Gráfelmélet/Diszkrét Matematika MSc hallgatók számára

Síkgráfok

2012. október 15. Előadó: Hajnal Péter

1. Részgráfok, topologikus részgráfok, minorok

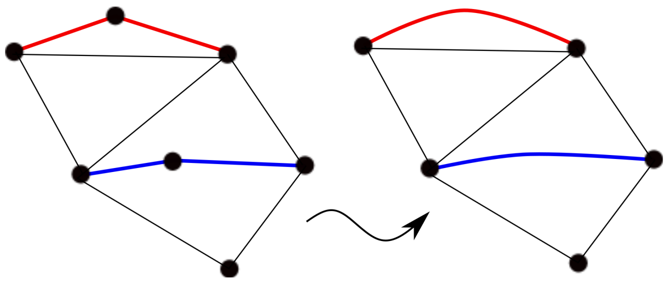
Emlékeztető. Egy gráf síkba rajzolható, ha lerajzolható úgy, az élgörbéknek a végpontokon kívül nincs más közös pontja.

Definíció. Legyen G egy gráf, $e = xy \in E$ egy éle.

Ekkor $G - e$ (vagy más jelöléssel $G \backslash e$) azt a gráfot jelöli, amit G-ből az e él elhagyásával kapunk.

Definíció. Legyen e és f a G gráf két éle, amely egy x másodfokú csúcsban fut össze. Az e és f élek összevonásával kapott gráfot úgy kapjuk G-ből, hogy elhagyjuk az $e = ux$, $f = vx$ éleket és x csúcsot, továbbá hozzáadunk egy új uv élet.

Példa. Az alábbi ábra két piros él és két kék él összevonását mutatja:

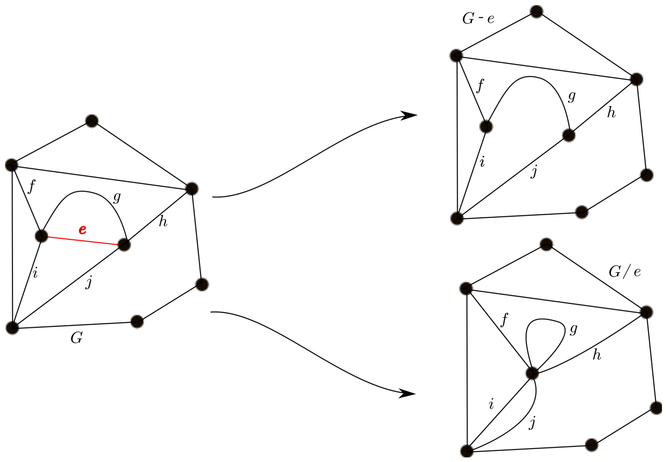


1. ábra.

Az e és f élek összevonásával kapott gráf jelölése legyen $G(e \wr f)$.

Definíció. Jelölje G/e az e él összehúzásával/kontrakciójával nyert gráfot, mely az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:

- $V(G/e) = (V(G) - \{x, y\} \dot\cup \{[e]\}$,
- $E(G/e) = E(G) \backslash \{e\}$,
- $I(G/e)$ természetesen adódik: Amely él eddig x-re vagy y-ra illeszkedett, az most az x és y csúcsokat reprezentáló új ($[e]$) csúcsra illeszkedik. A többi illeszkedés marad.



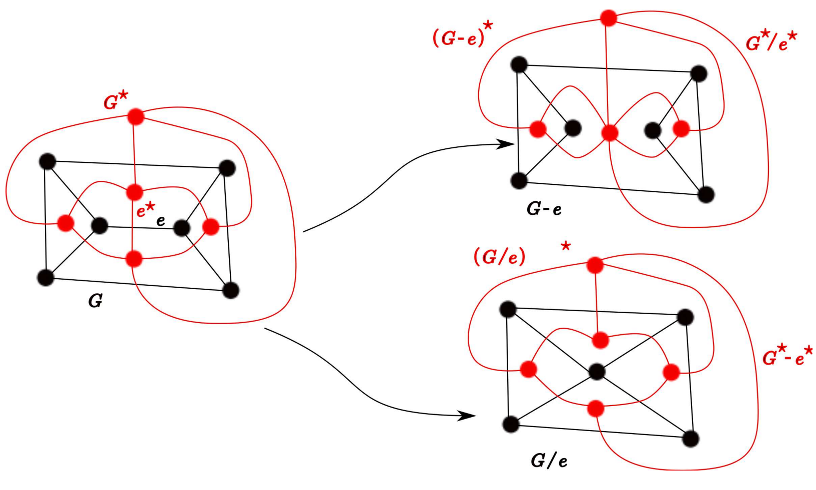
2. ábra.

Példa. Az alábbi ábrán egy G gráfbeli e (piros) élt emelünk ki, majd megmutatjuk az e elhagyása és e összehúzásával nyert gráfokat.

Megjegyzés. Ha a fent említett e él hurokél, akkor $G/e = G - e$.

Emlékeztető. Legyen G egy síkrarajzolt gráf. Ekkor a G gráf duálisán azt a G^* gráfot értjük, melynek csúcsai G tartományai, élei pedig megfelelnek G éleinek úgy, hogy az e él e^* párja azon két tartományt reprezentáló csúcsokat köti össze, melyek e két oldalán szerepelnek (így speciálisan szomszédosak).

Példa. A következő két ábra a fent ismertetett két operációt, az élelhagyást, illetve az élösszehúzást illusztrálja a G gráfon, illetve annak G^* duálisán.



3. ábra.

Az ábra azt sugallja, hogy $(G-e)^* = G^*/e^*$ és $(G/e)^* = G^* - e^*$.

1. Állítás. *(i)* $(G-e)^* = G^*/e^*$,

(ii) $(G/e)^* = G^* - e^*$.

Az érdeklődő hallgató számára a fenti állítás bizonyítása egy lehetséges feladat.

Definíció. Legyen G egy gráf.

a) Ha a G gráfból az R gráf él- illetve csúcselhagyásoperációk segítségével megkapható, akkor R-et a G gráf részgráfjának nevezzük. Jelölésben: $R \subseteq G$.

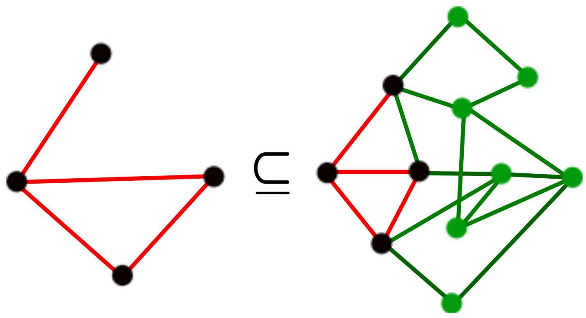
b) Ha a G gráfból az M gráf él- illetve csúcselhagyás és élösszehúzás operációk alkalmazásával megkapható, akkor a G gráfban H minorként szerepel (H a G minorja). Jelölésben: $M \preceq G$.

c) Ha a G gráfból a T gráf élek összevonásával és él- illetve csúcselhagyás operációkkal nyerhető, akkor T a G gráf topologikus részgráfja. Jelölés: $T \leq G$.

⋆

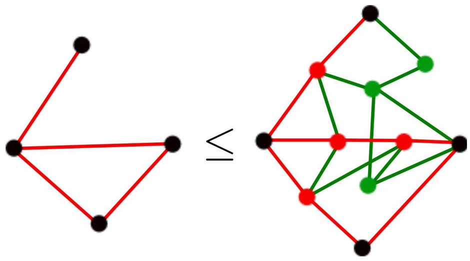
Megjegyzés. $G(e \wr e') \simeq G/e \simeq G/e'$.

Példa. A R piros gráf a G gráf részgráfja, hiszen a zölddel jelölt éleket és csúcsokat elhagyva éppen az R gráfot kapjuk.



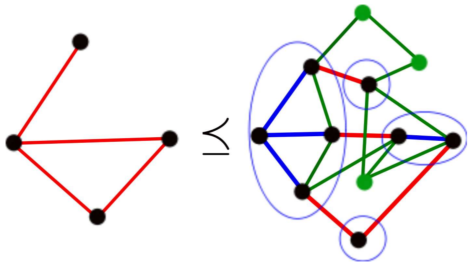
4. ábra.

Példa. A T piros gráf a G gráf topologikus részgráfja, hiszen a zölddel jelölt éleket és csúcsokat elhagyva, a pirossal jelölt éleket összevonva éppen a T gráfot kapjuk.



5. ábra.

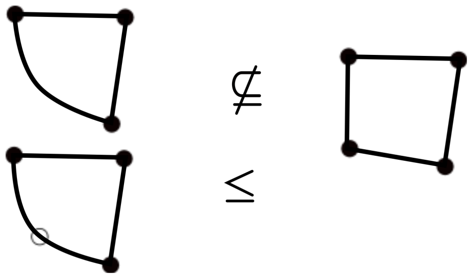
Példa. Az M piros gráf a G gráf minorja, hiszen ha a zölddel jelölt éleket elhagyjuk, a kijelölt klaszterekben szereplő kék feszítőfa éleit éleit összehúzzuk, akkor éppen az M gráfhoz jutunk. (A klaszterek zsugorodnak össze M csúcsaivá.)



6. ábra.

Észrevétel. Egy részgráf topologikus részgráf is egyben. Egy topologikus részgráf minor is egyben. Formálisan, ha G, R gráfok, akkor $G \supseteq R \Rightarrow G \geq R \Rightarrow G \succeq R$. Visszafelé viszont egyik állítás sem érvényes (lásd alábbi példák).

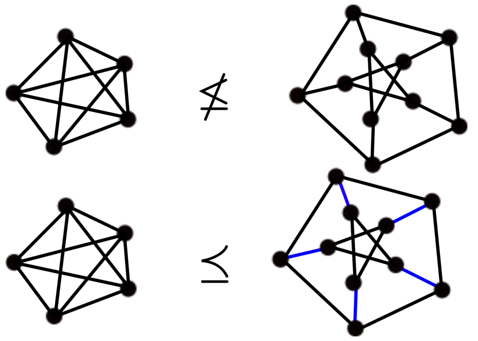
Példa. Példa topologikus részgráfra, amely nem részgráf:



7. ábra.

C_4-ből C_3 bármely két összefutó e és e' élek összevonásával megkapható, vagyis C_3 C_4 topologikus részgráfja. C_4-nek több csúcsa van mint C_3-nak. Részgráfság esetén alkalmazni kellene a csúcselhagyás operációt, ami bármilyen végrehajtás esetén egy kételú gráfhoz vezetne. Tehát C_3 nem részgráfja C_4-nek.

Példa. Példa minorra, amely nem topologikus részgráf.



8. ábra.

A Petersen-gráfból K_5 a kék színnel jelölt élek összehúzásával adódik, tehát K_5 a Petersen-gráfban minor. K_5 nem topologikus részgráfja a Petersen-gráfnak, hiszen a Petersen- gráf minden csúcsának fokszáma 3, K_5 csúcsainak fokszáma viszont 4. Két másodfokú csúcsba futó él összevonásával, csúcs- illetve élelhagyás-operációval viszont nem lehet fokszámot növelni.

Észrevétel. Ha G síkgráf, $R \subseteq G; T \preceq G; M \preceq G$ teljesül, akkor R, T, M is síkgráf.

2. Alappéldák nem síkgráfokra

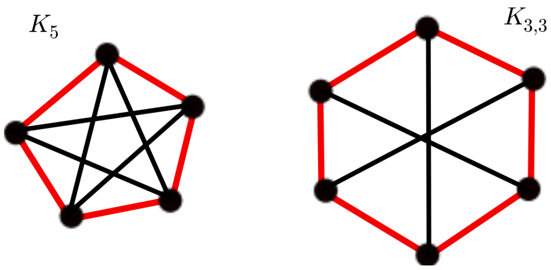
2. Tétel (Euler tétele). *A K_5 és $K_{3,3}$ gráfok nem síkgráfok.*

Megjegyzés. A $K_{3,3}$ gráf egy másik neve a három-ház-három-kút gráf. Ez onnan ered, hogy a tétel állítása megfogalmazható úgy is, hogy nem tervezhető kilenc út három ház és három kút között (mindegyik háztól mindegyik kúthoz) úgy, hogy az utaknak a közös végpontokon (amennyiben van ilyen) ne legyen közös pontja.

Bizonyítás. A tétel fontos. Két bizonyítást is megemlítünk
1. Bizonyítás: A $K_{3,3}$ és K_5 gráf alábbi lerajzolásából indulunk ki.

Mindkét lerajzolás kiemel egy-egy gráfelméleti kört (piros színű élek). A bizonyítás alapmegjegyzése: Egy körgráfot lényegében egyféleképpen lehet szépen lerajzolni. Egy lerajzolt kör a síkot belső (korlátos) és külső (nem korlátos) részre osztja. (Lásd Jordan-féle görbetétel, illetve Jordan—Schönflies-tétel.)

Az ábrákon a kör mellett további élek szerepelnek (ezekre mint hidak hivatkozunk). Ezeket viszonyíthatjuk a kör lerajzolásához: lehetnek külsők és belsők. A két szerep (külső/belső) szimmetrikus. Így feltehető, hogy többségük belül halad.



9. ábra.

Tegyük fel, hogy a kör szép lerajzolása a két gráf teljes szép lerajzolásává terjeszthető ki. Ezek után a két gráfot külön kezeljük:

$K_{3,3}$: Feltevésünk szerint belül (ami topologikusan azonos egy körvonal belsejével) legalább két híd van, amik keresztezik egymást és átmetszés nélkül lerajzolhatók. Ez lehetetlen.

K_5: Feltevésünk szerint belül legalább három híd van. Bárhogy választjuk is ki a belülre kerülő három élt, lesz közöttük kettő, ami az előző esethez hasonlóan nem fut össze és keresztezi egymást. Ez lehetetlen.

2. Bizonyítás: (Euler tételére hivatkozó bizonyítás.) Néhány BSc-s előadásban szereplő tételt idézünk fel.

Észrevétel (Euler tétele). Legyen G összefüggő, síkrarajzolt gráf. Ekkor $t(G) + |E(G)| + |V(G)| = 2$, ahol $t(G)$ a tartományok/országok száma.

3. Következmény. *Legyen G egyszerű síkgráf, továbbá $|V(G)| \geq 3$. Ekkor*

(i) $|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6$,

(ii) ha G ráadásul páros gráf, akkor $|E(G)| \leq 2|V(G)| - 4$.

A következmény (i) része adja, hogy K_5 nem síkgráf. Valóban K_5 nem teljesíti a $|E| \leq 3|V| - 6$ feltételt ($|E| = 10$ és $3|V| - 6 = 3 \cdot 5 - 6 = 9$).

A következmény (ii) része adja, hogy $K_{3,3}$ nem síkgráf. Valóban $K_{3,3}$ páros gráf és nem teljesíti a $|E| \leq 2|V| - 4$ feltételt ($|E| = 9$ és $2|V| - 4 = 2 \cdot 6 - 4 = 8$). ■

4. Következmény. *Ha G síkgráf, akkor K_5 és $K_{3,3}$ nem lehet részgráf G-ben, K_5 és $K_{3,3}$ nem lehet topologikus részgráf G-ben, illetve K_5 és $K_{3,3}$ nem lehet minor G-ben.*

Ha K_5 vagy $K_{3,3}$ minden élére egy új csúcsot helyezünk, akkor ugyancsak nem síkgráfhoz jutunk, de részgráfként már nem találjuk a K_5, $K_{3,3}$ gráfokat. Azok csak topologikus részgráfként, illetve minorként lesznek G-ben. Azaz az első állítás nem megfordítható. Az utolsó két állítás viszont megfordítható.

5. Tétel. *A következő három állítás ekvivalens:*

(i) A G gráf síkgráf.

(ii) A G gráfnak nem topologikus részgráfja a K_5 és $K_{3,3}$ gráf ($G \not\geq K_5; K_{3,3}$).

(iii) A G gráfban nincs K_5 és $K_{3,3}$ minor ($G \not\succeq K_5; K_{3,3}$).

A fenti hármas ekvivalencia két független eredmény összegzése: (i)$\Leftrightarrow$(ii) a Kuratowski-tétel, míg (i)$\Leftrightarrow$(iii) a Wagner-tétel.

3. A Wagner-tétel bizonyításának fontosabb részei

Wagner-tételét indirekten bizonyítjuk. tegyük fel, hogy van G ellenpélda rá. Azaz G nem síkgráf és nincs benne sem K_5, sem $K_{3,3}$ minor. Ekkor van olyan G ellenpélda is, ami minimális ($|V| + |E|$ a lehető legkisebb). Így G minden „csonkítása" elveszti ellenpélda mivoltát. Ha ez a csonkított rész egy minor, akkor ez csak úgy lehat, ha az már síkgráf. A bizonyítás hátralévő része „ellentmondás-vadászat".

6. Lemma. *G 3-szorosan összefüggő egyszerű gráf.*

7. Lemma. *Ha H 3-szorosan összefüggő és $|V(H)| > 4$, akkor alkalmas e élére G/e is 3-szorosan összefüggő.*

A két lemma bizonyítása is csak egy technikai kitérő a Wagner-tétel indoklásában. A következő fejezetre hagyjuk.

8. Következmény. *Legyen G egyszerű, háromszorosan összefüggő gráf, melynek csúcsszáma legalább 5. Ekkor található olyan $xy \in E(G)$ él, melyre a $G - \{x, y\}$ gráf kétszeresen összefüggő.*

Következmény bizonyítása: A lemmában szereplő e él megfelelő, hiszen $G - \{x, y\} = (G/e) - [e]$ kétszeresen összefüggő lesz. Q.e.d.

Legyen e a Lemma és a Következmény közös éle. G/e nem tartalmaz K_5, illetve $K_{3,3}$ minort (minorjaik G-nek is minorjai), háromszorosan összefüggő, így az indukciós feltevés alapján G/e szépen lerajzolható. Ebben a lerajzolásban ott van a $G - \{x, y\}$ gráf lerajzolása és a kontrahált élt reprezentáló $[e]$ csúcs is. A $G - \{x, y\}$ gráf kétszeresen összefüggő, így lerajzolásának minden tartományát egy kör határolja. Azt is amely belsejében ott van az $[e]$ csúcs. Legyen C ezen tartomány határoló körgráf.

Legyen $P = N(x) \cap V(C)$, $K = N(y) \cap V(C)$, ahol $N(x)/N(y)$ az x/y csúcs szomszédainak halmaza. P elemeire mint piros, K elemeire mint kék csúcsok hivatkozunk. Fontos látni, hogy $P \cap K \neq \emptyset$ eset is előfordulhat, azaz a két szín nem két kizáró kategória.

A következő két fogalom és egy főlemma segítségével juthatunk el a bizonyítás befejezéséhez.

Definíció. Egy kört C kört u és v csúcsa ($u, v \in V(C)$) két zárt ívre bontja, mégpedig az $[u, v]^{\frown}$ és $[v, u]^{\frown}$ ívre. A két ív a két uv út csúcshalmaza. Körünk szépen lerajzolt a síkra, így az ívek megkülönböztethetők: a jelölésben az első csúcsból indulva, óramutató járása szerint haladva jutunk el a második csúcshoz. A két ív (csúcshalmaz) metszete az $\{u, v\}$ csúcsok. $(u, v)^{\frown}$ legyen $[u, v]^{\frown} - \{u, v\}$.

Definíció. Legyen A és B a C kör csúcshalmazának két részhalmaza. Azt mondjuk, hogy A és B szeparálható, ha megadhatóak olyan $u, v \in V(C)$ csúcsok, melyekre $A \subseteq [u, v]^{\frown}$ és $B \subseteq [v, u]^{\frown}$, vagyis létezik olyan felbontása a körnek, hogy A az egyik ív, B a másik ív csúcsainak részhalmaza.

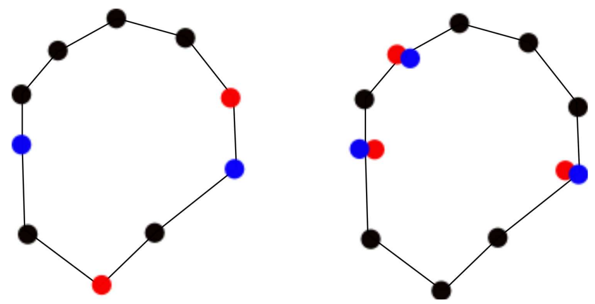
Megjegyezzük, hogy a két ív zárt, így végpontjaik közösek. A definíció megengedi, hogy nem-diszjunkt ponthalmazok is szeparálhatók legyenek. A következő kombinatorikus lemma a szeparálhatóság akadályait írja le.

9. Tétel (Főlemma). *Legyen C egy kör és A és B a kör két véges részhalmaza. A és B pontosan akkor nem szeparálható, ha a következő két lehetőség valamelyike teljesül.*

(i) *Létezik olyan $a, a' \in A$ és $b, b' \in B$ négy különböző csúcs, melyek a körön felváltva helyezkednek el, azaz az $(a, a')^{\frown}$ ív b és b' közül pontosan egyet tartalmazzon.*

(ii) $A = B$ *és* $|A| = |B| = 3$.

A szeparálhatóságot megakadályozó konfigurációk a következő ábrán láthatók (A és B a piros/kék színekkel kódolt).



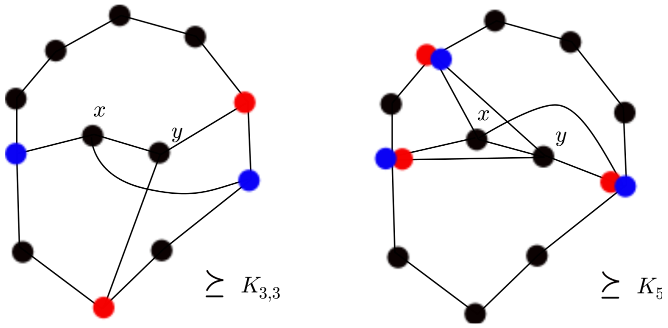
10. ábra.

A lemma egyszerű eset analízissel ellenőrizhető. Ezt az érdeklődő hallgatóra bízzuk.

A Wagner-tétel bizonyítása már egyszerűen adódik:

1. eset: P és K nem szeparálhatóak a C kör mentén. A főlemma alapján az (i) vagy (ii) akadályok valamelyike fellép.

Látható, hogy az (i) esetben $K_{3,3}$, az (ii) esetben K_5 jelenik meg minorként, ami ellentmondás, hiszen G-ről feltettük, hogy nincs benne K_5 illetve $K_{3,3}$ minor.

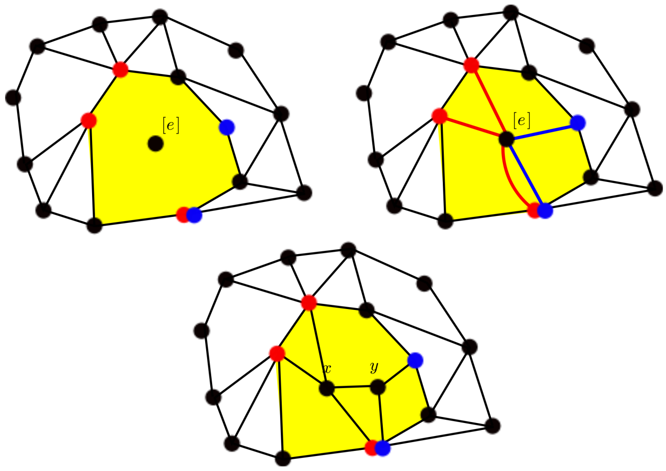


11. ábra.

2. eset: P és K nem szeparálhatóak a C kör mentén.

A P halmaz és a K halmaz pontjai ott vannak a C kör éleinek görbéjén (amely élgörbék egy Jordan-görbévé olvadnak össze). Ábrázoljuk a $G - \{x, y\}$ megfelelő tartományát és az $[e]$ csúcsot, ahol $[e]$ az összehúzott e élt reprezentáló csúcs pontja.

Az $[e]$ csúcsból kiinduló élek egy része eredetileg x-ből indult és P valamelyik eleméhez ment, másik részük eredetileg y-ból indult és K valamelyik eleméhez ment. Mivel P és K szeparált, ezért ezen éleknek megfelelő élgörbék megrajzolhatók átmetszés nélkül úgy, hogy az $[e]$-t reprezentáló csúcs körül a kiinduló görbék között egy blokkban legyenek a P-hez és egy blokkban legyenek a K-hez menő görbék.



12. ábra.

G/e ezen lerajzolásából G egy szép lerajzolása már könnyedén előállítható, ha a kontrakciót „visszavonjuk”. ■

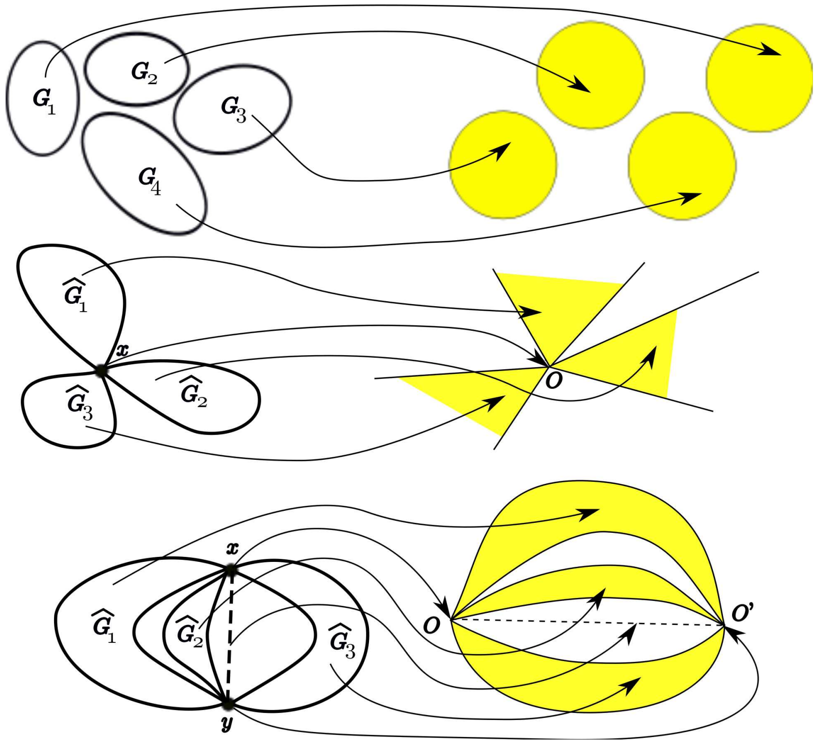
4. A Wagner-tétel bizonyításának technikai részletei

10. Lemma. *Ha Wagner-tételt tudjuk háromszorosan összefüggő gráfokra, akkor a tétel igaz.*

Bizonyítás. $|V|$-re vonatkozó teljes indukcióval igazoljuk a Wagner-tételt. $|V| \leq 4$ esetben minden gráf szépen lerajzolható a síkra. Az indukciós lépeshez eseteket különböztetünk meg az összefüggőség foka szerint.
1. eset: *A G gráf nem összefüggő.* Ha G nem összefüggő, akkor jelölje $G_1, G_2, \ldots$ a gráfunk komponenseit. Egyik komponens sem tartalmazhat K_5 és $K_{3,3}$ minort, mindegyik komponens csúcsszáma kisebb mint G-é. Így az indukciós feltevés alapján mindegyik komponens szépen síkra rajzolható. Vegyünk fel komponensszámnyi diszjunkt egységkörlapot. Az egyes komponensek lerajzolásai lekicsinyíthatők (amennyiben szükséges) úgy, hogy az egyes körlapokba berajzolható legyen. Így G egy lerajzolásához jutunk.
2. eset: *A G gráf összefüggő, de nem 2-szeresen összefüggő.* Ekkor létezik $x \in V(G)$ elvágó csúcs, melyre $G - \{x\}$ több komponensre esik szét: $G_1, G_2, G_3, \ldots$ Mindegyik komponenshez adjuk hozzá az x csúcsot (a komponenshez vezető élekkel). Az így kapott gráfok legyenek $\widehat{G}_1, \widehat{G}_2, \ldots$. Ezek mind G részgráfjai. Ezért egyik sem tartalmazhat K_5 és $K_{3,3}$ minort, mindegyik csúcsszáma kisebb mint G-é. Így az indukciós feltevés alapján mindegyik $\widehat{G}_i$ szépen síkra rajzolható. $\widehat{G}_i$ szép lerajzolása módosítható úgy, hogy az x csúcsot realizáló P_x pont a nem korlátos tartomány határán legyen (például gömbre vetítéssel, majd a gömbrerajzolás alkalmas P_x környéki felvágásával). Ez a lerajzolás deformálható úgy, hogy egy szögtartományban legyen, ahol P_x a szögtartomány O csúcsába kerül.

Legyen ℓ a $\widehat{G}_i$ gráfok száma. Vegyünk fel ℓ szögtartományt, amelyek diszjunktak kivéve közös csúcsukat, O-t. A fenti lerajzolásokat külön szögtartományba illesztve ezek G egy szép lerajzolásává állnak össze.
3. eset: *A G gráf 2-szeresen összefüggő, de nem 3-szorosan összefüggő.* Ekkor létezik $x, y \in V(G)$ elvágó csúcspár, melyre $G - \{x, y\}$ több komponensre esik szét: $G_1, G_2, \ldots$ Mindegyik komponenshez adjuk hozzá az x és y csúcsot a komponenshez vezető élekkel. Az így kapott gráfok legyenek $\widehat{G}_1, \widehat{G}_2, \ldots$. Ezek mind G részgráfjai. Definíciójuk miatt egyikben sem lesz x és y szomszédos. (G_i bővítésénél csak az x, y-ból a komponenshez vezető éleket adtuk hozzá.)

Legyen $\widehat{G}_1^+, \widehat{G}_2^+, \ldots$ azok a gráfok, amiket $\widehat{G}_i$-ből úgy kapunk, hogy x-et és y-t összekötjük. Ezek már nem szükségszerűen részgráfok G-ben. DE minorok! Ezért egyik sem tartalmazhat K_5 és $K_{3,3}$ minort, mindegyik csúcsszáma kisebb mint G-é. Így az indukciós feltevés alapján mindegyik $\widehat{G}_i^+$ szépen síkra rajzolható. $\widehat{G}_i^+$ szép lerajzolása módosítható úgy, hogy az $e = xy$ élt realizáló $\mathcal{G}_e$ élgörbe a nem korlátos tartomány határán legyen (például gömbre vetítéssel, majd a gömbrerajzolás alkalmas $\mathcal{G}_e$ felezőpontjának környékén történő felvágásával). Ez a lerajzolás deformálható úgy, hogy $\mathcal{G}_e$ egyenes OO'szakasz legyen (O reprezentálja az x és O' az y csúcsot), míg a lerajzolás többi része egy OO' feletti „holdacskába” essen.



13. ábra.

Legyen ℓ a $\widehat{G}_i$ gráfok száma. Vegyünk fel ℓ holdacskát, amelyek diszjunktak kivéve közös csúcsaikat, O, O'-t és elkerülik az OO' szakaszt. A $\widehat{G}_i^+$ fenti lerajzolásában ott van $\widehat{G}_i$ lerajzolása is, amit az i-edik holdacskában elhelyezhetünk (x-et O, y-t O' reprezentálja). Ha szükséges, akkor az összeragasztott lerajzolásokhoz hozzávesszük az OO' szakaszt is az xy él reprezentálására. Így G egy szép lerajzolásához jutunk. ■

11. Lemma. *Legyen G egyszerű, háromszorosan összefüggő gráf, melynek csúcsszáma legalább 5. Ekkor található olyan $e \in E(G)$ él, melyre a G/e gráf 3-szorosan összefüggő.*

Bizonyítás. A lemma bizonyítását nem végeztük el. ■

5. További kapcsolódó tételek

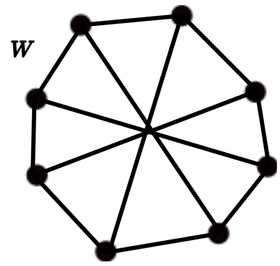
Végezetül néhány tétel kimondása következik bizonyítás nélkül.

12. Tétel (Fáry-tétel). *Ha G egyszerű síkgráf, akkor lerajzolható úgy, hogy minden élgörbéje szakasz legyen.*

13. Tétel (Tutte-tétel). *Ha G egyszerű, 3-szorosan összefüggő síkgráf, akkor lerajzolható úgy, hogy minden élgörbe egyenes szakasz, továbbá minden korlátos tartománya konvex sokszög.*

14. Tétel (Steinitz-tétel). *Egy G gráf pontosan akkor egy konvex poliéder élgráfja, ha 3- szorosan összefüggő egyszerű gráf.*

15. Tétel (Wagner struktúratétele). *A G gráf pontosan akkor nem tartalmaz K_5 minort, ha felépíthető síkgráfokból és W Wagner-gráfból (lásd alább) legfeljebb három pontú klikk menti összeragasztásokkal és csúcs- illetve élelhagyásokkal.*



14. ábra.

16. Következmény (Wagner színezési tétele). *Ha a G gráf tartalmaz K_5 minort, akkor a kromatikus száma legfeljebb* 4.

A Wagner-tétel alapján átírhatjuk a négy-szín-tételt: Ha a G gráf nem tartalmaz K_5, illetve $K_{3,3}$ minort, akkor G kromatikus száma legfeljebb 4. Wagner színezési tétele azt mondja, hogy a négy-szín-tétel ezen alakjában elég csak K_5-t minorként kizárni. Ez az élesítés nagyon fontos.

Bizonyítása a struktúratétel után, a négy-szín-tételre vonatkozó hivatkozással egyszerű: A síkgráfok és a Wagner-gráf 4-színezhető, a klikkek menti ragasztás nem növeli meg a kromatikus számot. Azaz az élsítés nem sokkal nehezebb mint a négy-szín-tétel.

Sejtés (Hadwiger-sejtés). Ha a G gráf nem tartalmaz K_{k+1} minort, akkor G kromatikus száma legfeljebb k.

Illetve egy ekvivalens megfogalmazása:

Sejtés (Hadwiger-sejtés). Ha a G gráf nem k-színezhető, akkor tartalmaz K_{k+1} minort.

BSc-s tanulmányainkból tudjuk, hogy a minorság helyett részgráfsággal dolgozva a megfelelő állítás „nagyon hamis”. Nem annyira nyilvánvaló, hogy topologikus részgráfsággal dolgozva is (nagyon) hamis állításhoz jutunk (ezt láthatjuk, ha az interneten a ‘Hajós-conjecture’-re keresünk).

A minorokat használó Hadwiger-sejtés $k = 2$ esetet triviális. A $k = 3$ esete egyszerű. A $k = 4$ eset igaz (Wagner színezési tétele), a négy-szín-tétellel ekvivalens (ahogy vázoltuk). Ahogy k nő a sejtés nehezedik (miért?). Ennek ellenére a $k = 5$ eset (a négy-szín-tétel élesítése) bizonyított. A bizonyítása a négy-szín-tételre hivatkozik, de így is nagyon bonyolult.