Gráfelmélet/Diszkrét Matematika MSc hallgatók számára

Párosítások

2012. november 19. Előadó: Hajnal Péter

1. Alapfogalmak

Emlékeztető. Legyen G egy gráf, $E(G)$ a G élhalmaza, $V(G)$ gráfunk csúcshalmaza. Legyen $F \subseteq E(G)$. Ekkor $V(F) = \{x \in V : x \text{ illeszkedik egy } F\text{-beli élre}\}$.

$V(F)$ egy v eleméről azt mondjuk, hogy F *lefedi* a v csúcsot.

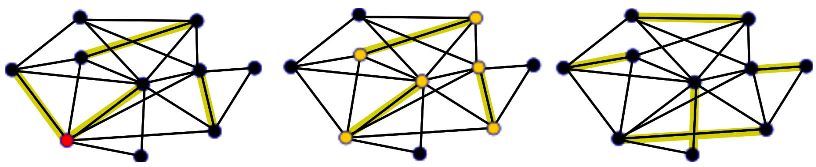
Definíció. M párosítás, ha $|V(M)| = 2|M|$ vagyis M nem-hurok élek végpont-diszjunkt halmaza.

Egy M párosítás által lefedett v csúcsról azt mondjuk, hogy *párosított*. Legyen $\overline{V}(M) = V(G) - V(M)$ az M által nem párosított/M-párosítatlan csúcsok halmaza. $|\overline{V}(M)| = |V(G)| - |V(M)| = |V(G)| - 2|M|$

Definíció. Ha az M párosítás és $V(M) = V(G)$, akkor *teljes párosításról* beszélünk.

Természetesen csak páros pontszámú gráfoknál lehetséges, hogy létezzen teljes párosítás.

Példa. Egy gráf egy élhalmazzal (sárgával kiemelt élek), ami nem párosítás (pirossal jelzett a csúcs, ahol két eleme összefut). Majd egy párosítás, ami nem teljes párosítás (sárgával jeleztük a párosított csúcsokat). Végül egy teljes párosítás.



1. ábra.

Definíció. $\nu(G)$ a G-beli párosítások között a legnagyobb méret.

Ekkor $2\nu(G)$ a legtöbb csúcs, amit párosítani tudunk. $|V(G)| - 2\nu(G)$ a legkevesebb csúcs, ami kimarad egy párosításból.

A fenti fogalmak természetes módon vezetnek a következő algoritmikus problémákhoz:

Párosítási problémák: Adott egy G gráf.

(1) Keressünk egy M maximális elemszámú/optimális párosítást.

(2) Határozzuk meg $\nu(G)$ értékét.

(3) Döntsük el, van-e G-ben teljes párosítás.

(4) Keressünk minél nagyobb elemszámú párosítást.

A következőkben ezeket az algoritmikus problémákra ajánlunk megoldási módszereket különböző megközelítések segítségével.

2. Mohó algoritmus

A (4) problémát vizsgáljuk. Egy M párosítás kiszámítását elemi döntésekre bontjuk: minden élre el kell döntenünk, hogy beválasztjuk-e a párosításba vagy nem. Az algoritmus mohó jelzője onnan ered, hogy nem vonjuk vissza soha a korábbi döntésünket, vagyis ha egy élt egyszer beválasztottunk a párosításba, már nem vesszük ki később. Azzal, hogy korábbi döntésünket nem bíráljuk felül egy nagyon hatékony, egyszerű eljárást kapunk. Sajnos nincs garancia, hogy az output optimális.

Mohó párosítási algoritmus:

`(Inicializálás) Kiindul egy` M `párosításból`
`AMÍG létezik` $e \in E(G) - M$ `él úgy, hogy` $M \cup \{e\}$ `is párosítás`
   `[(Mohó növelés/bővítés)` M`-et lecseréljük` $M \cup \{e\}$`-re.]`
`(Elakadás) Az aktuális párosítás az output`
`//Ekkor minden` M`-en kívüli él összefut valamelyik` M`-beli éllel`

Megjegyezzük, hogy nincs ciklizálási veszély: bármely javítás garantáltan növeli a párosítás élszámát, ezért az algoritmus szükségszerűen leáll.

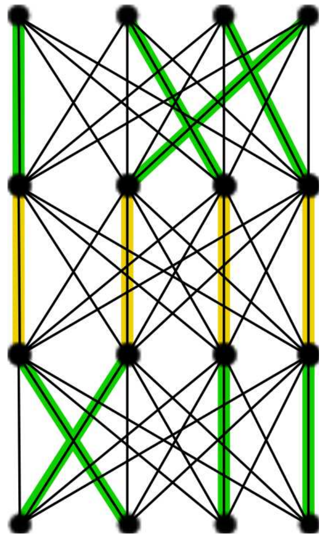
Elakadás esetén tudjuk, hogy párosításunk egy speciális módon, a mohó módon nem javítható. Ez nem jelenti azt, hogy ettől eltérő módon nem tudunk nagyobb párosításhoz jutni.

Példa. Gráfunknak négy ugyanannyi csúcsot (legyen ez n, az ábrán $n = 4$) tartalmazó „emelete" van. Két szomszédos emelet között minden élt behúztunk, további élek nincsenek. A sárga élek egy teljes párosítást alkotnak a két középső szint között. Ha a mohó algoritmus ezeket választja ki először, akkor elakad: n élt tartalmaz outputja. A zöld élek egy teljes párosítást alkotnak ($2n$ darab él).

Megemlítünk egy, a fenti algoritmussal kapcsolatos alaptételt. Ez azt garantálja, hogy a nagyon egyszerű algoritmus outputja nem olyan rossz.

1. Tétel. *Legyen $\nu_{mohó}(G)$ a mohó algoritmus egy tetszőleges futásának mérete. Legyen $\nu(G)$ a legnagyobb párosítás mérete. Ekkor*

$$\frac{\nu(G)}{2} \leq \nu_{mohó}(G) \leq \nu(G).$$



2. ábra.

Bizonyítás. (BSc anyag) A második egyenlőtlenség nyilvánvaló abból, hogy a mohó algoritmus egy párosítást számol ki.

Az első egyenlőtlenség igazolása: Legyen $M_{\text{mohó}}$ a mohó algoritmus outputja, $L = V(M_{\text{mohó}})$ a mohó algoritmus otputja által párosított pontok halmaza. Nyilvánvaló, hogy L lefogó ponthalmaz és $|L| = 2\nu_{\text{mohó}}(G)$. Így L mérete minden párosítás méretét felülről becsli, speciálisan $\nu(G) \leq |L| = 2\nu_{\text{mohó}}(G)$. ■

3. Véletlen módszer

A (3) problémát vizsgáljuk, azaz csak tesztelni szeretnénk,hogy gráfunkban van-e teljes párosítás. Módszerünk általános gráfok vizsgálatát is megengedi, mégis csak egy egyszerűb esetet vizsgálunk: Adott G egyszerű, páros gráf, $|A| = |F| = n$. Van-e G-ben teljes párosítás?

Az egyszerűség és a két színosztály azonos mérete természetes módon, az általánosság megszorítása nélkül feltehető.

Definíció. Legyen G egy $A\dot{\cup}F$ színosztályokkal rendelkező egyszerű páros gráf. G páros szomszédsági mátrixa B_G, az a mátrix, amely sorai A-val, oszlopai F-fel vannak azonosítva, továbbá egy $a \in A$-nak megfelelő sor és egy $f \in F$-nek megfelelő oszlop találkozásában 1 szerepl, ha szomszédosak, 0 különben.

Megjegyzés. G (teljes) A_G szomszédsági mátrixában a sorok és oszlopok is a $V(G)$ csúcshalmazzal azonosított. Ha a sorok/oszlopok felsorolásában A elemei megelőzik F elemeit, akkor az A-A, illetve F-F élek hiánya miatt a mátrix bal felső és jobb alsó sarkában 0-k egy nagy blokkja található, míg a jobb felső sarokban B_G szerepel, a bal alsó sarokban pedig B_G^T, a páros szomszédsági mátrix transzponáltja.

$$\begin{pmatrix} 0 & B_G \\ B_G^T & 0 \end{pmatrix}$$

Azaz a páros szomszédsági mátrix csak a szokásos szomszédsági mátrix tömörítése.

A mátrix leírja a G páros gráfot. A G páros gráfra vonatkozó fogalmak átfogalmazhatóak a mátrixok nyelvére. Az alábbiakban egy „szótárat" ismertetünk.

$$\begin{aligned} B_G \text{ pozíciói} &\equiv \; A \times F \\ B_G \text{ 1-esei} &\equiv \; E(G) \\ |A| = |F| &\equiv B_G \textit{ négyzetes mátrix} \\ \text{M párosítás} &\equiv \forall \textit{ sorban és oszlopban max egy db 1-es van} \\ \text{M teljes párosítás} &\equiv \forall \textit{ sorban és oszlopban pontosan egy db 1-es van} \\ &\equiv \textit{a megfelelő 1-esek egy kifejtési tag tényezői} \end{aligned}$$

A fentiek alapján, ha G-ben van teljes párosítás, akkor $detB_G$ kifejtésében létezik egy nem 0 tag. Ezt az egyszerű észrevételt a következő állítás foglalja össze.

2. Következmény. $\det B_G \neq 0$ *esetén* $\det B_G$ *kifejtésében létezik nem 0 tag, ami ekvivalens azzal, hogy létezik teljes párosítás G-ben.*

A fordított irány nem igaz. Ehhez vegyünk egyolyan páros gráfot, amelyben két alsó pontnak ugyanaz a szomsédsága és ezzel együtt van teljes párosítás a gráfban (például egy teljes páros gráf, $K_{n,n}$ megfelel). Ekkor B_G-ben lesz két azonos sor, azaz a determináns értéke 0.

Definíció. Az *M permanense*

$$\text{per } M_{n\times n} = \sum_{\pi\in S_n} \prod_{i=1}^{n} M_{i\pi(i)}$$

Észrevétel. (i) $perB_G \neq 0$ esetén G-ben létezik teljes párosítás.

(ii) $perB_G$ a teljes párosítások száma G-ben.

Sajnos ez az észrevétel nem segít algoritmikus problémánk megoldásában: $perB_G$ kiszámítása $\#P$-nehéz.

Definíció. $X_G \in \mathbb{R}\left[x_e : e \in E(G)\right]^{n\times n}$: $\forall e \in E(G)$ esetén B_G e-nek megfelelő 1-esét x_e-vel helyettesítjük.

3. Tétel. *$det(X_G)$ nem az azonosan 0 polinom akkor és csak akkor, ha létezik G-ben teljes párosítás.*

Észrevétel. (i) G-beli teljes párosítások száma megegyezik a $det(X_G)$-ben szereplő különböző monomok számával.

(ii) $det(X_G)$-nek túl hosszú lehet a standard leírása, de hatékonyan kiértékelhető, ha $x_e = \alpha_e$, ahol $\alpha_e \in \mathbb{R}$, (lásd numerikus analízis vagy algebra előadás).

Az előző észrevételen alapul az alábbi algoritmus.

Véletlen algoritmus.
Véletlen helyettesítés: `Minden` e `élre vegyünk egy` $r_e \in \{1, \ldots, N\}$`-t, ahol` r_e `uniform eloszlású valószínűségi változó.`
DET számolás: `Számítsuk ki` $det(X_G)|_{x_e=r_e}$`-t.`
Kiértékelés:
`Ha ez nem 0, akkor az output legyen „Létezik teljes párosítás”.`
`Ha ez 0, akkor az output legyen „Valószínűleg nem létezik teljes párosítás”.`

3.1. Az algoritmus analízise

Az algoritmusunk tévedhet. De hogyan?

- „Létezik teljes párosítás”: biztosan jó a válasz.
- „Valószínűleg nem létezik teljes párosítás”:
  - ha $det(X_G)$ az azonosan 0 polinom, akkor jó a válasz;
  - ha $det(X_G)$ nem az azonosan 0 polinom, akkor szerencsétlen r_e-ket választottunk, épp $det(X_G)$ gyökeit: az algoritmus téved.

Célunk, hogy a hibázás lehetőségét minél kisebbé tegyük. Érezhető, hogy minél nagyobb az N, annál kisebb a hibázás valószínűsége. Az alábbi lemmára van szükségünk, hogy ezt az érzésünket matematikailag is pontossá tegyük.

4. Tétel (Schwartz-lemma). *Legyen $p(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_k]$ egy nem azonos 0 polinom, és legyenek $r_i \in \{1, \ldots, N\}$-k uniform eloszlású független valószínűségi változók, $(1 \leq i \leq k)$. Ekkor*

$$\mathbb{P}(p(r_1, \ldots, r_k) = 0) \leq \frac{deg\ p}{N}$$

Bizonyítás. k-ra vonatkozó teljes inducióval bizonyítunk.

$k = 1$ esetén $p \in \mathbb{R}[x]$. Ekkor $|\{r \in \mathbb{R} : p(r) = 0\}| \leq \deg p$, így annak a valószínűsége, hogy egy adott $r \in \{1, \ldots, N\}$ épp gyöke a p-nek felülről becsülhető $\frac{\deg p}{N}$-nel (r uniform eloszlású).

Tegyük fel, hogy $k-1$ határozatlan esetén teljesül az állítás. Írjuk fel a k-változós p polinomot a következő alakban:

$$p(x_1, \ldots, x_k) = p_\alpha(x_1, \ldots, x_{k-1}) \cdot x_k^\alpha + p_{\alpha-1}(x_1, \ldots, x_{k-1}) \cdot x_k^{\alpha-1} + \cdots + p_0(x_1, \ldots, x_{k-1}),$$

ahol $p_\alpha(x_1, \ldots, x_{k-1})$ egy nem azonosan 0 polinom. A felírásból következik, hogy $\deg p \geq \deg p_\alpha + \alpha$.

Legyen $R_k = \{(r_1, \ldots, r_k) : p(r_1, \ldots, r_k) = 0\}$, $R_{k-1} = \{(r_1, \ldots, r_k) : p_\alpha(r_1, \ldots, r_{k-1}) = 0\}$ és $Q = \{(r_1, \ldots, r_k) : (r_1, \ldots, r_{k-1}) \notin R_{k-1}, de\ (r_1, \ldots, r_k) \in R_k\}$. Könnyen látható, hogy $R_k \subseteq R_{k-1} \cup Q$. Az indukciós feltevésből R_{k-1} valószínűsége becsülhető. Az egy határozatlanú polinomok esete alapján Q valószínúsége becsülhető. Összegezve kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(R_k) \leq \mathbb{P}(R_{k-1}) + \mathbb{P}(Q) \leq \frac{\deg p_\alpha}{N} + \frac{\alpha}{N} \leq \frac{\deg p}{N}.$$

Ezzel beláttuk a tétel állítását. ■

A lemmát alkalmazva a véletlen algoritmusra ($p = det(X_G)$, $\deg p = n(= |A| = |F|)$) kapjuk, hogy az $N = 2n$ választással élve a hibázás valószínűsége legfeljebb $\frac{1}{2}$. A hibázás valószínűsége tovább csökkenthető N értékének növelésével, vagy a fenti paraméterválasztáson alapuló változat többszöri, független ismétlésével.

4. Poliéderes/lineáris programozási módszer +

A következő párosítási problémát vizsgáljuk: Legyen G páros gráf, $c : E(G) \to \mathbb{R}^+$ Keressük a $c(M) = \sum_{e \in M} c(e)$ maximumát, ahol $M \subset E(G)$ a G párosításain fut keresztül.

Az $M \subseteq E(G) = \{e_1, \ldots, e_m\}$ párosításhoz tartozó karakterisztikus függvény $\underline{\chi}_M = (v_i) \in \mathbb{R}^m$, ahol $v_i = 1$, ha $e_i \in M$, különben 0. A karakterisztikus vektor komponensei a gráf éleivel vannak azonosítva. $m = |E(G)|$ miatt $\mathbb{R}^{E(G)}$ és $\mathbb{R}^m$ azonosítható. Ezt használjuk: v_i a karakterisztikus vektor i-edik komponense, de egyben az $e_i \in E(G)$ élnek megfelelő komponens is.

Észrevétel. $c(M) = \langle \underline{c}, \underline{\chi}_M \rangle$, ahol $\underline{c} \in \mathbb{R}^{E(G)}$. Így a feladat:

$$\begin{aligned} max\{\langle \underline{c}, \underline{\chi}_M \rangle : M\text{párosítás}\} &= max\{\langle \underline{c}, \underline{x} \rangle : \underline{x} \in \{\underline{\chi}_M : M\text{párosítás}\}\} \\ &= max\{\langle \underline{c}, \underline{x} \rangle : \underline{x} \in conv\{\underline{\chi}_M : M\text{párosítás}\}\} \end{aligned}$$

Az utolsó kifejezésben szereplő geometriai fogalmakat itt is ismertetjük.

Definíció. Legyen $P \subseteq \mathbb{R}^m$ ponthalmaz. Ekkor P *konvex burka*,

$$conv P = \{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underline{p}_i : \lambda_i \geq 0, \sum \lambda_i = 1, \underline{p}_i \in P\}$$

a legszűkebb konvex halmaz, amely P-t tartalmazza.

A konvex burokban összegyűjtött vektorokat a P ponthalmaz elemei konvex kombinációinak nevezzük.

Jelölés. A $conv\{\underline{\chi}_M : M$párosítás$\}$ halmazt jelöljük $MP(G)$-vel.

$MP(G)$ tehát a $\{\chi_M : M$ párosítás$\}$ halmazt bővíti ki a konvex kombinációkkal. Általában a lehetséges megoldások halmazának bővítése kihat a maximalizálási feladatra is. Ebben az esetben ez nem így van. $MP(G)$ konvex, korlátos, zárt halmaz. Egy lineáris függvény $MP(G)$-beli optimumát egy $\underline{\chi}_M$ pontban veszi fel, hiszen

$$\langle \underline{c}, \sum \lambda_i \underline{p}_i \rangle = \sum \lambda_i \langle \underline{c}, \underline{p}_i \rangle \leq \max \langle \underline{c}, \underline{p}_i \rangle.$$

Ezzel az észrevételünket igazoltuk.

A $max\{\langle \underline{c}, \underline{x} \rangle : \underline{x} \in MP(G)\}$ optimalizálási feladat megoldása egy lineáris programozási feladat. Ennek szimplex módszerrel történő megoldásához szükséges $MP(G)$ lineáris egyenlőtlenségekkel való leírása. Az alábbiakban néhany olyan egyenlőtlenséget gyűjtünk össze, amelyek $\{\chi_M : M$párosítás$\}$ elemeire (így $MP(G)$ pontjaira is) teljesülnek.

Definíció. Tekintsük $\underline{x} = (x_e : e \in E(G)) \in \mathbb{R}^{E(G)}$ vektort.

Legyen $\widehat{MP}(G) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^{E(G)} : x_e \geq 0 \ \forall e \in E(G),$ és $\sum_{e:vIe} x_e \leq 1 \ \forall v \in V(G)\}$

Megjegyzés. A definiált két politóp között egy irányú kapcsolat van:

- $MP(G) \subseteq \widehat{MP}(G)$.
- Általában a tartalmazás valódi. Erre példa a $G = C_{2k+1}$ gráf, ugyanis például $\underline{x}$ minden koordinátáját $\frac{1}{2}$-nek véve, a kapott vektor eleme $\widehat{MP}(G)$-nek, viszont nem eleme $MP(G)$-nek ($\sum_{e \in E(G)} x_e = 2{,}2$ hipersík elvágja ezt a vektort $MP(G)$-től).

Célunk belátni, hogy ha G páros, akkor $MP(G) = \widehat{MP}(G)$ Ehhez elég megmutatni, hogy $\widehat{MP}(G)$ csúcsai egészek. Ugyanis $\widehat{MP}(G)$ egész koordinátájú pontjai pontosan $\{\chi_M : M$párosítás$\}$ elemei. $\widehat{MP}(G)$ viszont csúcsai konvex burka, így a másik irányú tartalmazás is adódik. $\widehat{MP}(G)$ minden csúcsát megkapjuk úgy, hogy a politópot leíró egyenlőtlenségek közül kiválasztunk néhányat, amelyek egyenlőségjellel egy egyértelműen megoldható rendszert alkotnak. Az egyértelmű megoldás a tetszőlegesen kiválasztott csúcs. Az egyértelmű megoldás Cramer-szabállyal is felírható.

Ekkor a koordináták két determináns hányadosaként adódnak. A deteminánsokban egészek vannak, a nevező értéke pedig nem-nulla. A hányados biztos egész lesz, ha a nevezőben szereplő mátrix determinánsa ± 1. Könnyű látni, hogy bárhogy is döntünk az egyértelműen megoldható egyenletrendszer mátrixa a gráf pont-él-illeszkdési mátrixának részmátrixa lesz. Így célunkat elérjük, ha belátjuk a következő lemmát.

5. Lemma. *Legyen B_G egy G páros gráf pont-él illeszkedési mátrixa. Ekkor B_G minden négyzetes R részmátrixának determinánsa a $\{-1, 0, 1\}$ egy eleme.*

Bizonyítás. Legyen R egy $k \times k$ méretű részmátrix. k-ra vonatkozó teljes indukcióval bizonyítunk. $k = 1$ esetén nyilvánvaló az állítás.

B_G sorai (és így R sorai is) az A és F kategóriák közt oszlanak meg.

1. eset: R valamelyik oszlopában nulla avgy egy 1-es szerepel. Ekkor ezen oszlop szerint fejtsük ki a determinánst. Vagy biztos 0-t kapunk (R-ben csupa 0 oszlop szerepel), vagy az indukciós lépes alapján leszünk készen.

2. eset: R minden oszlopában két 1-es van, ekkor szükségszerűen egy A-beli és egy F-beli. Ekkor az A-beli sorok összege egyenlő az F-beli sorok összegével. A determináns értéke emiatt 0. ■

A lemmában szereplő tulajdonsággal már korábban is találkoztunk más mátrixok esetén.

Definíció. Egy M mátrix *totálisan unimoduláris*, ha minden négyzetes aldeterminánsa 0 vagy ± 1.

Végül összefoglaljuk az eredményünket.

6. Következmény. *Ha G páros, akkor*

a) B_G *totálisan unimoduláris,*

b) $MP(G) = \widehat{MP}(G)$.

Ez a következmény vezet el a következő algoritmushoz:

Lineáris programozáson alapuló algoritmus:
1) `Írjuk fel az` $\widehat{MP}(G)$`-t leíró LP feladatot.`
2) `Oldjuk meg szimplex módszerrel.`
`// A megoldás garantáltan egész koordinátájú lesz, így egy párosítást`
`// ír le.`
3) `A megoldásból kiolvasunk egy párosítást. Ez az algoritmus outputja.`