Gráfelmélet/Diszkrét Matematika MSc hallgatók számára

Fokszámsorozatok

2012. szeptember 3. Előadó: Hajnal Péter

Az előadás a BSc Kombinatorika kurzus folytatása. Sokszor vissza kell utalnunk, fel kell idéznünk ott elhangzott fogalmakat, összefüggéseket. Az ilyen „emlékeztetők” rendszeresen megszakítják az előadást.

Emlékeztető. Idézzünk fel néhány fontos gráfelméleti fogalmat. *Gráfnak* nevezzük azokat a (V, E, I) hármasokat, ahol V és E tetszőleges diszjunkt halmazok, $I \subseteq V \times E$ illeszkedési reláció. A V halmazt a gráf *csúcshalmazának*, E-t *élhalmaznak* nevezzük. Azt mondjuk, hogy a v csúcs illeszkedik az e élre, ha $(v, e) \in I$. Az illeszekdési reláció olyan, hogy minden élre egy vagy két csúcs illeszkedik.

Az egy csúcsra illeszedő éleket *hurokéleknek* nevezzük. Ha e_1 és e_2 olyanok, hogy ugyanazon csúcs(ok)ra illeszkednek, őket *párhuzomos éleknek* nevezzük. Az olyan gráfokat, amelyek nem tartalmaznak hurokélt és párhuzamos éleket, *egyszerű gráfoknak* hívjuk.

Egy csúcs *fokán* a csúcsra illeszkedő élek számát értjük, úgy számolva, hogy minden hurokél kétszer illeszkedik egyetlen pontra.

1. Fokszámsorozatok

Definíció. A $d_1, \ldots, d_n$ számsorozatot a G gráf fokszámsorozatának nevezzük, ha G fokainak nemcsökkenő sorozata. Speciálisan $n = |V|$, $d_1 \leq \ldots \leq d_n$ teljesül.

Megjegyzezzük, hogy a fokszámsorozatból a gráf élszáma is kiolvasható az $|E| = \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{2}$ összefüggés alapján.

A témakör alapkérdése a következő: adott $\{d_i\}_{i=1}^n$ számsorozat mikor lesz valamely G gráf fokszámsorozata? (Ekkor azt mondjuk, hogy a sorozatot realizálja a G gráf.) Amennyiben G-re semmilyen kikötést nem teszünk, a válasz egyszerű.

1. Állítás. *A $\{d_i\}_{i=1}^n$ számsorozat pontosan akkor realizálható, ha $\sum_{i=1}^n d_i$ páros.*

Az egyszerű bizonyítás (ami egy gyakorló feladat) a hurokélek lehetőségét erősen kihasználja.

star

Természetesen adódik a kérdés, hogy mi a helyzet, ha hurokéleket nem engedünk meg. Vagy általában: Mikor realizálható természetes számok egy adott sorozata egy speciális feltételekkel rendelkező gráffal? A következőkben ilyen kérdeșeket vizsgálunk.

2. Tétel. *A $\{d_i\}_{i=1}^n$ számsorozat pontosan akkor realizálható hurokél nélküli gráffal, ha*

1. *$\sum_{i=1}^n d_i$ páros, és*

2. $d_n \leq d_1 + \cdots + d_{n-1}$.

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy $\{d_i\}_{i=1}^n$ realizálható hurokél nélkül. Ekkor az *1.* feltételről láttuk, hogy teljesül. A *2.* feltételhez tekintsük a realizáló gráf d_n-hez tartozó csúcsát, ez d_n élre illeszkedik. Másrészt az összes többi csúcs összesen $d_1 + \cdots + d_{n-1}$ élre illeszkedik. A hurokélek kizárása miatt az előbbi csúcson átmenő élek mind illeszkednek egy másik csúcsra is, tehát legfeljebb $d_1 + \cdots + d_{n-1}$ van belőlük. Ebből a *2.* feltétel adódik.

A másik irányt ismét $\sum_{i=1}^n d_i$ szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. Először tekintsük az elfajuló esteket: ha $d_n \leq 1$, akkor az állítás könnyen látható (fokszámsorozatunk egy párosítással realizálható). Ha $n = 2$, akkor a *2.* feltételből $d_1 = d_2$ adódik, így a két csúcs között d_1 darab párhuzamos élt tartalmazó gráf realizálja a sorozatot. A továbbiakban így feltesszük, hogy $n \geq 3$ és $d_n \geq 2$.

A $\sum_{i=1}^n d_i = 0$ esetet ismét realizálja az n pontú, üres élhalmazú gráf. Tegyük fel, hogy $\sum_{i=1}^n d_i \leq m - 1$-re teljesül az állítás, és tekintsük $\sum_{i=1}^n d_i = m$-et. Az indukciós lépést két esetre bontjuk:

(a) $d_{n-2} \lneq d_n$

(b) $d_{n-2} = d_{n-1} = d_n$

Mindkét esetben a $d_1, \ldots d_{n-2}, d_{n-1} - 1, d_n - 1$ számsorozatból képzett nemcsökkenő sorozatot fogjuk realizálni. Azt állítjuk, hogy ez teljesíti a *2.* feltételt, így alkalmazható rá az indukciós feltevés. Valóban, az (a) esetben d_n még mindig maximális elem a sorozatban, és $d_n - 1 \leq d_1 + \cdots + d_{n-1} - 1$ fennáll. A (b) esetben a legnagyobb elem d_{n-2}, így $d_{n-2} \leq d_1 + \cdots + d_{n-3} + d_{n-1} + d_n - 2$ a bizonyítandó egyenlőség, de mivel $d_n \geq 2$, így már az erősebb $d_{n-2} \leq d_{n-1} + d_n - 2$ egyenlőtlenség is teljesül. A fenti sorozatot realizáló gráfhoz egy élt illesztve a d_{n-1}, d_n-hez tartozó csúcsokra megkapjuk az eredeti számsorozatot realizáló gráfot. ■

Megjegyezzük, hogy az indukciós bizonyításból könnyen kiolvasható egy rekurzív algoritmus, amely az adott feltételeknek elegettevő sorozathoz egy megfelelő realizáló gráfot konstruál.

3. Lemma. *Ha a $\{d_i\}_{i=1}^n$ számsorozat realizálható egyszerű gráffal, akkor van olyan realizáló egyszerű gráf, amely csúcsai $v_1, \ldots, v_n$, ahol $d_i = d(v_i)$, és a v_n csúcs szomszédai pontosan a $v_{n-1}, v_{n-2}, \ldots, v_{n-d_n}$ csúcsok (speciálisan $d_n < n$).*

A lemma előtt nézzük meg egy következményét.

4. Következmény (V. Havel és S. Hakimi tétele). *$\{d_i\}_{i=1}^n$ akkor és csak akkor realizálható egyszerű gráffal, ha*

$$d_1, \ldots, d_{n-d_n-1}, d_{n-d_n} - 1, d_{n-d_{n+1}} - 1, \ldots, d_{n-1} - 1$$

is.

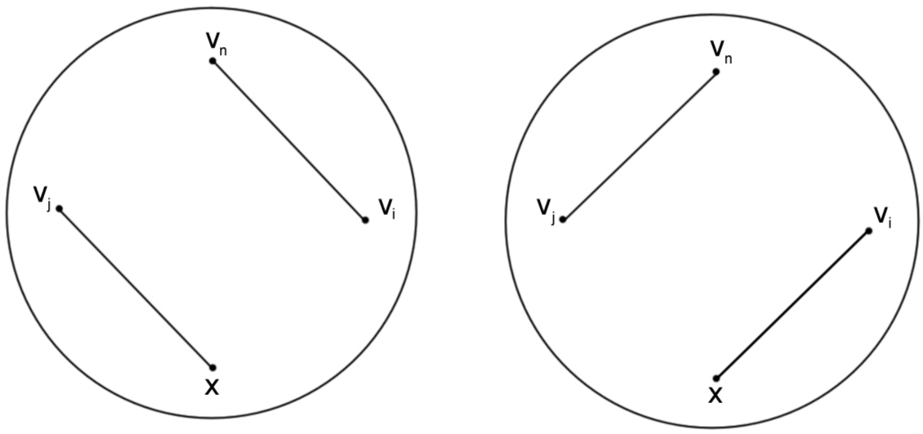
A következmény egyszerűen adódik az előbbi lemmából, hiszen ha vesszük azt a $\{d_i\}_{i=1}^n$-t realizáló gráfot, amelyben v_n a d_n további legnagyobb indexű csúccsal szomszédos, akkor a v_n csúcsot elhagyva olyan gráfot kapunk, amely éppen a fenti fokszámsorozatot realizálja. Az állítás megfordítása a lemma nélkül is egyszerű.

Vegyük észre, hogy így a következmény által rekurzív algoritmust (Havel—Hakimi-algoritmus) kaptunk a realizálásra.

Lemma bizonyítása. Legyen G olyan realizáló gráf, amelyre $d(v_i) = d_i$ és v_n szomszédainak indexösszege maximális. Azt állítjuk, hogy ez a gráf olyan, amilyet a lemma állít.

Indirekt úton tegyük fel, hogy nem, azaz létezik $i < j$ úgy, hogy v_n szomszédos v_i-vel, de nem szomszédos v_j-vel. v_i-nek egy szomszédja tisztázott (v_n), $d_i - 1$ másikról még nem tudunk semmit. v_j-nek van d_j „tisztázatlan” szomszédja. Nyilván $d_i - 1 \leq d_j - 1 < d_j$. Ez csak úgy lehet, ha van egy olyan x csúcs, amely v_j-vel szomszédos, de v_i-vel nem.

Képezzük G-ből a $\widetilde{G}$ gráfot úgy, hogy a (v_i, v_n) és (v_j, x) éleket elhagyjuk G-ből, majd hozzávesszük a (v_i, x) és (v_j, v_n) éleket.



Így a gráf egyszerű maradt és fokszámsorozata sem változott, viszont $\widetilde{G}$-ben megint csak $j-i$-vel nagyobb v_n szomszédainak indexösszege, így G-ben nem lehetett maximális. ■

Emlékeztető. Fa, ághajtás operáció.

5. Tétel. *Tegyük fel, hogy $n \geq 2$. Ekkor a $\{d_i\}_{i=1}^n$ sorozat pontosan akkor realizálható fával, ha $\sum_{i=1}^n d_i = 2n - 2$ és $d_1 > 0$ teljesül.*

Bizonyítás. A feltételek szükségessége könnyen adódik, hiszen bármely fa összefüggő, így $d_1 > 0$, másrészt egy n-pontú fának $n - 1$ éle van, így $\frac{\sum_{i=1}^n d_i}{2} = |E| = n - 1$ is fennáll.

Az elégségesség bizonyítása n szerinti teljes indukcióval történik. Ha $n = 2$, akkor a feltételek miatt $d_1 = d_2 = 1$, és ezt realizálja a kétpontú, egy élt tartalmazó gráf. Tegyük fel, hogy $n - 1$ csúcsra igaz az állítás, és $n \geq 3$. Ekkor egyszerű számolással $1 < \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{n} < 2$ adódik, és persze $d_1 \leq \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{n}$ és $d_n \geq \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{n}$ teljesül. Ebből $d_1 = 1$, és $d_n \geq 2$ adódnak, hiszen a fokszámok egészek. Így a $d_2, d_3, \ldots, d_n - 1$ sorozat rendezésével kapott számsorozat is teljesíti a tételbeli feltételeket, tehát az indukciós feltevés szerint fával realizálható. Ebből a fából megkapható az eredeti fokszámsorozathoz tartozó fagráf egy, a d_n-hez tartozó csúcsból történő ághajtással. ■

2. Fák összeszámlálása

6. Tétel. *Legyen* $(d_i)_{i=1}^n \in \mathbb{N}^n, n \geq 2$ *fokszámsorozat olyan, melyre teljesül a*

$$\sum_{i=1}^n d_i = 2(n-1)$$

egyenlőség, ekkor ezen fokszámsorozatot realizáló fák száma:

$$(n-2)! \prod_{i=1}^n \frac{d_i}{d_i!}. \tag{1}$$

Bizonyítás. Ha valamely j indexre $d_j = 0$, akkor a fokszámsorozat nem realizálható fával, hiszen legalább egy legalább két pontból álló fa csúcsainak fokszáma minimum 1. Ilyen esetben a formula értéke is 0.

Tegyük fel, hogy $1 \leq d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$ és a realizáló fa csúcsai $\{v_i\}_{i=1}^n$, ahol $d(v_i) = d_i$. Tudjuk, hogy

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n d_i = 2\frac{n-1}{n} < 2,$$

így $d_1 = 1$, azaz a v_1 csúcs minden realizáló fában levél. A realizáló fákat $n-1$ diszjunkt csoportba oszthatjuk aszerint, hogy a v_1 csúcsnak melyik másik csúcs a szomszédja. Ha realizáljuk a $d_2, d_3, \ldots, d_{i-1}, d_i - 1, d_{i+1}, \ldots, d_n$ fokszámsorozatot fával, akkor megkapjuk az eredeti fokszámsorozat egy realizációját, amelyben v_1 szomszédja v_i.

Ezt felhasználva teljes indukcióval igazoljuk a formula helyességét. Az állítás $n = 2$ esetén nílvánvalóan igaz. Tegyük fel, hogy (1) teljesül $n-1$ csúcsú fák esetén. Ekkor a $\{d_i\}_{i=1}^n$ fokszámsorozatot realizáló fák száma

$$\sum_{j=2}^n (n-3)! \left(\prod_{i=2}^{j-1} \frac{d_i}{d_i!}\right) \cdot \frac{d_j - 1}{(d_j-1)!} \cdot \left(\prod_{i=j+1}^n \frac{d_i}{d_i!}\right) =$$
$$(n-3)! \left(\prod_{i=1}^n \frac{d_i}{d_i!}\right) \sum_{j=2}^n (d_j - 1) = (n-2)! \prod_{i=1}^n \frac{d_i}{d_i!}.$$

■

7. Következmény (Cayley). *A* $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *halmazon* n^{n-2} *fa adható meg.*
Azaz az n *csúcsú teljes gráf* (K_n) *feszítőfáinak száma* n^{n-2}.

Bizonyítás. A fokszámsorozataik szerint csoportosítva a megszámolandó fákat a számukra a következő összefüggés adódik

$$\sum_{\substack{d_1, d_2, \ldots, d_n \in \mathbb{N} \\ d_1 + d_2 + \cdots + d_n = 2(n-1)}} (n-2)! \prod_{i=1}^n \frac{d_i}{d_i!} = \sum_{d_1^- + d_2^- + \cdots + d_n^- = n-2} \frac{(n-2)!}{\prod_{i=1}^n d_i^-!}, \tag{2}$$

ahol $d_i^- = d_i - 1$.

Vegyük észre, hogy a (2) egyenlőség jobb oldala a multinomiális tétel speciális esete, így

$$\sum_{d_1^-+d_2^-+\cdots+d_n^-=n-2} \frac{(n-2)!}{\prod_{i=1}^n d_i^-!} =$$

$$\sum_{d_1^-+d_2^-+\cdots+d_n^-=n-2} 1^{d_1^-}1^{d_2^-}\cdots 1^{d_n^-}\frac{(n-2)!}{\prod_{i=1}^n d_i^-!} = (1+1+\cdots+1)^{n-2} = n^{n-2}.$$

■

⋆

Irányított gráf alatt olyan (V, E, K, B) rendszereket értünk, ahol V és E diszjunkt halmazok, $K, B \subset E \times V$ illeszkedési relációk, ahol minden e élre egyetlen v csúcs K-illeszkedik (az e él kezdőpontja), és egyetlen u csúcs B-illeszkedik (ez e él végpontja). A (V, E, K, B) irányított gráfból az *irányítás elhagyásával* a $(V, E, K \cup B)$ gráfot kapjuk. Egy irányítatlan gráfnak *irányítása* egy irányított gráf, ha abból az irányítás elhagyásával az eredeti gráfot kapjuk vissza. (Ez nem egyértelmű. Egy G gráfnak $2^{|E'|}$ darab irányítása van, ahol E' a nem hurokélek halmaza.)

Definíció. Legyen G hurokélmentes, irányítatlan gráf. A G gráf pont-él illeszkedési mátrixán a következő, $|V| \times |E|$-s mátrixot értjük: $A_G = (a_{ij})$, ahol

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } v_i \text{ illeszkedik az } e_j \text{ élre,} \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Hasonlóan, ha $\overrightarrow{G}$ irányított, akkor $A_{\overrightarrow{G}} = (a_{ij})$, ahol

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } e_j \text{ befut a } v_i \text{ csúcsba,} \\ -1, & \text{ha } e_j \text{ kifut a } v_i \text{ csúcsból,} \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Vegyük észre, hogy bármely oszlopban pontosan két darab nemnulla elem van, és irányított gráf esetében ezek egyike 1, a másik -1. Ebből adódik, hogy $A_{\overrightarrow{G}}$ sorainak összege $\overrightarrow{0}$.

Definíció. Adott egy G (irányított vagy irányítatlan) gráf, rögzítsük valamely $r \in V(G)$ csúcsát. Ekkor a (G, r) párt *gyökeres gráfnak* nevezzük.

Jelölés. Legyen (G, r) egy gyökeres gráf. $\overrightarrow{G}$ legyen G egy tetszőleges irányítása. Legyen F egy tetszőleges élhalmaz. Ekkor $A_{\overrightarrow{G}}^{-r}[F]$ jelöli azt a mátrixot, amit $\overrightarrow{G}$ pont-él-illeszkedési mátrixából ($A_{\overrightarrow{G}}$-ből) kapunk az r csúcs sorának eltörlésével és az F-beli éleknek megfelelő oszlopok kiemelésével kapunk (azaz $E(G) - F$ éleinek megfelelő oszlopokat is elhagyjuk r sora mellett).

A fenti definíciók mögött fizikai motiváció is áll. Egy ármakörhöz tartozik egy gráf. Ha az egyes huzalszakaszokon/éleken folyó áramerősséget vizsgáljuk. A folyó áramnak iránya is van. Ehhez hasznos vennünk az alap G gráf egy irányítását (a lerögzített irányban áramló áram erőssége pozitív, míg az ellenkező irányú áram negatív erősségű lesz). Kirchoff csomóponti törvénye azt mondja, hogy gráfunk minden csúcsában a bevezető éleken az áramerősségek összege ugyanaz mint a kivezető éleken (a két összeg különbsége 0). Ezeket az egyeneleteket felírva egy lineáris egyenletrendszert kapunk, amely mátrixa $A_{\overrightarrow{G}}$. A mátrix sorainak össze $\overrightarrow{0}$. Azaz a rendszer egyenletei nem függetlenek. Egy r csúcsra felesleges felírnunk, ha a többire már tudjuk. Az így redukált egyenletrendszer mátrixa $A_{\overrightarrow{G}}^{-r}$.