Gráfelmélet/Diszkrét Matematika MSc hallgatók számára

Folyamok (folytatás), magasabb fokú összefüggőség

2012. szeptember 27. Előadó: Hajnal Péter

1. 0-1 folyamok uniform hálózatokban

Definíció. Egy hálózatot uniformnak nevezzük, ha minden él kapacitása egyenlő. Feltesszük (feltehetjük), hogy a közös kapacitás 1.

Uniform hálózatokban vizsgáljuk az optimális folyamokat. Ha azzal a feltétellel élünk, hogy folyamunk minden élen egész értéket vegyen fel, akkor is elérhetjük a maximális folyamértéket. Feltételünk uniform hálózatban azt jelenti, hogy folyamunk $f : E(G) \to \{0, 1\}$ függvény. Az ilyen folyamokat 0-1 folyamnak nevezzük. Egy $f : E(G) \to \{0, 1\}$ 0-1 folyam azonosítható az $f^{-1}(1) = \{e \in E(\overrightarrow{G}) : f(e) = 1\} := F$ élhalmazzal. Azaz az f által leírt F élhalmazból visszafejthető a folyam. Ez az azonosítás ugyanaz mint az $E(\overrightarrow{G})$ részhalmazai és az $E(\overrightarrow{G})$-n értelmezett karakterisztikus függvények azonosítása.

Észrevétel. Legyen f egy k értékű 0-1 folyam.

A megmaradási törvény teljesülése azt jelenti, hogy minden v csúcsra — ami nem-forrás és nem-nyelő — ugyanannyi F él fut be, mint ki (v F-befoka egyenlő F-kifokával). Továbbá a nyelőbe k-val több él fut be mint ahány él kifut, a forrásból pedig k-val több él fut ki, mint ahány befut.

Az észrevételt egy formulában összefoglalhatjuk:

$$d^F_{be}(v) - d^F_{ki}(v) = \begin{cases} k, & v = t \\ -k, & v = s \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

1. Következmény. *Legyen f egy k értékű 0-1 folyam. Legyen F a megfelelő élhalmaz, tegyük fel, hogy F-ben ott van egy irányított kör C élhalmaza. Ekkor az $F - C$ élhalmaz is megfelel egy k értékű folyamnak.*

Bizonyítás. Valóban, az ellenőrizendők az élhalmaz be- és kifokaira vonatkozó feltételek. Az irányított kör éleinek elhagyása a kifok és befok különbségét nem változtatja. ■

2. Lemma. *Legyen f egy $k(\geq 0)$ értékű 0-1 folyam. Legyen F a megfelelő élhalmaz. Ekkor F tartalmazza k éldiszjunkt st út élhalmazát.*

Bizonyítás. $k = 0$ eset nyilvánvaló.

Feltehető, hogy $k > 1$, így $F \neq \emptyset$. F egy folyamot kódol, így észrevételünk alapján a csúcsok F-befokának és F-kifokának különbségeit ismerjük.

Legyen e egy forrásból kiinduló él F-ben (ilyennek lennie kell). Ekkor a fokszám feltételek miatt e-t előre kiterjeszthetjük egy P maximális úttá (kör nem alakulhat ki a bővítés során). Az elakadás csúcsa csak a nyelő lehet. Ezzel találtunk egy $P_1 = P$ st utat.

Ekkor $F - P$-re is teljesülnek a megmaradási törvényhez szükséges fokszám feltételek, azaz $F - P$ is egy folyamot kódol. Értéke $k - 1$. Indukcióval befejezhetjük a bizonyítást vagy leírhatunk egy rekurzív (mohó) eljárást ami megtalálja az állítást bizonyító k darab utat. ■

Ha a lemmabeli F irányított körmentes, akkor erősebbet is állíthatunk.

3. Lemma. *Legyen f egy $k(\geq 0)$ értékű* 0-1 *folyam. Legyen F a megfelelő élhalmaz. Tegyük fel, hogy F körmentes. Ekkor F k éldiszjunkt st út élhalmazának uniója.*

Bizonyítás. Ha a nyelőre illeszkedik befutó és kifutó él is, akkor ezen csatlakozó élpár előre/hátra folytatható. A folytatás szükségszerűen kört alakítani ki, ami ellentmond feltételünknek. Tehát a $k \geq 0$ értékű folyamot kódoló élhalmazban pontosan k él illeszkedik a forrásra és ezek kifutó élek. Hasonlóan pontosan k él illeszkedik a nyelőre és ezek befutó élek.

Az előző lemma alapján találhatunk k éldiszjunkt st út éthalmazt F-ben. Ha ezek kiadják a teljes F-et készen vagyunk. Ha nem, akkor lennie kell további éleknek. Ezek egyike sem illeszkedik a forrásra vagy nyelőre. Így egy további él előre/hátra folytatása szükségszerűen irányított körhöz vezetne, ami ellentmondás. ■

A teljesség kedvéert megemlítjük a következő tételt, ami az összes 0-1-folyam-élhalmaz esetén garantál egy felbontást/dekompozíciót éldiszjunkt körökre és utakra.

4. Tétel. *Legyen F egy élhalmaz G-ben. A következők ekvivalensek:*

(i) *F egy f folyamot ír le.*

(ii) *Minden nem nyelő és nem forrás csúcsra ugyanannyi F-él fut be, mint ahány kifut.*

(iii) *F felírható $\dot\cup_i P_i \dot\bigcup \dot\cup_i Q_i \dot\bigcup \dot\cup_i C_i$ alakban, ahol a P_i halmazok egy-egy forrás-nyelő irányított út élhalmazai, a Q_i halmazok egy-egy nyelő-forrás irányított út élhalmazai, a C_i halmazok egy-egy irányított kör élhalmazai. (A jelölésben ott van az a feltétel, hogy az unió tagjai DISZJUNKT élhalmazok.) Továbbá $\{P_i\}$ és $\{Q_i\}$ útrendszerek közül csak egy lehet nem üres.*

A tétel a korábbi ötletek segítségével egyszerűen bizonyítható. Sőt egy algoritmus is adható a felbontás megtalálására.

5. Algoritmus. *Mohó algoritmus egy F 0-1-folyam-élhalmaz dekompozíciójára.*
// F-befokok és F-kifokok különbségeit ismerjük.

Kör keresés: `Amíg` $F \neq \emptyset$

```
   Ha találunk, vegyük ki egy C irányított kör élhalmazát F-ből.
      // A megtalált C egy lehetőség egy összetevőre.
      // Mohó módon az output részévé tesszük.
   F-et helyettesítsük F − C-vel és térjünk vissza kör keresésre.
// A körkeresésből kilépve az aktuális F
//irányított körmente,
```

Út keresés: `Vegyük ki egy` P `irányított forrás-nyelő`

```
   vagy nyelő-forrás út élhalmazát.
      // A megtalált P egy lehetőség egy összetevőre.
      // Mohó módon az output részévé tesszük.
      // Ha st utat találunk a körmentesség miatt nem
      // lehet ts út és fordítva is.
   F-et helyettesítsük F − P-vel és térjünk vissza az út keresésre..
```

Az észrevételt egy kissé finomítjuk: Ha a fenti dekompozícióban $k > 0$ darab st-út szerepel, akkor a folyam értéke k. Ha $\ell > 0$ darab ts-út szerepel, akkor a megfelelő f folyam értéke $-\ell$. Speciálisan, ha f folyam értéke 0 (az ilyeneket cirkulációnak nevezik), akkor élhalmaza diszjunkt irányított körök uniója.

Külön megfogalmazzuk a számunkra fontos következményt.

Definíció. Egy F 0-1-folyam-élhalmaz *egyszerű*, ha körmentes és éldiszjunkt st utak vagy ts utak uniója.

6. Tétel. *Legyen $(\overrightarrow{G}; s, t; c)$ egy hálózat, amely kapacitásfüggvénye az azonosan 1 függvény. Ekkor van olyan f optimális folyam (értéke k szükségszerűen nem negatív), amely élhalmaza egyszerű. f értéke (a hálózatbeli maximális folyamérték) k, a dekompozícióban szereplő st-utak száma.*

2. Következmények

7. Tétel (Menger-tétele). *$\overrightarrow{G}$ egy irányított gráf $s, t \in V$ két ($s \neq t$) kitüntetett csúccsal. Ekkor*

$$\max\{k : P_1, \ldots, P_k \text{ éldiszjunkt } st \text{ utak}\} =$$
$$= \min\{|L| : L \subseteq E(\overrightarrow{G}), \overrightarrow{G} - L\text{-ben nincs } \overrightarrow{st} \text{ út}\}.$$

Megjegyzés. A tételt a következő „mesével” világíthatjuk meg: Tegyük fel, s lakótelep, t belváros, a rendőrök tudják, hogy bünözők a lakótelepről a belvárosba tartanak. Utak lezárásával szeretnék ellenőrizni a belvárosba bemenő forgalmat (amely a kresz betartásával történik, azaz az útszakaszok irányítása szerint halad mindenki). A bizonyítandó állítás bal oldala a bünözők független terveinek maximális száma, míg a jobb oldal a rendőrök számára lezárandó útszakaszok minimális száma.

Bizonyítás. $\leq$: Egyszerű. A fenti mesén alapuló konkrét példa jól megvilágítja az állítást. Tegyük fel, hogy a bal oldal értéke 10. Azaz a bünözők 10 éldiszjunkt tervvel állhatnak elő. Minden útlezárás legfeljebb egy tervet akadályozhat meg (itt használjuk a tervek függetlenségét/éldiszjunktságát). Azaz a rendőrök számára legalább 10 út lezárása szükséges.

$\geq$: A feladat gráfjában minden él kapacitása legyen 1. Az így kapott H hálózatban az optimális folyamok közt lesz egy, amely egy egyszerű élhalmazzal azonosítható. Ha értéke k, akkor k éldiszjunkt st útra szétszedhető. Ez megfordítva is igaz. k éldiszjunkt st útból összerakható egy k értékű folyam. Azaz

$$\max\{k : P_1, \ldots, P_k \text{ éldiszjunkt } st \text{ utak}\} = \max\{\text{é}(f) : F \text{ folyam } H\text{-ban}\}$$

A Menger-tételben szereplő élhalmazokat nevezzük szeparáló élhalmazoknak (elhagyásuk után nem lesz st út G-ben). Minden st-vágás $S \to T$ élei egy szeparáló halmazt adnak. Fordítva is igaz: Bármely L szeparáló élhalmaznak van olyan részhalmaza ami egy vágás élhalmaza: Például a

$$\mathcal{V} = (s\text{-ből } G - L\text{-ben elérhető csúcsok, } s\text{-ből } G - L\text{-ben nem elérhető csúcsok})$$

vágás $S \to T$ élei L egy részhalmazát adják. Azaz a minimális szeparáló halmazt megkapjuk, ha vesszük azt az st-vágást, amely S-T élei a legkevesebben vannak. Másrészt

$$\min_{V \text{ vágás}} c(\mathcal{V}) = \min_{V \text{ vágás}} |\{\overrightarrow{xy} : x \in S, y \in T\}|.$$

Összegezve

$$\min\{c(\mathcal{V}) : \mathcal{V} \text{ egy } st\text{-vágás}\} = \min\{|L| : L \subseteq E(\overrightarrow{G}), \overrightarrow{G} - L\text{-ben nincs } \overrightarrow{st} \text{ út}\}.$$

Az MFMC-tétel következménye a Menger-tétel. ∎

A tételben az alapgráf irányítottsága nem lényeges.

8. Következmény (Menger tétele (irányítatlan gráfban élfüggetlen utakra vonatkozó változat)). *Legyen G egy irányítatlan gráf, és s, t két pont a gráfban. Ekkor*

$$\begin{aligned} \max\{k : &P_1, \ldots, P_k \text{ éldiszjunkts } st \text{ utak}\} = \\ &= \min\{|L| : L \subset E(G), G - L\text{-ben nincs } st \text{ út}\}. \end{aligned}$$

Csak vázoljuk ennek egy lehetséges igazolását: Legyen $\overrightarrow{G}$ az a gráf, amelyet G-ből úgy kapunk, hogy minden $e = xy$ élét helyettesítjük két éllel: egy $\overrightarrow{xy}$ és egy $\overrightarrow{yx}$ éllel (azaz az e él oda-vissza irányított két példányával). Írjuk fel az MFMC-tételt.

A maximális folyamérték kombinatorikus leírásánal kell egy kissé óvatosnak lennünk. Vegyünk egy $f : E(\overrightarrow{G}) \to \{0,1\}$ optimális folyamot és az ezt leíró F élhalmazt. Ez egyszerűvé tehető egy mohó algoritmussal. Ezt úgy alkalmazzuk, hogy az oda-vissza menő élpárokat (kettő hosszú irányított köröket) dobjuk el F-ből. Ha ezek elfogytak, akkor fejezzük be az egyszerűvé tételt. Legyen F_0 a kapott élhalmaz. (ebben minden eredeti élnak maximum egy példánya szerepel). F_0 éldiszjunkt $\overrightarrow{st}$-utak élhalmazainak uniója. Ezek G-ben megfelelnek st-utak élhalmazainak. Ezek előzetes előkészületeink miatt éldiszjunkt utak lesznek G-ben. (Az előkészületek nélkül ezt nem tudnánk.) Azaz a maximális folyamérték éppen a bizonyítandó egyenlőség bal oldala.

A további része a bizonyításnak teljesen analóg az irányított esettel.

Továbbá útrendszerünk éldiszjunktsága helyettesíthető az útrendszer belső ponthalmazainak páronkénti diszjunktságára vonatkozó feltétellel.

9. Következmény (Menger tétele (pontfüggetlen utakra vonatkozó változatok)).

(i) Legyen $\overrightarrow{G}$ egy irányított gráf, és legyen s,t két pont a gráfban. Tegyük fel, hogy nincs $\overrightarrow{st}$ irányított él, a gráfban. Ekkor

$$\max\{k : P_1,\ldots,P_k \text{ pontfüggetlen } \overrightarrow{st} \text{ út}\} = \\ = \min\{|U| : U \subseteq V(\overrightarrow{G})\setminus\{s,t\} \text{ és } G-U\text{-ban nincs } \overrightarrow{st} \text{ út}\}.$$

(ii) Legyen G egy irányítatlan gráf, és legyen s,t két pont a gráfban. Tegyük fel, hogy nincs st él a gráfban. Ekkor

$$\max\{k : P_1,\ldots,P_k \text{ pontfüggetlen } st \text{ út}\} = \\ = \min\{|U| : U \subseteq v(\overrightarrow{G})\setminus\{s,t\} \text{ elválasztja } s\text{-et és } t\text{-t}\}.$$

Ismét csak vázoljuk mi a teendő, ha ezen változatot szeretnénk a fentiek után igazolni.

(i)-hez legyen $\overrightarrow{G}'$ az a gráf amely $\overrightarrow{G}$-ből nyerünk a következő módon: Legyen $V(\overrightarrow{G}') = \{s,t\} \cup \{x_{\text{be}}, x_{\text{ki}} : x \in V(\overrightarrow{G}) - \{s,t\}\}$. Minden $e = \overrightarrow{xy} \in E(\overrightarrow{G})$ élnek feleljen meg egy $e' = \overrightarrow{x_{\text{ki}}, y_{\text{be}}}$ él (legyen $s_{\text{ki}} = s_{\text{be}} = s$ és $t_{\text{ki}} = t_{\text{be}} = t$). $E(\overrightarrow{G}')$ élhalmazt alkossák ezek az élek és az $\{\overrightarrow{x_{\text{be}}x_{\text{ki}}} : x \in V(\overrightarrow{G}) - \{s,t\}\}$ élek.

Írjuk fel az MFMC-tételt $\overrightarrow{G}'$ gráfból uniform kapacitások definiálásával kapott hálózatra. A kapott két egyenlőség két oldaláról lássuk be, hogy a bizonyítandó egyenlőség egy-egy oldalával egyenlők.

(ii)-hez korábbi ötleteinket kell összegezni. A részletek kidolgozását az érdeklődő hallgatókra bízzuk.

⋆

A Bsc-ben látott Kőnig-tétel is belátható a folyamok elméletének segítségével, illetve Menger tételenek alkalmazásával.

Emlékeztető. Ha egy gráf csúcshalmaz $A\dot{\cup}F$ (alsó és felső pontok) és minden él egyik vége A-beli, másik F-beli, akkor gráfunk páros gráf.

Egy gráf esetén

$$\nu(G) = \max\{|M| : \ M \text{ párosítás } G\text{-ben}\},$$

$$\tau(G) = \max\{|L| : \ L \text{ lefogó } G\text{-ben}\},$$

ahol $M \subset E(G)$ párosítás, ha az M-beli élek végpontjai egy $2|M|$ elemű halmazt alkotnak (és így állítanak párba), továbbá $L \subset V(G)$ lefogó ponthalmaz, ha minden élnek legalább az egyik végpontja L-beli. Általában $\nu(G) \leq \mu(G)$, vannak példák, ahol szigorú egyenlőtlenség teljesül.

10. Tétel (Kőnig-tétel). *Legyen G egy páros gráf. Ekkor*

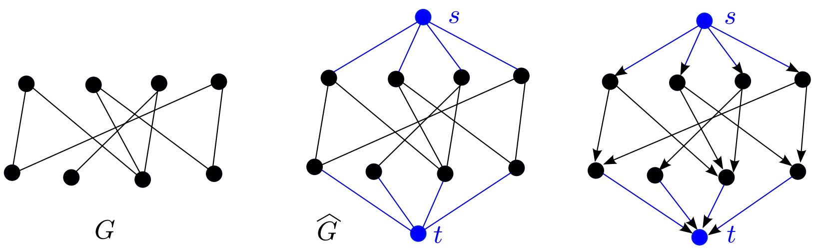
$$\nu(G) = \tau(G).$$

Bizonyítás. F „fölé" helyezzünk egy s csúcsot és pontosan F elemeivel kössük össze. A „alá" helyezzünk egy t csúcsot és pontosan A elemeivel kössük össze. G csúcsai és élei a fenti leírt kiterjesztéssel alkossák a $\widehat{G}$ gráfot.

Ezen gráf minden élét irányítsuk lefelé. Minden élnek legyen 1 kapacitása. Az így kapott uniform hálózatban az egyszerű folyamok megfelelnek egy M párosítás elemeinek (k független élnek) st úttá való kiterjesztésével kapott $\widehat{M}$ úthalmaznak. Az utak számának maximuma

$$\max\{\text{é}(f) : \ f \text{ folyam}\} = \nu(G).$$

A szeparáló élhalmazok esetén G-beli élhalmazt nem érdemes beválasztani (egyetlen „folytató" éle elvégzi ugyanazt a munkát). Ha pedig csak s-re vagy t-re illeszkedő élekkel dolgozunk, akkor ez az élhalmaz pontosan akkor választja el s-et és t-t, ha G-beli végpontjai lefogaó halmazt alkotnak.



1. ábra.

Összefoglalva

$$\min\{|S| : \ S \text{ szeparáló élhalmaz}\} = \tau(G).$$

Az MFMC tétel adja a bizonyítandót. ■

A fenti bizonyítás az MFMC alapján dolgozik. Menger tételei után jóval egyszerűbb, ha a $\widehat{G}$ gráfban hivatkozunk Menger tételének irányítatlan, pontfüggetlen változatára.

3. Gráfok magasabb fokú összefüggése

Definíció. Legyen k egy pozitív egész. G gráf *k-szorosan élösszefüggő* ($k$élöf), ha tetszőleges k-nál kisebb elemmszámú élhalmazát elhagyva a kapott gráf összefüggő lesz. Formulával

$$\forall F \subseteq E(G) : |F| < k \Rightarrow G - F \ \text{ összefüggő.}$$

A feltételnek teljesülni kell $F = \emptyset$ esetén is, azaz alapgráfunk összefüggő. Az összefüggőségnek meg kell maradnia, ha valódi élelhagyás történik.

Definíció. Egy G gráf *k-szorosan (pont)összefüggő* ($k$öf.), ha tetszőleges k-nál kisebb elemszámú csúcshalmazát elhagyva a kapott gráf összefüggő és $|V(S)| > k$. Formálisan

$$\forall U \subseteq V(G) \quad |U| < k \Rightarrow G - U \ \text{ összefüggő..}$$

A pontszámra adott technikai feltétel szerepe, hogy a gráf elegendően nagy legyen: a csúcsok elhagyása után is legalább két pont maradjon.

Példa. A fák nem kétszeresen élösszefüggőek, ha van élük. A körök kétszeresen élösszefüggőek, és így kétszeresen összefüggőek is, de nem háromszorosan összefüggőek. A $k+1$ ponttú gráfok közül csak a teljes gráf k-összefüggő.

Megjegyzés. A következő diagram a különböző összefüggőségi fogalmak viszonyait foglalja össze. Azon gráfosztályok között, amelyek tartalmazása nem vezethető le a diagramból nincs is tartalmazás.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1\text{öf} & \Leftarrow & 2\text{öf} & \Leftarrow & 3\text{öf} & \Leftarrow & \dots & \Leftarrow & k\text{öf} & \Leftarrow \\
\Updownarrow\,{\scriptstyle \text{öf}}\,\Updownarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & & & \Downarrow & \\
1\text{élöf} & \Leftarrow & 2\text{élöf} & \Leftarrow & 3\text{élöf} & \Leftarrow & \dots & \Leftarrow & k\text{élöf} & \Leftarrow
\end{array}$$

A vízszintes sorokban levő kapcsolatok a definíciók alapján nyilvánvalóak. A függőleges nyilakkal jelölt kapcsolatok egy kicsit nehezebbek, az alábbi lemmából következnek.

11. Lemma. *Legyen e egy G gráf tetszőleges éle és v egy tetszőleges pontja. Legyen $k \geq 2$.*

(a) Ha G k-szorosan élösszefüggő, akkor $G - e$ $(k-1)$-szeresen élösszefüggő.

(b) Ha G k-szorosan összefüggő, akkor $G - v$ $(k-1)$-szeresen összefüggő.

(c) *Ha G k-szorosan élösszefüggő, akkor $G - v$-nek tetszőleges számú komponense lehet.*

(d) *Ha G k-szorosan összefüggő, akkor $G - e$ $(k-1)$-szeresen összefüggő.*

Célunk, hogy belássuk a többszörösen összefüggő gráfok következő jellemzését.

12. Tétel. (i) *Egy G gráf akkor és csak akkor k-szorosan élösszefüggő, ha tetszőleges két pontja között létezik k darab páronként éldiszjunkt út.*

(ii) *Egy G gráf akkor és csak akkor k-szorosan összefüggő, ha tetszőleges két pontja között létezik k darab út, amelyek belső pontjainak halmaza páronként diszjunktak (Útjaink pontfüggetlenek), továbbá $|V(G)| > k$.*

A két állítás egy-egy iránya egyszerű: a megfelelő utak létezése garantálja a megfelelő összefüggőséget. Valóban: Tegyük fel, hogy a gráfunk megfelelő ritkítása után nem összefüggő gráfot kapunk, azaz két maradék pont között — x és y — nem lesz út. A feltételt x és y-ra alkalmazva a garantált útrendszer mindegyikét megszüntette a ritkítás. Az utak függetlensége miatt ez nem lehet.

13. Tétel. *Legyen G gráf, k pozitív egész.*

(i) *G akkor és csak akkor k-szorosan élösszefüggő, ha bármely $x, y \in V(G)$-re létezik k darab páronként éldiszjunkt xy út G-ben.*

(ii) *G akkor és csak akkor k-szorosan összefüggő, ha $|V(G)| > k+1$, és bármely x, y csúcsra létezik k darab páronként pontfüggetlen xy út G-ben, azaz utak, amelyek belső pontjainak halmazai páronként diszjunktak.*

Bizonyítás. Legyen G, x, y és k adott.

(i) Ha létezik k darab éldiszjunkt xy út G-ben, akkor $k-1$ él elhagyásával még el lehet jutni x-ből y-ba, ezért G k-szorosan élösszefüggő.

Tegyük fel, hogy G k-szorosan élösszefüggő, és alkalmazzuk a Menger-tételt.

$$\begin{aligned} k \le & \min\{|L| : \ L \subseteq E(G), G - L\text{-ben nincs } xy \text{ út}\} = \\ = & \max\{l : P_1, \dots, P_l \text{ éldiszjunkt } xy \text{ utak}\} \end{aligned}$$

Ezért létezik k darab éldiszjunkt xy út G-ben.

(ii) Ha létezik k darab pontfüggetlen xy út G-ben, akkor $k-1$ darab $V(G)\setminus\{x, y\}$-beli pont elhagyásával még el lehet jutni x-ből y-ba, ezért G k-szorosan összefüggő.

Tegyük fel, hogy G k-szorosan összefüggő. Legyen az xy élek halmaza P, P elemszáma p. A P-beli élek pontfüggetlen xy utak. Ha $p \ge k$, akkor teljesül az állítás. Ha $p \le k-1$, akkor $G - P$ $k-p$-szeresen összefüggő, azt kell belátni, hogy létezik $k-p$ pontfüggetlen xy út $G-P$-ben. Alkalmazzuk a Menger tételének irányítatalan, pontfüggetlen változatás ($G-P$-ben x és y nem összekötött).

$$\begin{aligned} k-p \leq & \min\{|U| : \ U \subseteq V(G) \setminus \{x,y\},\ G-P-U\text{-ban nincs } xy \text{ út}\} = \\ = & \max\{l : \ P_1, ...P_l \text{ pontfüggetlen } xy \text{ utak } G-P\text{-ben}\} \end{aligned}$$

Ezért létezik $k-p$ darab pontfüggetlen xy út $G-P$-ben. k darab pontfüggetlen st utat kapunk G-ben, ha ehhez hozzávesszük P elemeit minde 1-hosszú st utakat. ■

⋆

Definíció. A G gráf összefüggőségi paraméterei:

$$\kappa_e(G) = \begin{cases} \max\{k : \ G\ k\text{-szorosan élösszefüggő}\}, & \text{ha } G \text{ összefüggő} \\ 0, & \text{ha } G \text{ nem összefüggő} \end{cases}$$

$$\kappa(G) = \begin{cases} \max\{k : \ G\ k\text{-szorosan összefüggő}\}, & \text{ha } G \text{ összefüggő} \\ 0, & \text{ha } G \text{ nem összefüggő} \end{cases}$$

Észrevétel. Minden G gráfra teljesülnek a következők:

$$\begin{aligned} \kappa_e(G) = & \min_{x,y \in E(G)} \max\{k : \ P_1, ...P_k \text{ éldiszjunkt } xy \text{ utak}\} = \\ = & \min_{x,y \in E(G)} \min_{\mathcal{V}\ xy \text{ vágás}} |E(\mathcal{V})| = \min_{\mathcal{V} \text{ vágás}} |E(\mathcal{V})|, \end{aligned}$$

ahol $\mathcal{V} = \{S, T\}$, $S \cup T = V(G)$, $S \cap T = \emptyset$, $S, T \neq \emptyset$.

14. Lemma. *$\kappa_e(G)$ és $\kappa(G)$ is hatékonyan kiszámolható folyam-algoritmussal.*

Megjegyzés. $\max_{\mathcal{V} \text{ vágás}} |E(\mathcal{V})|$ kiszámítása nehéz, $\mathcal{NP}$-teljes probléma.