elő $M_1 \dot{\cup} M_2 \dot{\cup} M_3$ alakban, ahol az M_i-k párosítások.



Egyszerű síkgráfok esetén a Vizing-tétel garantálja, hogy az élkromatikus szám 3 vagy 4. A fenti mély tétel (a négy-szín-tétel egy ekvivalense) egy gráfosztályt ad, amelyre tudjuk, hogy az élszínezéshez szükséges minimális színszám $\Delta(G)$.

Megemlítjük, hogy a BSc-ben tanult Kőnig-tétel egy egyszerű következménye a következő tétel.

6. Tétel. *Ha G egy páros gráf, akkor*

$$\chi_e(G) = \Delta(G).$$

A fentiek alapján úgy tűnhet, hogy egyszerű gráfok élszínezése egy egyszerűbb feladat mint a csúcsszínezési probléma. A látszat csal. A következő tétel erre világít rá azon hallgatók számára, akik bonyolultságelmélet kurzust is teljesítettek.

7. Tétel. *Vizsgáljuk az alábbi döntési problémát: Adott G gráfról döntsük el, hogy $\chi_e(G)$ értéke $\Delta(G)$ vagy $\Delta(G)+1$. Ez a probléma $\mathcal{NP}$-nehéz.*