Gráfelmélet/Diszkrét Matematika MSc hallgatók számára

Folyamok

2012. szeptember 17. Előadó: Hajnal Péter

1. Folyamok elméletének alafogalmai

Legyen $\vec{G}$ irányított gráf, $s, t \in V(G)$ két kijelölt csúcs és $c : E(G) \to \mathbb{R}^+$ függvény. Ekkor $(\vec{G}, s, t, c)$ négyesét *hálózatnak* nevezzük, ahol s pontot *forrásnak*, t pontot *nyelőnek*, c-t pedig *kapacitásfüggvénynek* nevezzük.

Megjegyzés. Hálózatok sok gyakorlati probléma absztrakciójához hasznosak. Például egy város vízvezetékhálózata írható így le, ahol a kapacitásfüggvény a csövek terhelhetőségét (például átmérő) adja meg. Egy úthálózat is modellezhető így. Egy él kapacitása az áteresztő képessége, a megfelelő útszakasz szélességével, sávjainak számával arányos.

A fenti fogalom egy statikus fogalom. Olyan mint egy programozó számára a hardwer. Az alkalmazott matematiukus/programozó számára a hálózat adott/felmért és az alkalmazás inputja. A dinamika leírásához új fogalom kell.

Definíció. Az $f : E(G) \to \mathbb{R}$ függvényt *folyamnak* nevezzük a H hálózatban, ha

(F1) minden e él esetén $0 \leq f(e) \leq c(e)$

(F2) minden $v \in V \setminus \{s, t\}$ esetén $\sum_{e:e\in E_{be}(v)} f(e) = \sum_{e:e\in E_{ki}(v)} f(e)$, ahol $E_{be}(x)$ az x-be befutó élek halmaza, $E_{ki}(x)$ az x pontból kifutó élek halmaza.

Az első feltételt megengedettségnek nevezzük. f tehát megengedett, ha a csöveken nem folyik át a kapacitásnál nagyobb, illetve negatív mennyiség. A második feltételben szereplő egyenlőségek vezérlő elvét *megmaradási törvénynek* nevezzük. Ezek természetes fizikai feltételek.

Ahhoz, hogy könnyebben elképzeljük a folyamokkal kapcsolatos fogalmakat, nézzünk egy másik alkalmazást. A hálózat legyen egy város úthálózata. A forrás lehet egy lakótelepet, lakóparkot reprezentáló csúcs. A belvárost reprezentálja a nyelő. A folyam a reggeli forgalom: a belvárosba szeretnének eljutni autóval az emberek. Minden élen a folyam megadja az ott folyó forgalmat.

Példa. Az $f \equiv 0$ folyam egy tetszőleges hálózatban. Ekkor minden élen 0 anyagmennyiség fut.

Speciálisan minden hálózatban megadható folyam. Hogy ezek a folyamok összevethetők legyenes szükségünk van egy újabb fogalomra.

Definíció. Egy folyam értéke $\text{é}(f) = \sum_{e\in E_{be}(t)} f(e) - \sum_{e\in E_{ki}(t)} f(e)$ (t a nyelő).

Az f folyam értéke negatív is lehet, ilyenkor visszafele folyik a víz a csőhálózatban. Az üres folyam értéke 0.

Folyam probléma: Adott egy hálózat. Keressünk hozzá egy maximális értékű folyamot.

A maximális jelző első olvasatban problémás. Egy folytonos problémával állunk szemben, amikor nem szüségszerű a legnagyobb érték fevétele. Egy folyam egy m élű hálózatban m valós szám leírásával adható meg, azaz azonosítható $\mathbb{R}^E \equiv \mathbb{R}^m$ egy pontjával. A folyamoknak megfelelő pontok $\mathbb{R}^m$ egy kompakt halmaza, amelyen az érték egy folytonos függvény. Ez a folytonos függvény felveszi maximumát $\mathbb{R}^{|E(G)|}$ egy kompakt részhalmazán.

Megjegyzés. Tulajdonképpen a folyam probléma a lineáris programozás feladat egy speciális esete: a maximalizálandó $\acute{e}(f)$ függvény lineáris, valamint a folyamok halmaza lineáris egyenlőségekkel és egyenlőtlenségekkel van definiálva.

Az, hogy az érték nem lehet tetszőleges nagy az elemi módon is könnyen látszik. Tetszőleges f folyam esetén

$$\acute{e}(f) = \sum_{e \in E_{be}(t)} f(e) - \sum_{e \in E_{ki}(t)} f(e) \leq \sum_{e \in E_{be}(t)} c(e).$$

Azaz $\acute{e}(f)$ a hálózat egy paraméterével becsülhető.

Vizsgálatunkat egy fontos észrevétellel kezdjük. Bevezetjük a vágás fogalmát. Ez lehetőséget ad a folyam értékének alternatív leírására és ez alapján a legnagyobb folyamértékére alternatív felső becsléseket kapunk.

Definíció. Legyen $\overrightarrow{G}$ egy irányított gráf. Egy $\mathcal{V} = \{S, T\}$ vágás $\overrightarrow{G}$-ben a ponthalmaz egy kétosztályú partíciója. S és T a vágás két osztálya vagy partja. $\mathcal{V}$ egy **s-t vágás**, ha $s \in S$, és $t \in T$.

Jelölés. $E(\mathcal{V})$ a $\mathcal{V}$ vágás élhalmaza, azon élek halmaza, amelyek két végpontja a vágás két különböző oldalára esik.

Irányított gráfban $E(\mathcal{V})$ természetes módon két osztályba sorolható aszerint, hogy a vágás egy élének kezdőpontja a forrás vagy a nyelő oldalán van.

$$E^+(\mathcal{V}) = \overrightarrow{E}(\mathcal{V}) = \{e = \overrightarrow{xy} : x \in S, y \in T\},$$

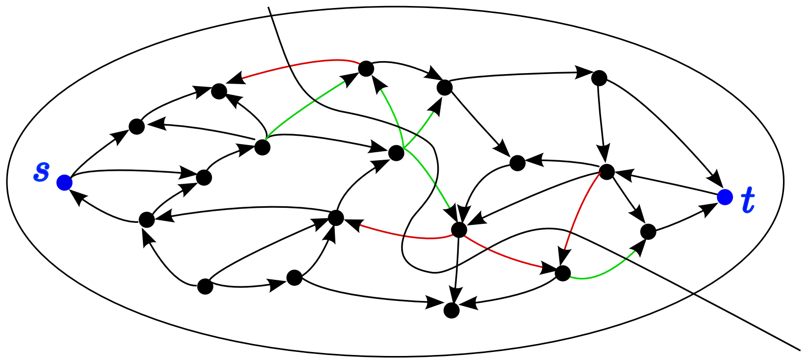
$$E^-(\mathcal{V}) = \overleftarrow{E}(\mathcal{V}) = \{e = \overrightarrow{xy} : x \in T, y \in S\}.$$

1. Lemma. *Legyen f egy tetszőleges folyam.*

(i) $\acute{e}(f) = \sum_{e: e \in E_{ki}(s)} f(e) - \sum_{e: e \in E_{be}} f(e)$

(ii) Tetszőleges $\mathcal{V} = \{S, T\}$ s-t vágásra:

$$\acute{e}(f) = \sum_{e: e \in \overrightarrow{E}(\mathcal{V})} f(e) - \sum_{e: e \in \overleftarrow{E}(\mathcal{V})} f(e).$$



1. ábra. Egy vágás

Tehát egy megfelelő $\mathcal{V}$ vágás alapján ki lehet fejezni a folyam értékét: a forrás felől átfolyó anyagmennyiségből kivonva a nyelő irányából visszafolyó anyagmennyiséget megkapjuk é(f)-t.

Bizonyítás. (i) az (ii) pont speciális esete ($S = \{s\}, T = V(G) - \{s\}$), így elég (ii)-t igazolni.

T minden v csúcsára egy egyenlőséget írunk fel. A $v \in T \setminus \{t\}$ csúcsokra (azaz a nem forrásokra) felírjuk az anyagmegmaradás törvény rendezett formáját:

$$\sum_{e:e \in E_{be}(v)} f(e) - \sum_{e:e \in E_{ki}(v)} f(e) = 0.$$

A $v = t$ esetben a folyam értékének definícióját írjuk fel:

$$\sum_{e:e \in E_{be}(v)} f(e) - \sum_{e:e \in E_{ki}(v)} f(e) = é(f).$$

Ezután összegezzük az összes T-beli csúcsra felírt egyenlőséget. A jobb oldal pontosan é(f) lesz. Egy él viszonya a vágáshoz négyféle lehet. Az S-beli élek nem szereplnek a felírt egyenlőségekben. A T-beli e élek kettőben szereplnek. Az egyikben befutó élként, hozzájárulása az öszeghez $+$ előjellel/$+1$ súllyal $f(e)$. Egy másikban kifutó élként, hozzájárulása az öszeghez $-$ előjellel/-1 súllyal $f(e)$. Az összegzésben $f(e)$ kiesik. A maradék élek ($\mathcal{V}$ élei) két kategóriába esnek:

1. A $E^+(\mathcal{V})$-beli e élek egytelen v csúcsra felírt egyenlóségben szereplnek és ott szerepük: befutó él. Az összeghez $+f(e)$ hozzájárulást ad.

2. A $E^-(\mathcal{V})$-beli e élek egytelen v csúcsra felírt egyenlóségben szereplnek és ott szerepük: kivezető él. Az összeghez $-f(e)$ hozzájárulást ad.

Így az összegzés után a bal oldalon a lemma állításában szereplő jobb oldali kifejezést kapjuk. Az állítás adódik. ■

Az alábbi becslést adhatjuk é(f)-re:

2. Következmény. *Legyen f tetszőleges folyam, $\mathcal{V}$ vágás. Ekkor*

$$é(f) \leq \sum_{e:e \in E(\mathcal{V})} c(e) =: c(\mathcal{V}),$$

$c(\mathcal{V})$-t a **vágás kapacitás***ának nevezzük.*

Az állítás bizonyítása egyszerű. A folyam érték $\mathcal{V}$-re alapuló felírásában az $f(e)$ tagok $c(e)$-vel, a $-f(e)$ tagok 0-val becsülhetők felül. A becslésünk tetszőleges folyamra és tetszőleges vágásra igaz. Legerősebb változata:

3. Következmény.

$$max_{f\ folyam} é(f) \leq min_{\mathcal{V}\ vágás} c(V),$$

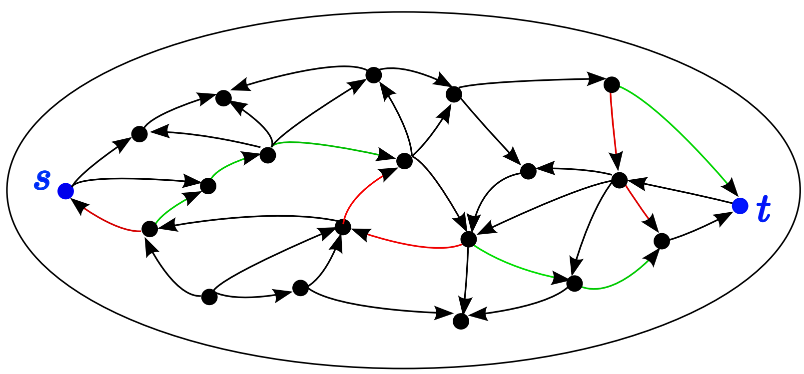
tehát a maximális folyam érték legfeljebb akkora mint a minimális vágáskapacitás.

Tudjuk, hogy véges sok vágás van egy n csúcsú gráfban, pontosan 2^{n-2} db. Azaz a jobb oldal egy véges halmazon vett optimalizálási probléma. Célunk, hogy belássuk, hogy felső becslés valójában egyenlő a maximális folyamértékkel. Ha f optimális/maximális értékű, akkor alkalmas vágással E^{+}-beli élek kapacitásig kihasználtak, míg az E^{-}-beli éleken nincs visszafolyás.

Definíció. Legyen $H(\overrightarrow{G}, s, t, c)$ hálózat, ebben pedig egy f folyam. Legyen P egy irányítatlan értelemben vett út $\overrightarrow{G}$-ben. (Azaz hagyjuk el a $\overrightarrow{G}$ gráf irányítását (így kapjuk a G irányítatlan gráfot. P egy út ebben.) P éleit két kategóriába sorolhatjuk ($\overrightarrow{G}$-beli irányításának megfelelően: vagy előrehaladó él (azaz a P-t leíró pont-él-pont-él... sorozatban kiinduló végpontja előbb van) vagy hátramutató él. Ezen élek halmazai $E^{\text{előre}}(P)$ és $E^{\text{hátra}}(P)$. Így $E(P) = E^{\text{előre}}(P) \bigcup E^{\text{hátra}}(P)$. Ekkor **P javítóút** ($f$ folyamra, $H(\overrightarrow{G}, s, t, c)$ hálózatban), ha

(J1) P egy s-t út G-ban, (speciálisan $E(P) = E^{\text{előre}}(P) \bigcup E^{\text{hátra}}(P)$),

(J2) $e \in E^{\text{előre}}(P)$ esetén $f(e) < c(e)$, míg $e \in E^{|texthtra}(P)$ esetén $f(e) > 0$, azaz ha az előrehaladó éleken nem a folyam nem használja ki a csőszakasz által engedet maximumot (az él kapacitását) valamint visszafele (a hátramutató éleken) is történik bizonyos „visszafolyás".



2. ábra. Egy irányítatlan st út

4. Lemma. *Legyen f egy folyam a $H(\overrightarrow{G}, s, t, c)$ hálózatban. Ekkor ha találunk egy P javító utat, akkor f folyam javítható, azaz nem maximális értékű.*

Bizonyítás. Legyen P egy javító út f-re. Legyen $min_{e \in E^{\text{előre}}(P)}(c(e) - f(e)) = \delta^{\text{előre}}$ (azaz, egy élhez tartozó szám azt mutatja meg, hogy legfeljebb mennyivel növelhető az anyagmennyiség ezen élen a kapacitás korlát megsértése nélkül), hasonlóan $\delta^{\text{hátra}} = min_{e \in E^{\text{hátra}}} f(e)$, valamint a minimumuk: $\delta = min\{\delta^{\text{hátra}}, \delta^{\text{előre}}\}$. Javító út esetén $\delta > 0$, azaz lehet még növelni az anyagáramlást. Legyen a **módosított folyam**

$$\widetilde{f}(e) = \begin{cases} f(e), & e \notin E(P), \\ f(e) + \delta, & e \in E^{\text{előre}}(P), \\ f(e) - \delta, & e \in E^{\text{hátra}}(P). \end{cases}$$

A következő észrevételek szolgálják a bizonyítás alapját:

(1) $\delta > 0$.

(2) $\widetilde{f}$ megengedett,

(3) $\widetilde{f}$ teljesíti a megmaradási törvényt minden nem-nyelő, nem-forrás csúcsban,

(4) $\acute{\mathrm{e}}(\widetilde{f}) = \acute{\mathrm{e}}(f) + \delta$.

(2) és (3) együtt igazolja, hogy $\widetilde{f}$ egy folyam. (1) és (4) együtt igazolja, hogy $\widetilde{f}$ értéke nagyobb mint f-é. ∎

Azaz egy javító út felismerése egy módot ad folyamunk javítására. Vajon ez a módszer univerzális-e? Van-e ügyesebb módszer a folyamérték növelésére? Egy ilyen módszer javító út hiányában, egy más logika alapján adna nagyobb értékű folyamot.

2. A folyamok alaptétele és következményei

A következő tétel a korábban feltett kérdések megválaszolásához vezet.

5. Tétel. *Legyen f egy folyam a $H(\overrightarrow{G}, s, t, c)$ hálózatban. A következő állítások ekvivalensek:*

(i) f folyam értéke maximális

(ii) f-hez van olyan $\mathcal{V} = \{S, T\}$ vágás, hogy $\acute{e}(f) = c(\mathcal{V})$,

(iii) f-hez nincs javító út.

Bizonyítás. $(i) \Rightarrow (iii)$: Az előző lemma szerint javító út léte bizonyítja, hogy folyamunk nem optimális. A fenti implikáció ugyanezt az állítást tartalmazza némi logikai átfogalmazással.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Tetszőleges $\mathcal{V}$ vágás kapacitása tetszőLeges folyam értékét felülről becsüli. Ha egy felső becslés egyben folyam érték is, akkor ez a folyam értéke biztos maximális.

A tétel lényege a $(iii) \Rightarrow (ii)$ állítás. Ennek bizonyításához az alábbi fogalmat vezetjük be:

Definíció. *P javítóút-kezdemény* (egy H hálózatban lévő f folyamra), ha:

(J1$^-$ s-ből induló út G-ben,

(J2) tetszőleges $e \in E^{\text{előre}}(P)$ esetén $f(e) < c(e)$ és tetszőleges $e \in E^{\text{hátra}}(P)$ esetén $f(e) > 0$.

Azaz a javító útság feltételei közül csak azt dobjuk el, hogy az út a nyelőbe vezessen. Emiatt egy javítóút-kezdemény nem használható egy folyam növelésére. Ha a megfelelő lemma alapján a folyamunkat megváltoztatjuk, akkor az út x végpontjában a megmaradási törvény megsérül. A javítóút-kezdemény egy olyan út, aminél esélyt láthatunk hogy meghosszabbításával javító utat kapjunk.

Legyen $s \in S = \{x \in V : \text{található} sx \text{javítóút-kezdemény}\}$, $t \in T := V \backslash S = \overline{S}$. Megjegyezzük, ha $x \in S$, azaz x-be vezet javítóút-kezdemény, akkor ez az út végig S-ben vezet, hiszen A javítóút-kezdemény kezdőszeletei is javítóút-kezdemények.

(iii) miatt $t \notin S$. Az „s" út egy 0 hosszú út, ami nyilván javítóút-kezdemény, azaz $s \in S$ A fenti két halmaz egy $\mathcal{V} = \{S, T\}$ vágást határoz meg.

6. Állítás. *A $\mathcal{V} = \{S, T\}$ vágás bizonyítja (ii)-at, azaz $é(f) = c(\mathcal{V})$.*

Bizonyítás. Tudjuk, hogy a vágáson alapulva is felírhatjuk a folyam értékét:

$$é(f) = \sum_{e: e \in \overrightarrow{E}(\mathcal{V})} f(e) - \sum_{e: e \in \overleftarrow{E}(\mathcal{V})} f(e).$$

Legyen tetszőleges $\overrightarrow{xy} \in \overrightarrow{E}(\mathcal{V})$ él (azaz $x \in S$ és $y \in T$). Legyen P egy sx út (irányítatlan értelemben, ami $x \in S$-et bizonyítja (azaz javítóút-kezdemény). Ekkor $\widetilde{P} : P + \overrightarrow{xy}, y$ egy sy út, ami nem lehet javítóút-kezdemény, hiszen $y \notin S$. A javítóút-kezdeménység egyetlen módon „romolhat el": $f(\overrightarrow{xy}) = c(\overrightarrow{xy})$. Valóban $\overrightarrow{xy} \in E^{\text{előre}}(\widetilde{P})$ és $f(\overrightarrow{xy}) < c(\overrightarrow{xy})$ sérülése esetén csak $f(\overrightarrow{xy}) = c(\overrightarrow{xy})$ lehetőség marad egy folyamban.

Teljesen hasonló logika adja, hogy tetszőleges $\overrightarrow{xy} \in \overleftarrow{E}(\mathcal{V})$ él esetén $f(\overrightarrow{xy}) = 0$.

Így fent felírt, a folyam értéket adó kifejezést tovább írhatjuk:

$$é(f) = \sum_{e: e \in \overrightarrow{E}(\mathcal{V})} f(e) - \sum_{e: e \in \overleftarrow{E}(\mathcal{V})} f(e) = \sum_{e: e \in \overrightarrow{E}(\mathcal{V})} c(e) - \sum_{e: e \in \overleftarrow{E}(\mathcal{V})} 0 = c(\mathcal{V}).$$

Ahogy bizonyítani kellett. ■

Az állítás bizonyítása az alaptétel bizonyítását teljessé tette. ■

7. Következmény (Maximális-folyam-minimális-vágás-tétel, Max-flow-min–cut-tetel, MFMC tétel).

$$max_{f\ folyam} é(f) = min_{\mathcal{V}\ vágás} c(\mathcal{V}).$$

Bizonyítás. Valóban. Már lattuk, hogy a bal oldal nem nagyobb mint a jobb oldal. Legyen F egy maximális értékű folyam. Az alaptétel szerint van hozzá (ii) pontban leírt tulajdonságú vágás. Ez éppen azt adja, hogy a jobb oldal sem nagyobb mint a bal oldal. ■

8. Következmény. *A következő algoritmus inputja egy hálózat. Az algoritmus leállásakor egy maximálsi értékű folyamot ad meg.*

Ford-Fulkerson algoritmus*:*
`Kiinduló lépés`*: Legyen $f \equiv 0$, azaz f az üres folyam.*

// A cél egy kiinduló folyam definiálása. Ha látunk egy nagyobb értékű folyamot,
// akkor kezdhetünk ezzel is.
`Keresés inicializálása`*: Legyen* $S := \{s\}$.
// S azon csúcsok halmaza, ahová javítóút-kezdeményeket találtunk.
`Javítóút-kezdemények növelése`*:*
// S növelése.
Legyen

$$B^{\textit{előre}} = \{x \in V \backslash S : \textit{van olyan } y \in S, \textit{ hogy } \overrightarrow{yx} \in E \textit{ és } f(\overrightarrow{yx}) < c(\overrightarrow{yx})\}$$

és

$$B^{\textit{hátra}} = \{x \in V \backslash S : \textit{van olyan } y \in S, \textit{ hogy } \overrightarrow{xy} \in E \textit{ és } f(\overrightarrow{xy}) < c(\overrightarrow{xy})\}.$$

Keressük meg $B^{\textit{előre}} \cup B^{\textit{hátra}}$ *egy* x *elemét.*
Ezután három esetet különböztetünk meg:

(i) `Bővítés:` *Ha* $x \neq t$ *akkor* $S \leftarrow S \cup \{x\}$ *és folyatssuk a* `Javítóút-kezdemények növelése` *lépéssel.*

(ii) `Javítás:` *Ha* $x = t$ *akkor „nyomozzuk vissza” hogyan jutottunk el ide. Az „ok” egy javító út lesz. Ez alapján javítsuk* f*-et:* $f \leftarrow \widehat{f}$ *(lásd a javító út definiáióját követő lemmát). Térjünk vissza a* `Keresés inicializálása` *lépésre.*

(ii) `Leállás:` $B^{\textit{előre}} \cup B^{\textit{hátra}} = \emptyset$.

// Ekkor $t \notin S$. *S konkrét értéke megegyezik azon halmazzal, amit a főtétel*

// (ii)⇒(i) bizonyításában szerepelt.

Ekkor STOP, az aktuális folyam értéke maximális.

A következmény igazolása nyilvánvaló a főtétel bizonyítása alapján: Leállás esetén az aktuális S halmaz egy $\mathcal{V} = (S, T)$ vágás ír le. Erre és az aktuális f-re $\acute{e}(f) = c(\mathcal{V})$, azaz az output korrekt.

Megjegyzés. A fentiek alapján érdemes a Ford—Fulkerson-algorimtust úgy módosítani, hogy leálláskor a kiszámot $\mathcal{V}$ vágást is kiadja. Ez egy olyan vágás lesz, amely előremutató élein kapacitásnyi/maximális anyagmennyiség folyik, míg hátramutató élein nincs visszafolyás. Ez egy laikus számára is mutatja az output korrektségét, abban akkor is megbízhatunk, ha az algoritmus kódolása esetelg nem megbízható.

Az algoritmus javító utas növelésével próbálja elérni az optimális folyamot. A fenti következmény csak azt mondta, ha az algoritmus leáll, akkor outputja korrekt. Ciklizálhat-e az algoritmus? Azaz elképzelhető-e, hogy javítások végtelen sorozatát kapjuk, így sose érjük el az optimális folyamot. Ciklizálás esetén a kapott folyamsorozat értéke monoton nő és a hálózat által korlátozott. Azaz az értékek sorozata konvergens. A ciklizálásnak két kimenetele lehet. Jobb esetben a kiszámolt folyamok értékei az optimális folyamértékhez konvergálnak. Elképzelhető-e, hogy az algoritmus ciklizál, de a folyamértékek sorozatának limesze nem a optimális folyam érték (hanem nyilván annál kisebb)?

A fenti kérdésekre többféle válasz is adható.

1. válasz: Valóságban a kapacitásfüggvény értékkészlete nem a pozitív valós számok halmaza, hanem $\mathbb{Q}^+$, azaza pozitív racionális számok halmaza. Ezek a kapacitás értékek (véges sok) skálázhatók úgy, hogy egészek legyenek (gondolhatunk arra, hogy alkalmas mértékegységváltást végzünk vagy a kapacitás értékeket leíró racionális számok közös nevezőjével minden beszorzunk).

Ha a kapacitások egészek és a kiinduló folyam is egészértékű (folyamot leíró függvény értékkészlete $\mathbb{N}$), akkor az algoritmus futása során végig csak egész számokkal dolgozik. Speciálisan $\delta > 0$ is egész lesz, azaz $\delta \geq 1$ (lásd a javítóút definícióját követő lemmát) Azaz a folyam minden javításánál a folyam értéke legalább 1-gyel nő, így nem lehet ciklizálás.

2. válasz: Elméletben elképzelhetjük, hogy pontos valós aritmetikával dolgozunk. A fenti algoritmus javítóút-kezdemények növelése olyan szabadon van megfogalmazva, hogy tetszőleges javítóút megtalálásához vezet. Azaz sok rövid javítóút létezése esetén is lehetséges, hogy a fenti nem-determinisztikus leírás egy hosszú javítóúthoz vezet Példák adhatók, hogy ekkor elképzelhető az, hogy a kiszámolt folyamok értékeinek monoton növő korlátos sorozata nem az optimális folyamértékhez tart.

3. válasz: Módosítsuk a javítóút keresést a szélessségi keresés filozófiája szerint. Az így kapott algoritmus a Ford—Fulkerson-algoritmus Edmonds—Karp-változata. Ekkor csak a `Javítóút-kezdemények növelése` lépést változtatjuk meg az alábbiak szerint:

Határozzuk meg a $B = B^{\text{előre}} \cup B^{\text{hátra}}$ halmazt.
Ezután három esetet különböztetünk meg:

(i) `Bővítés:` Ha $t \notin B$ akkor $S \leftarrow S \cup B$ és folyatssuk a `Javítóút-kezdemények növelése` lépéssel.

// Ekkor az $S = S_{\text{új}}$ halmaz bővítésénél olyan x csúcsokat kell összegyűjteni,

// amelynél a hozzátartozó y csúcs a $B_{\text{régi}}$ halmazból kerül ki.

(ii) `Javítás:` Ha $x = t$, akkor az eredeti algoritmus alapján járunk el.

(ii) `Leállás:` Ha $B^{\text{előre}} \cup B^{\text{hátra}} = \emptyset$, akkor az eredeti algoritmus alapján járunk el.

Ez a változat garantálja, hogy a legrövidebb javító utat találjuk meg. Belátható, hogy az Edmonds—Karp-algoritmus (sőt a Ford—Fulkerson-algoritmus minden olyan változata, ami a legrövidebb javítóutakkal javít) olyan, hogy $\mathcal{O}(|V|^4)$ javítás után leáll, speciálisan nincs ciklizálás. Persze a fenti állítás jóval erősebb. A futási idő végessége helyett egy felső becslést ad rá, ami az input méretében polinomiális. A fenti változat egy úgynevezett polinomiális algoritmus. A polinomiális jelző (amit a fenti vázalatos leírás magyaráz meg) az „elméletileg hatékonynak tekintendő” elfogadott formalizálása.

A 1. válasz gondolatmenetéből kapjuk a következő következményt.

9. Következmény. *Legyen* $(\overrightarrow{G}, s, t, c)$ *hálózat, amelyben* $c : E(\overrightarrow{G}) \to \mathbb{N}^+$. *Ekkor létezik* $f : E(\overrightarrow{G}) \to \mathbb{N}$ *optimális folyam.*

Megjegyezzük, hogy nem állítjuk, sőt nem is igaz, hogy minden optimális folyam szükségszerűen olyan, hogy minden élen egész anyagmennyiség folyik. Például lehetséges olyan optimális folyam, amely hálózatában az élek egy nagy részét nem használjuk ($f(e) = 0$) és ott irracionális mennyiségű anyagot tudunk cirkuláltatni úgy, hogy a folyam értéke ne változzon (optimális maradjon).