Gráfok csúcsszínezései

2013. Előadó: Hajnal Péter

1. (Csúcs)színezések alapfogalmai

Emlékeztetőként idézzünk fel néhány korábban tanult definíciót és tételt.

Definíció. Egy $c : V(G) \to \mathbb{N}^+$ leképezést a G gráf egy (csúcs)színezésének nevezzük. A $c(v)$ „szám” a v csúcs színe.

Definíció. A G gráf egy színezése jó színezés, ha minden $e \in E(G)$ élre $e = uv$ esetén $c(u) \neq c(v)$.

Nyilván egy $e = vv$ hurokél megakadályozza a jól színezhetőséget. Míg hurokél hiánya mellett a „minden él legyen különböző színű” egy jó színezés. Párhuzamos élek a közös végpontpárjukra vonatkozó „legyenek különböző színűek” feltételt ismétlik. Így a csúcs színezési problémákban felesleges egy él mellett szereplő párhuzamos élpárjait szerepeltetni. Ebben a fejezetben egyszerű gráfokkal dolgozunk, tehát itt MINDEN GRÁFON EGYSZERŰ GRÁFOT FOGUNK ÉRTENI.

Definíció. A G gráf egy színezése k-színezés, ha a felhasznált színek száma legfeljebb k.

Definíció. Egy G gráf kromatikus száma

$$\chi(G) = \min\{k :\ G\text{-nek létezik jó } k\text{-színezése}\}.$$

Definíció. A G gráf esetén egy $F \subset V(G)$ csúcshalmazt független ponthalmaznak nevezünk, ha bármely két F-beli pont között sincs él.

Definíció. $\alpha(G) = \max\{|F| : F \text{ független ponthalmaz } G\text{-ben}\}.$

Definíció. A G gráf esetén egy $K \subset V(G)$ csúcshalmazt klikknek nevezünk, ha bármely két K-beli pont között van él.

Definíció. $\omega(G) = \max\{|K| : K \text{ klikk } G\text{-ben}\}.$

Megjegyzés. Tetszőleges G gráfra $\chi(G) \geq \omega(G)$. Ez következik abból, hogy egy klikkben minden csúcsnak más-más színt kell adnunk jó színezésnél. Egy jó színezésnél az azonos színű csúcsok egy független ponthalmazt alkotnak. Így egy jó csúcsszínezés felfogható mint $V(G)$ független halmazokra való osztályozása.

2. Nem k-színezhető gráfok

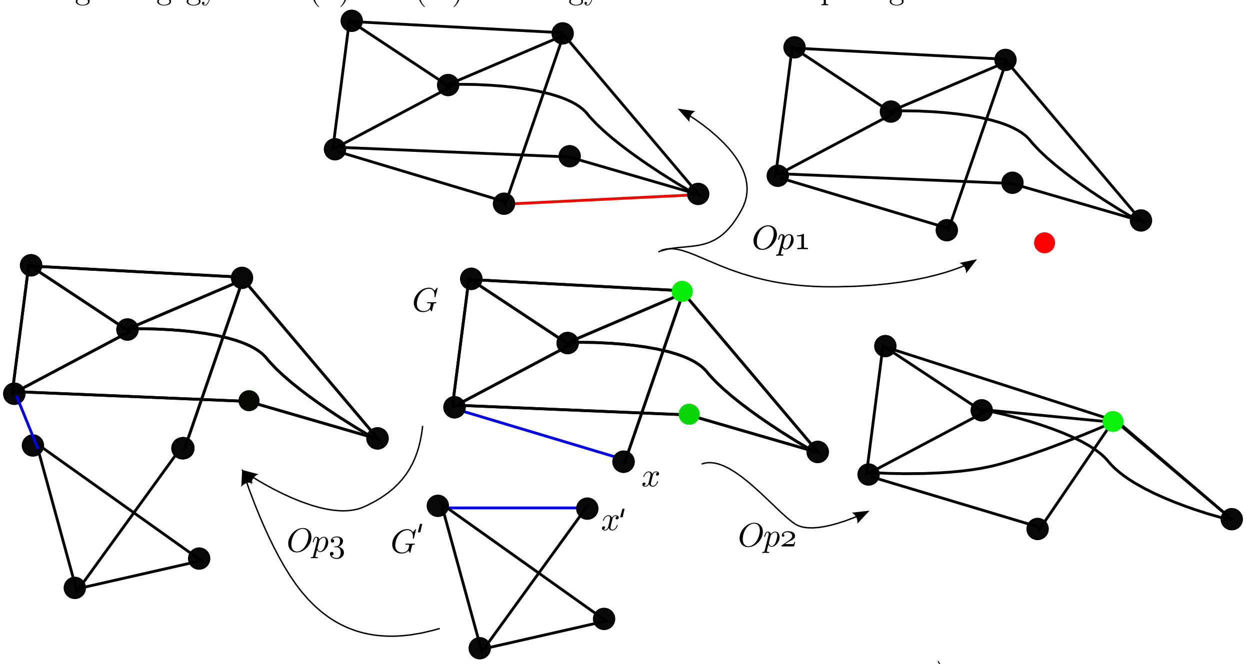
Emlékeztetőül megint idézzünk fel néhány egyszerű állítást:

- G nem 1-színezhető $\Longleftrightarrow$ G-ben létezik él.
- G nem 2-színezhető $\Longleftrightarrow$ G-ben létezik páratlan hosszú kör.
- G nem 3-színezhető $\Longleftarrow$ G-nek részgráfja a K_4 ($K_4 = 4$ csúcsú teljes gráf).

Megjegyzés. Az utolsó állításában a $\Longrightarrow$ irány nem teljesül, sőt nem ismert „jó” jellemzés a nem-3-színezhetőség problémájára.

Tehát K_4 részgráf felmutatása egy jó módszer nem-3-színezhetőség bizonyítására. (Jó és gyors, hatásos.) De a módszer nem teljes. A következőkben Hajós György egy teljes módszerét ismertetjük annak igazolására, hogy egy gráf nem k-színezhető.

Definíció. A következőkben definiálunk három gráfokon elvégezhető operációt.
(Op1) Bővítés: Él vagy csúcs hozzáadása a gráfhoz. Legyen G^+ a G-ből kapott gráf.
(Op2) Csúcsösszevonás: Két nem szomszédos csúcs (x, x') azonosítása. Ha x csúcs szomszédságát $N(x)$-szel jelöljük, akkor az összevonással keletkezett pont szomszédsága megegyezik $N(x) \cup N(x')$-vel. Legyen $\widetilde{G}$ a G-ből kapott gráf.



(Op3) Hajós-operáció: Legyen $e \in E(G), e' \in E(G')$, $\overrightarrow{e} = xy$, $\overrightarrow{e'} = x'y'$. Az operáció eredményét jelöljük $H = \text{Hajós}_{\overrightarrow{e},\overrightarrow{e'}}(G, G')$-val. $V(H) = (V(G) - \{x\}) \dot\cup (V(G') - \{x'\}) \dot\cup \{[x]\}$, $E(H) = (E(G) - \{e\}) \dot\cup (E(G') - \{e'\}) \dot\cup \{xx'\}$, az illeszkedés pedig természetes. A formális definíció megértését a mellékelt ábrán tesztelni lehet.

1. Lemma. *Ha G és G' nem k-színezhető, akkor G^+, $\widetilde{G}$ és Hajós(G, G') sem k-színezhető.*

Az előző Lemma nyilvánvalóan ekvivalens a következővel:

2. Lemma. *Ha G^+és $\widetilde{G}$ k-színezhető, akkor G is az. Ha Hajós(G, G') k-színezhető, akkor G vagy G' is az.*

Megjegyzés. G^+ a Lemma nyilvánvaló, ugyanis több objektum esetén nehezebbé válik a színezés. $\widetilde{G}$ és Hajós(G, G') esetén is egyszerű az állítás.

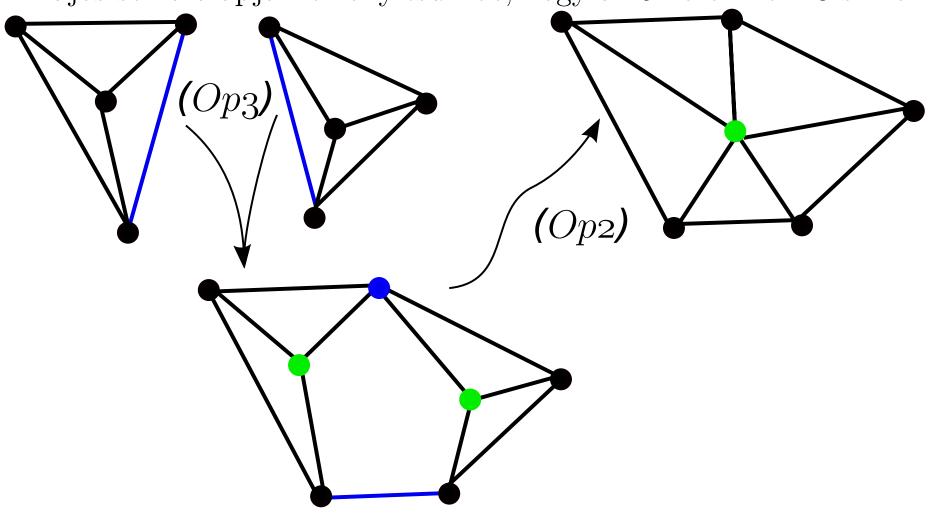
Definíció. A G gráf Hajós-konstruálható K_{k+1}-ekből, ha létezik olyan $G_1, G_2, \ldots G_l$ sorozat, hogy mindegyik G_i vagy K_{k+1}, vagy a korábbi gráfokból a fent leírt három operáció valamelyikével nyerhető.

3. Következmény. *Ha G Hajós-konstruálható, akkor G nem k-színezhető.*

A következmény bizonyítása teljes indukcióval történhet.

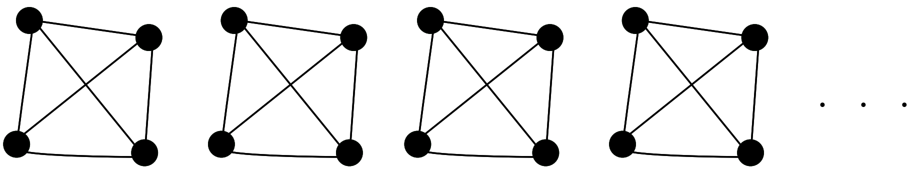
Nyilván G_1 mindig csak K_{k+1} lehet, G_2 pedig csak K_{k+1} vagy egy olyan gráf, ami K_{k+1}-ből (Op1) operációval kapható ((Op2) nem alkalmazható teljes gráfokra, (Op3)-hoz szükséges két korábbi gráf).

Példa. A Hajós-séma alapján bizonyítsuk be, hogy az 5-kerék nem 3-színezhető.



Először a G_1 és G_2 gráfokon (két négy pontú teljes) hajtjuk végre az (Op3) operációt. Az így kapott G_3 gráf nem 3-színezhető. A G_3 gráfon pedig az (Op2) operációt hajtjuk végre, és az eredmény a szintén nem 3-színezhető G_4 gráf lesz, ami egy 5-kerék.

Példa. Animáció a Hajós-séma alkalmazására:



4. Tétel Hajós György. *G akkor és csak akkor nem k-színezhető, ha G Hajós-konstruálható K_{k+1}-ből.*

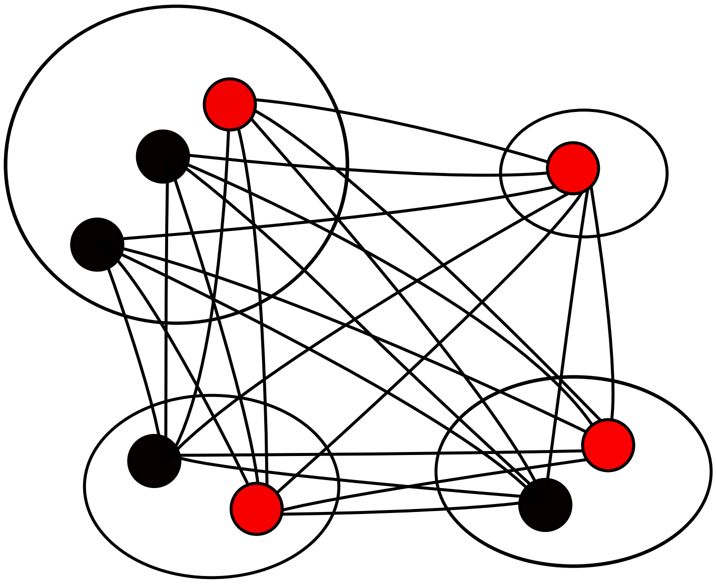
Bizonyítás. Az egyik irányt már láttuk. A tétel nehezebbik „felét" pedig indirekt módon bizonyítjuk.

Tegyük fel, hogy létezik ellenpélda, azaz létezik olyan G nem k-színezhető gráf, ami nem Hajós-konstruálható. Tegyük a G gráfot telítetté, azaz adjunk hozzá éleket mindaddig, amíg az ellenpéldára vonatkozó két tulajdonság teljesül. Így kapjuk a G^{tel} gráfot. A telítés során a nem k-színezhetőség megmarad. Így G^{tel} gráfhoz élet adva egy Hajós-konstruálható gráfot kell kapnunk.

A bizonyítás folytatása előtt szükségünk van néhány definícióra, illetve egy nagyon fontos lemmára. A Hajós-tétel bizonyítását a lemma bizonyítása után folytatjuk.

Definíció. Egy G gráf teljes r-részes gráf, ha a $V(G)$ csúcshalmaz r darab osztály uniója, és az $E(G)$ élhalmaz pedig az összes keresztél az osztályok között.

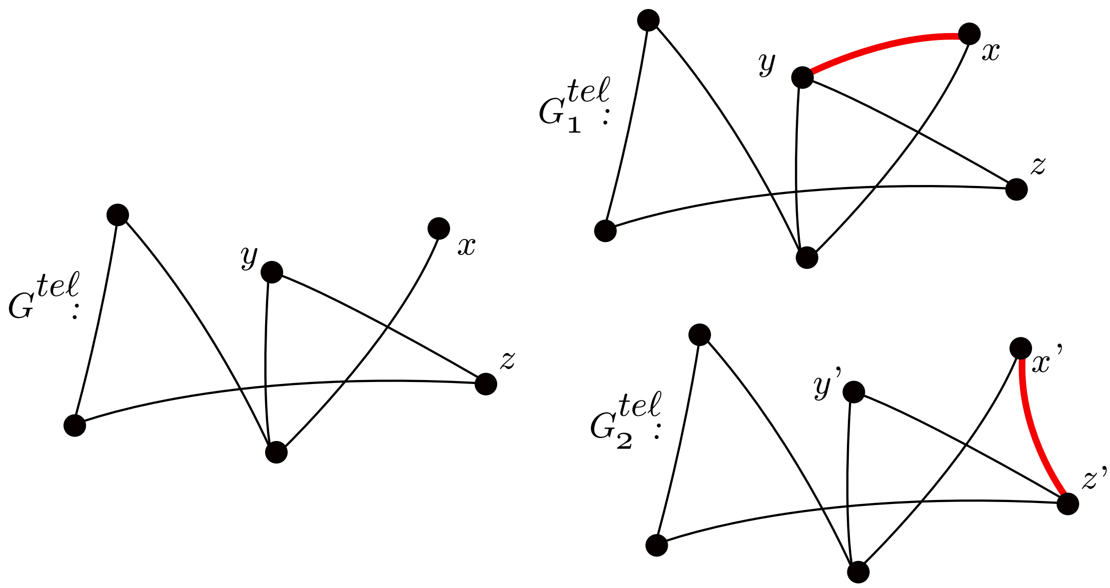
Példa. 4-részes teljes gráf például a következő:



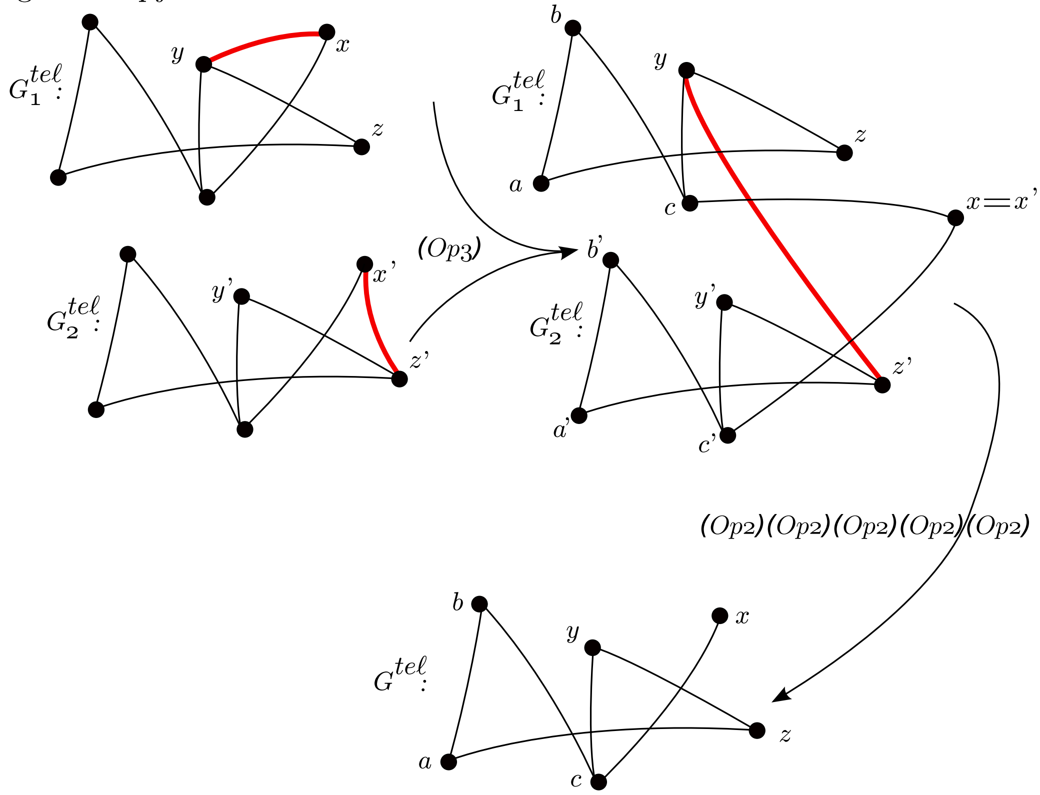
Definíció. A teljes r-részes gráf ekvivalens definíciója a következő: az „egyenlőnek vagy nem összekötöttnek lenni” reláció ekvivalenciareláció, továbbá az ekvivalecia-reláció osztályainak száma r.

5. Lemma. *G^{tel} teljes r-részes gráf.*

Bizonyítás. A bizonyítás indirekt módon történik. Tegyük fel, hogy G^{tel} nem teljes r-részes gráf, azaz az „egyenlőnek vagy nem összekötöttnek lenni” reláció nem ekvivalencia. Ekkor nyilván csak a tranzitivitás sérülhet, azaz léteznek olyan $x, y, z \in V(G^{tel})$ különböző pontok, hogy $xy, xz \notin E(G^{tel})$, de $yz \in E(G^{tel})$. Ekkor az xy és xz él hiánya kétféle módot is ad a G^{tel} telített gráf bővítésére. mindkét esetben a telítettség definíciója alapján olyan gráfot kapynk, amey Hajós-konstruálható. Az egyértelmű-ség végett a második gráf (amelyet az xz él hozzáadásával kapunk G^{tel}-ből) csúcsait vesszőkkel látjuk el.



Ha erre két gráfra végrehajtjuk a Hajós$_{xy,x'z'}(G_1^{tel}, G_2^{tel})$ operációt, akkor a következő gráfot kapjuk:



A kapott gráfban minden G_1^{tel}-beli a pont azonosítható a neki megfelelő G_2^{tel}-beli a' ponttal ((Op2)). Így megkapjuk a G^{tel} gráfot. Ez azt mutatja, hogy G^{tel} Hajós-konstruálható, és ez ellentmodás. ■

Hajós-tétel bizonyításának folytatása. Emlékezzünk, hogy a tételt indirekt módon kezdtük bizonyítani, azaz feltettük, hogy létezik olyan G nem k-színezhető gráf, ami nem Hajós-konstruálható. Telítettük a G gráfot, és az így kapott G^{tel} gráfról beláttuk, hogy teljes r-részes gráf. Folytatva a bizonyítást két eset lehetséges.

1. eset: Ha $r \geq k+1$, akkor G^{tel} gráfnak létezik egy $k+1$ pontú teljes részgráfja, ugyanis minden osztályból egy tetszőleges csúcsot kiválasztva egy ilyen részgráfot kapunk. A részgráfság miatt G^{tel} megkapható K_{k+1}-ből egyszerű bővítésekkel, azaz az (Op1) operáció többszöri alkalmazásával. Ez viszont ellentmond annak, hogy G^{tel} nem Hajós-konstruálható.

2. eset: Ha pedig $r \leq k$, akkor nyilvánvaló, hogy G^{tel} gráf k-színezhető, ami szintén ellentmondás.

Mindkét esetben ellentmondásra jutottunk, így ezzel a Hajós-tétel bizonyítása véget ért. ■