

7. Klikkek és független ponthalmazok

Előadó: Hajnal Péter

2011–12. őszi félév

1. Alapfogalmak

Definíció. Egy G gráf esetén az $F \subset V(G)$ halmazt *független halmaznak* nevezzük, ha bármely $e \in E(G)$ esetén e -nek nincs mindkét végpontja F -ben.

Nyilvánvaló, hogy minél több elemű független halmazt keresünk, annál nehezebb dolgunk van. Ez alapján a következő optimalizálási feladatot fogalmazhatjuk meg:

Definíció. Legyen $\alpha(G)$ az a maximális k szám, amelyre G -ben van k elemű független ponthalmaz.

Ezen fejezet fő célja az $\alpha(G)$ függvénnyel kapcsolatban felmerülő kérdések vizsgálata.

Bevezetünk, illetve emlékeztetjük felidézünk néhány közeli gráfparamétert.

Definíció. A G gráfban $L \subset V(G)$ egy *lefogó halmaz*, ha tetszőleges $e \in E(G)$ élnek van L -beli végpontja.

Definíció. $\tau(G) = \min\{|L| : L \text{ lefogó halmaz}\}$.

Definíció. A G gráfban $K \subset V(G)$ egy *klikk*, ha tetszőleges két különböző eleme szomszédos.

Definíció.

$$\omega(G) = \max\{|K| : K \text{ klikk}\}$$

Észrevétel. Legyen G egy gráf, H azon pontok halmaza, amelyekre támaszkodik hurokél és G^0 a G gráf egyszerűsítettje (hurokéleket elhagyjuk, párhuzamos élseregekből egyet-egyet hagyunk). Ekkor

$$\omega(G) = \omega(G^0), \quad \alpha(G) = \alpha(G^0 - H), \quad \tau(G) = \tau(G^0 - H) + |H|.$$

Az észrevétel lényege, hogy a fenti gráfparaméterek vizsgálatánál feltehető, hogy gráfunk egyszerű.

Észrevétel. (i) Legyen G egy gráf, és G_1, G_2, \dots, G_k a komponensei. Ekkor

$$\alpha(G) = \sum_{i=1}^k \alpha(G_i), \quad \tau(G) = \sum_{i=1}^k \tau(G_i),$$

$$\omega(G) = \max\{\omega(G_i) : i = 1, 2, \dots, k\}.$$

(ii) Legyenek B_1, B_2, \dots, B_l a G gráf blokkjai (kétszeresen összefüggő komponensei). Ekkor

$$\omega(G) = \max\{\omega(B_i) : i = 1, 2, \dots, l\}.$$

A fenti észrevétel alapján a legtöbb α, τ , illetve ω -ra vonatkozó kérdés esetén feltehető, hogy a vizsgált gráf egy összefüggő egyszerű gráf.

Észrevétel. Legyen G egy egyszerű gráf.

- (i) $F \subset V(G)$ akkor és csak akkor független, ha $\overline{F} = V(G) - F$ lefogó.
- (ii) $F \subset V(G)$ akkor és csak akkor független G -ben, ha $F \subset V(G)$ klikk \overline{G} -ben, G komplementerében.
- (iii) $L \subset V(G)$ akkor és csak akkor lefogó halmaz G -ben, ha $\overline{L} = V(G) - L$ klikk \overline{G} -ben, G komplementerében.

1. Következmény. (i) $|V(G)| = \tau(G) + \alpha(G)$, azaz $\alpha(G) = |V| - \tau(G)$.

(ii) *Egyszerű gráf esetén* $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$.

(iii) *Egyszerű gráf esetén* $\tau(G) = |V| - \omega(\overline{G})$.

A fenti észrevétel azt mutatja, hogy a legtöbb esetben az α, τ és ω függvényekre vonatkozó feladatok ekvivalensek.

2. Nagy független ponthalmaz keresése

2. Algoritmus. Input: Egy G egyszerű gráf, Output: egy F független halmaz.

Inicializálás:

Legyen $F := \emptyset$.

// F egy független ponthalmaz, amelyet az algoritmus során mohó
// módon növelünk.

$T := V(G)$.

// T a túlélő csúcsok halmaza, amely vizsgálata ezek után
// következik.

Amíg $T \neq \emptyset$ **Mohó növelés:**

Válasszunk ki egy tetszőleges x csúcsot T -ből.

// x -szel növeljük F -et

$F \leftarrow F \cup \{x\}$

$T \leftarrow T - (\{x\} \cup N_T(x))$

// A beválasztott x -szel együtt T -beli $N_T(x)$ szomszédait is kiveszük
// a túlélő csúcsok halmazából.

3. Lemma. *A mohó független halmazt kereső algoritmus outputjának mérete legalább*

$$\frac{|V(G)|}{D(G) + 1}.$$

Bizonyítás. Minden mohó növelési lépésben T legfeljebb $D(G) + 1$ csúccsal csökken. Az output mérete megegyezik a növelési lépések számával, amelyek során T a kezdeti $|V(G)|$ elemszámról 0-ra csökken. Azaz a növelési lépések száma legalább $|V(G)| / (D(G) + 1)$. ■

Megjegyzés. A bizonyítás alapgondolata egyszerű, érdemes összefoglalni, Azt mondhatjuk, hogy minden növelési lépésnél T -ből „leharapunk” egy darabot. A leharapott rész elemszámát felülről becsültük. Az algoritmus során egész T -t „megettük”, így a harapások számára egy alsó becslés adódott.

A fenti algoritmusban semmit sem mondtunk a választott x -ről. Egy természetes heurisztikával algoritmusunk javítható. Célunk minél több harapás szám elérése. Így x -re egy logikus választás az a csúcs T -ből, amely a legkisebb harapáshoz vezet, azaz amelynek legkevesebb szomszédja van T -ban. (Egyszerű gráfok esetén egy minimális fokú csúcsot választunk $G|_T$ -ből.)

4. Algoritmus. Inializálás:

Legyen $F := \emptyset$.

// F egy független ponthalmaz, amelyet az algoritmus során mohó

// módon növelünk.

$T := V(G)$.

// T a túlélő csúcsok halmaza, amely vizsgálata ezek után

// következik.

Amíg $T \neq \emptyset$ **Mohó növelés:**

Válasszunk ki egy olyan x csúcsot T -ből, amelynek minimális számú szomszédja van $G|_T$ -ben.

$F \leftarrow F \cup \{x\}$

// x -szel növeljük F -et

$T \leftarrow T - (\{x\} \cup N_T(x))$

// A beválasztott x -szel együtt szomszédait is kiveszük a

// túlélő csúcsok halmazából.

A kis módosítás jelentős javításhoz vezet.

5. Tétel. *A módosított mohó független halmazt kereső algoritmus outputjának mérete legalább*

$$\frac{|V(G)|}{\bar{d}(G) + 1},$$

ahol $\bar{d}(G)$ az átlagos fokszám, azaz $\bar{d}(G) = \frac{\sum_{x \in V} d(x)}{|V|} = \frac{2|E|}{|V|}$.

Bizonyítás. Legyen G egy tetszőleges egyszerű gráf és futassuk a módosított mohó algoritmust rajta.

Legyen H_i az i -edik növelési lépésnél T -ből elhagyott csúcsok halmaza (az i -edik harapás). x_i legyen az i -edik növelési lépésnél kiválasztott csúcs. Ekkor $x_i \in H_i$. Nyilván $V(G) = H_1 \dot{\cup} H_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} H_\ell$, ahol ℓ a növelési lépések száma, azaz az output mérete. Legyen $\mathcal{E} = \mathcal{E}(H_1, H_2, \dots, H_\ell)$ az az egyszerű gráf, ahol két pont akkor és csak akkor szomszédos, ha ugyanahhoz az H_i -hez tartoznak.

A bizonyítás „lelke” a következő észrevétel: minden x csúcsra $d_G(x) \geq d_{\mathcal{E}}(x)$, speciálisan $|E(G)| \geq |E(\mathcal{E}(H_1, \dots, H_\ell))|$. Valóban: Egy $x \in H_i$ csúcsban összefutó éleket két csoportba sorolhatunk: $H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_{i-1}$ -be, illetve $H_i \cup \dots \cup H_\ell$ -be vezető élek. Ezek száma legyen $d^{\text{hátra}}(x)$, illetve $d^{\text{előre}}(x)$. Tudva, hogy $x \in H_i$ $d_{\mathcal{E}}^{\text{hátra}}(x) = 0$, illetve

$$d_{\mathcal{E}}^{\text{előre}}(x) = |H_i| - 1 = d_G^{\text{előre}}(x_i) \geq d_G^{\text{előre}}(x).$$

Természetesen \mathcal{E} az algoritmusunk G -n történő futása alatt alakul ki, speciálisan függ G -től. Tetszőleges G -t feltételezve \mathcal{E} -ről csak egy struktúrális ismeretünk van: ℓ komponense van, mindegyik teljes. Ezen ismeret alapján csak G pontszáma és ℓ függvényében adhatunk egy alsó becslést az élszámára.

Legyen $h_i = |H_i|$. Ekkor

$$|E(\mathcal{E})| = \sum_{i=1}^{\ell} \binom{h_i}{2},$$

ahol az ℓ darab h_i összege $|V|$. A Jensen-egyenlőtlenség alapján ($\binom{x}{2} = x(x-1)/2$ konvex függvény) ez akkor lesz minimális, ha mindegyik h_i átlagos nagyságú. Azaz

$$|E(\mathcal{E})| \geq \ell \binom{|V|/\ell}{2}.$$

Így

$$|E(G)| \geq \ell \binom{|V|/\ell}{2},$$

ahol ℓ az algoritmusunk által kiszámolt független halmaz mérete. A bizonyítandó egyenlőtlenség egyszerű rendezéssel kapható. ■

A tétel bizonyításában szereplő ötletek egy kicsit hatékonyabban is alkalmazhatók. A Jensen-egyenlőtlenség éles, de optimalitását olyan h_i értékek adják, amik nem szükségszerűen természetes számok. Így élessége nem szükségszerű esetünkben.

Tegyük fel, hogy algoritmusunk nem választ ki $\ell + 1$ csúcst (az ℓ -edik vagy korábbi csúcs kiválasztása után kimeríti a gráfot). Ekor is definiálható H_1, \dots, H_ℓ csupán elképzelhető, hogy a halmazsorozat néhány utolsó eleme üres, 0 elemű. A bizonyításban meghatároztunk egy alsó becslést az élszámára. Ügyesebben dolgozva a pontos minimum is adódik. Jelöljük ezt minimumot $\mu_{n,\ell}$ -el.

Az új észrevetűnk: Ha G élszáma kisebb mint $\mu_{n,\ell}$, akkor algoritmusunk garantáltan legalább $\ell + 1$ pontot kiválaszt.

Definíció. Egy halmaz k osztályra történő osztályozására azt mondjuk, hogy osztályai *majdnem ugyanakkorák* vagy az osztályozás *kiegyensúlyozott*, ha a következő ekvivalens állítások egyike/mindegyike teljesül

- (i) Minden O osztályra $|O| \in \{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor, \lceil \frac{n}{k} \rceil\}$.
- (ii) Bármely két, O és O' , osztályra $||O| - |O' || \leq 1$.
- (iii) $n - k \lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ darab $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ méretű és $k - (n - k \lfloor \frac{n}{k} \rfloor)$ darab $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ méretű osztály van.

Definíció. $T_{n,k}$ (n pontú, k részes) Turán-gráf csúcshalmaza V , amelyre $|V| = n$ és a csúcshalmazt k diszjunkt osztály adja ki: $V = O_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} O_k$, ahol az osztályok „majdnem” ugyanakkorák.

A Turán-gráf (amely egyszerű gráf) éleit a következőben írjuk le: x és y akkor és csak akkor szomszédosak, ha különböző osztályokba esnek.

6. Lemma.

$$\mu_{n,\ell} = |E(\overline{T}_{n,\ell})|.$$

Bizonyítás. (Vázlat) Tegyük fel, hogy egy \mathcal{E} gráf komponenseinek csúcs-osztályozása nem kiegyenesíthető. Ekkor található két osztály, amelyek méretének különbsége legalább kettő. Változtassuk meg \mathcal{E} -t: A fenti két osztály közül a kisebbet növeljük meg egy csúccsal a nagyobb osztályból. A többi osztályt hagyjuk meg. Így egy módosított \mathcal{E} gráfhoz jutunk. Egyszerű ellenőrizni, hogy a módosítás csökkenti az élszámot. ■

Észrevételünk átfogalmazása ezek után:

7. Tétel. *Ha az n pontú G gráfra $|E(G)| < |E(\overline{T}_{n,\ell})|$, akkor a módosított Mohó algoritmus legalább $\ell + 1$ pontot kiválaszt. Speciálisan $\alpha(G) \geq \ell + 1$.*

Azaz

8. Tétel. *Ha az n pontú G gráfra $\alpha(G) < k$, akkor $|E(G)| \geq |E(\overline{T}_{n,k-1})|$.*

Komplementárisan fogalmazva:

9. Tétel (Turán Pál). *Ha G n pontú egyszerű gráf és nem tartalmaz k elemű klikket, akkor*

$$|E(G)| \leq |E(T_{n,k-1})|.$$

Illetve

10. Tétel (Turán Pál). *Legyen G n pontú egyszerű gráf. Ha*

$$|E(G)| > |E(T_{n,k-1})|,$$

akkor tartalmaz k elemű klikket.

Észrevétel. A Turán-tétel éles: $T_{n,k}$ Turán-gráf nem tartalmaz $k + 1$ elemű klikket (ami olyan csúcshalmaz, amelynek bármely két eleme összekötött). Valóban, ha egy pont halmaz mérete eggyel nagyobb, mint az osztályok száma, akkor a skatulya-elv miatt szükséges, hogy egy osztályból egynél több elemet vegyünk ki. A Turán-gráf definíciója viszont azt mondja, hogy ez a két elem nem összekötött, a kivett csúcshalmaz nem lehet klikk.

A $k + 1$ elemű klikk hiánya egy kissé általánosabb észrevételből is adódik.

Észrevétel. $T_{n,k}$ összes részgráfja k színezhető (a gráfot úgy definiáltuk, hogy a k darab osztály felfogható k színosztálynak). Azaz $T_{n,k}$ nem tartalmaz R részgráfot, ha $\chi(R) \geq k + 1$ (azaz R nem k színezhető).

3. Extremális gráfelmélet

A Turán-tétel egy speciális esete, amikor gráfunkban nincs 4 pontú klikk. Ekkor a tétel azt mondja ki, hogy nem lehet $|E(T_{n,3})|$ -nél több élünk. A feltételünket úgy is megfogalmazhatjuk, hogy gráfunk nem tartalmazza a tetraéder gráfját részgráfként (minden testnek van egy egyszerű gráfja, ahol a test csúcsai a gráf csúcsai, élei pedig a gráf éleinek felelnek meg). Turán tétele bizonyítása után a következő kérdést tette fel:

Mi van más szabályos testekkel? Például hány éle lehet egy gráfnak, ha nincs benne oktaéder, vagy ha nincs benne kocka, vagy ha nincs benne dodekaéder?

Definíció.

$$\text{ext}(n; T) = \max\{|E(G)| : G \text{ } n \text{ pontú, egyszerű gráf, } T \not\subseteq G\}.$$

T -re úgy hivatkozunk, hogy tiltott részgráf. n a csúcsméret. A továbbiakhoz hasznos, ha bevezetjük a következő jelölést: Az n pontú egyszerű gráfok osztályát jelölje \mathcal{G}_n . Tehát $G \in \mathcal{G}_n$ jelentése G egy n pontú egyszerű gráf.

Újból átfogalmazzuk Turán tételét: $\text{ext}(n; K_k) = |E(T_{n,k-1})|$.

Az $\text{ext}(n; T)$ függvény vizsgálatával kapcsolatos problémákat Turán-típusú kérdéseknek nevezzük. Ez az extrémális gráfelmélet első kérdésköre. Az extrémális gráfelméletben bizonyos feltételeknek eleget tevő gráfok közt nézzük meg, hogy bizonyos gráfparaméter milyen határok között változik. Azaz a paraméter milyen extrémális értékeket vehet fel.

Megjegyezzük, hogy Turán Pál kérdése a kocka grádjára mind a mai napig megoldatlan kérdés.

4. Extrémális gráfelméleti eredmények

A továbbiakban feltesszük, hogy a T tiltott gráfban nincsenek izolált csúcsok: Az izolált csúcsok hozzáadása/elvétele csak ott játszik szerepet, ahol T mérete meghaladja n -et.

Észrevétel. Legyen I a két pontot és egyetlen élt tartalmazó gráf. Ekkor $\text{ext}(n; I) = 0$.

Ha egy élt tiltunk, akkor nyilván a maximális élszám nulla lesz.

Észrevétel. Legyen \wedge a három pontot és két élt tartalmazó gráf. Ekkor $\text{ext}(n; \wedge) = \lfloor n/2 \rfloor$.

Ha két összefutó élt tiltunk, akkor minden csúcs foka 0 vagy 1. Azaz a fokok összege legfeljebb n . Az élszám legfeljebb $n/2$. Mivel az élszám mindig egy természetes szám, ezért felső becslésünk igazából $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

A másik irányú egyenlőtlenség bizonyításához konstruálnunk kell egy \wedge részgráfot nem tartalmazó gráfot: Ez egy teljes párosítás n vagy $n-1$ csúcson (ha n paritásától függően). Ennek élszáma $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Észrevétel. Legyen M_2 a négy pontot és két nem összefutó élt tartalmazó gráf (azaz egy két élű párosítás). Ekkor $\text{ext}(n; M_2) = n - 1$, ha $n \geq 4$.

Ennek ellenőrzése az érdeklődő hallgatók számára egy egyszerű feladat.

11. Következmény. Ha T olyan, hogy $|E(T)| \geq 2$, akkor elég nagy n esetén $\text{ext}(n; T) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

A továbbiakban legalább két élű tiltott részgráfokkal foglalkozunk. A körmentes tiltott gráfok esete egyszerű.

12. Tétel. Legyen T erdő (azaz körmentes gráf; azaz olyan gráf, amely a komponensei fák). Legyen T -nek legalább két éle. Ekkor $\alpha_T \cdot n \leq \text{ext}(n; T) \leq \beta_T \cdot n$, ahol $\alpha_T, \beta_T > 0$. Azaz $\text{ext}(n; T)$ nagyságrendje lineáris.

A tételben szereplő alsó becslés már ismert, hiszen tiltott részgráfoknak legalább két éle van. Mielőtt a tétel nehezebb részét igazolnánk felidézünk két fogalmat és belátunk egy lemmát.

Jelölés. Legyen H egy gráf. Ekkor $\bar{d}(H)$ a H gráf átlagos foka, $\delta(H)$ a H gráf minimális foka.

13. Lemma. $G \in \mathcal{G}_n$ esetén létezik olyan R részgráf ($R \subseteq G$), amelyre $\delta(R) \geq \frac{\bar{d}(G)}{2}$ teljesül.

Megjegyzés. Nyilván a feszített részgráfok közt kell keresgelnünk.

Bizonyítás. Egy algoritmus leírásával kezdjük a bizonyítást.

14. Algoritmus. *Input:* G egyszerű gráf. *Output:* R feszített részgráf, amely minden foka legalább $\bar{d}/2$.

$A := G$

// A az aktuális gráf, kezdetben G .

Amíg találunk $x \in V(A)$ -t, úgy, hogy $d_A(x) < \frac{\bar{d}}{2}$

$A \leftarrow A - x$.

// Ha egy csúcs foka túl kicsi, akkor nem lehet az outputban.

A lemma ekvivalens azzal, hogy az algoritmus nem „üríti ki” G -t. Indirekten érvelünk. Tegyük fel, hogy a fenti algoritmus az összes csúcst eltörli. Ekkor az algoritmus ad egy kiürítési sorrendet $V(G)$ -re, jelöljük ezt π -vel: $\pi : v_1, \dots, v_n$, azaz v_i az i -ediknek elhagyott csúcs ($n = |V(G)|$).

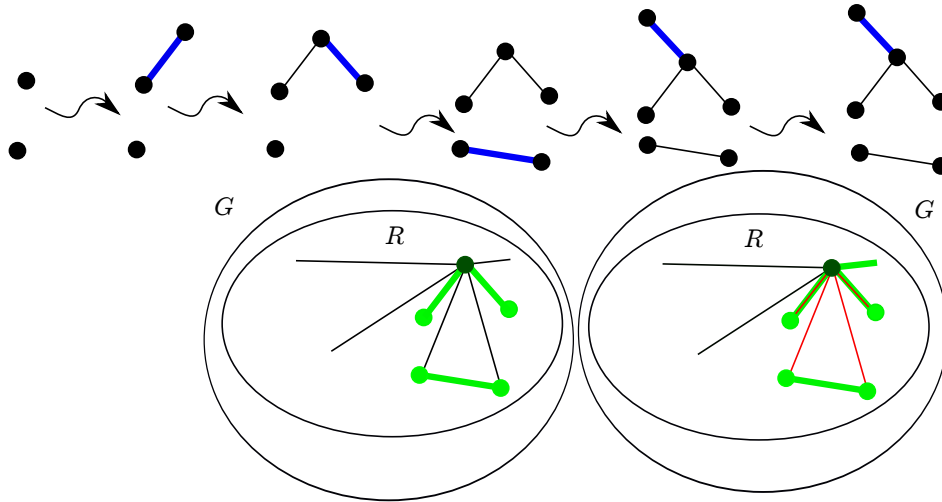
Tudjuk: v_1 -nek kevesebb mint $\frac{\bar{d}}{2}$ szomszédja volt a G gráfban. Utána a v_2 -nek a v_1 elhagyása után kevesebb mint $\frac{\bar{d}}{2}$ szomszédja volt. Bevezetünk ehhez egy jelölést: $d_\pi^{\text{hátra}}(v)$ a v csúcs nagyobb indexű szomszédainak száma. Általában igaz, hogy $d_\pi^{\text{hátra}}(v) < \frac{\bar{d}}{2}$, azaz a kiürítési sorrendre vonatkozólag minden csúcs „hátrafoka” kevesebb mint $\frac{\bar{d}}{2}$.

Észrevétel: $\sum d_\pi^{\text{hátra}}(v) = |E|$, azaz a hátrafokok összege pontosan kiadja az élszámot. Ez az összeg a kiürítési sorozat esetén határozottan kisebb, mint $n \frac{\bar{d}}{2}$. Viszont az élek száma pontosan $n \frac{\bar{d}}{2}$. Ez ellentmondás, ami a lemmát bizonyítja. ■

Ezek után már egyszerű a bizonyítás vége.

Bizonyítás. (A tételé.) Továbbra is azt akarjuk bebizonyítani, hogy az extrémális érték $< \beta_T n$. Pontosán megadjuk β_T -t: Legyen T egy tetszőleges erdő. Legyen $G \in \mathcal{G}_n$, amelyre $|E(G)| \geq |V(T)|n$ (azaz G -ben az átlag fok: $\frac{\sum d_i}{n} \geq \frac{2|V(T)|n}{n} = 2|V(T)|$). Ekkor G biztos tartalmaz T -vel izomorf részgráfot. A lemma alapján G -ben van olyan R részgráf, amelyre $\delta(R) \geq |V(T)|$. T példányát már R -ben megtaláljuk.

Valóban T -t építsük fel egy üres gráfból ághajtások alkalmazásával. Ez könnyen megtehető: annyi ponttal indulunk ahány komponense van T -nek, mondjuk c . T_0 legyen a c pontú üres gráf. Mindegyik komponens egy fa, ami egyetlen csúcsból ághajtásokkal felépíthető. A komponensek egyenkénti felépítésével egy $\{T_i\}_{i=0}^{|E(T)|}$ gráfsorozatot kapunk, amelyben T_i -nek i éle van, továbbá $T_{|E(T)|} = T$. Indukcióval igazoljuk, hogy mindegyik T_i megtalálható R -ben.



Ha T_i -t megtaláltuk, akkor mohó módon ezt a részgráfot terjesztjük ki egy T_{i+1} -gyel izomorf részgráffá. Legyen x az a csúcs, amiből induló ághajtás adja T_{i+1} -et. x minden olyan szomszédja, ami nem reprezentál eddigi csúcsot (és az ehhez vezető él) megteszi az indukciós lépést. Ilyen szomszéd viszont könnyen található, hiszen legalább $|V(T)|$ szomszéd van, míg T_i csúcsait kevesebb mint $|V(T)|$ csúcs reprezentálja. ■

A fáknál jóval bonyolultabb gráfokra is tudunk valamit.

Észrevétel. Ha T olyan, hogy $\chi(T) = k$ akkor $ext(n; T) \geq |E(T_{n,k-1})|$.

A fenti észrevételnél jóval mélyebb az alábbi tétel.

15. Tétel (Erdős—Stone, Erdős—Simonovits). Ha T olyan, hogy $\chi(T) = k$, akkor $ext(n; T) = |E(T_{n,k-1})| + o(n^2)$.

Ugyanez a tétel részletesebben:

16. Tétel (Erdős—Stone, Erdős—Simonovits). (i) Legyen T olyan, hogy $\chi(T) = k \geq 3$ (azaz $k-1$ — a T -hez tartozó Turán-gráf osztályszáma — legalább 2). Ekkor $ext(n; T) = |E(T_{n,k-1})| + o(n^2)$ (azaz a $o(n^2)$ tag egy maradéktag).

(ii) Legyen T olyan, hogy $\chi(T) = 2$. Ekkor $ext(n; T) = o(n^2)$ (a korábbi maradéktag főtaggá vált).

A fentiek alapján azonosítani tudjuk az érdekes eseteket: Ha T páros, kört tartalmaz, akkor a fentiek nem sokat mondanak. Minden más esetben $ext(n; T)$ nagyságrendje kiolvasható az ismert eredményekből.

Az érdekes esetben nagyon kevés pontos eredmény ismert. Ha a tiltott részgráf C_4, C_6, C_{10} vagy $K_{2,k}, K_{3,k}$, akkor $ext(n; T)$ nagyságrendje ismert. $C_8, C_{12}, C_{14}, \dots, K_{4,4}, K_{4,5}, \dots$, továbbá a kocka esete nem ismert.

Csak egy eredményt emelünk ki. Amihez előkészületek szükségesek.

Legyen \mathbb{F} egy véges test. (Gondolhatunk \mathbb{F}_p -re, ahol p egy prím. Azaz \mathbb{F}_p a $\{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ halmaz a modulo p aritmetikával.)

A valós projektív sík koordináta geometriája a valós számokon alapul. Ahogy az Euklideszi sík koordináta geometriája is a valós számok aritmetikáján alapulva egy geometriai struktúrát hoz létre. A konstrukciók véges testekre is végrehajthatók. Így kapjuk a $PG(2, \mathbb{F})$ projektív síkot (a 2-es a dimenzióra utal), amely koordináta

geometriája az \mathbb{F} testen alapul. (PG a projektív geometria két szavának kezdőbetűiből ered.) Ebben a geometriai struktúrában a pontok, egyenesek száma véges. A véges projektív geometriák alappéldáját az alábbiakban írjuk le.

Definíció. $\mathbb{F}^3 = \{(a, b, c) : a, b, c \in \mathbb{F}\}$. Ezen a halmazon definiálunk egy relációt: $(a, b, c) \sim (a', b', c')$ akkor és csak akkor, ha található olyan nem-nulla $\lambda \in \mathbb{F}$, hogy $(a, b, c) = \lambda(a', b', c')$. Ez egy ekvivalenciareláció. $(0, 0, 0)$ egy egyelemű ekvivalenciaosztályt alkot. Minden más ekvivalenciaosztály $|\mathbb{F}| - 1$ elemű. Ezen ekvivalenciaosztályok halmaza alkotja a geometriánk \mathcal{P} ponthalmazát. Azaz $\mathbb{F}^3 - \{(0, 0, 0)\} / \sim$, ennek elemeit $[a, b, c]$ -vel, vagy $(a : b : c)$ -vel szokás jelölni. Mi az első jelölést használjuk. Az egyenesek \mathcal{E} halmazát ugyanezen ekvivalenciaosztályokkal azonosítjuk. $[a, b, c]^*$ az (a, b, c) vektor ekvivalenciaosztályának neve, ha egyenest reprezentál. $[a, b, c]$ és $[a', b', c']^*$ akkor és csak akkor illeszkedik, ha $a \cdot a' + b \cdot b' + c \cdot c' = 0$.

Az így kapott geometriai struktúra minden illeszkedési tulajdonságot teljesít, amit a valós projektív síkon megszoktunk (például bármely két különböző egyenes pontosan egy pontban metszi egymást). Ezek ellenőrzése az \mathbb{F} feletti lineáris algebra ismerősei számára egyszerű gyakorlatok.

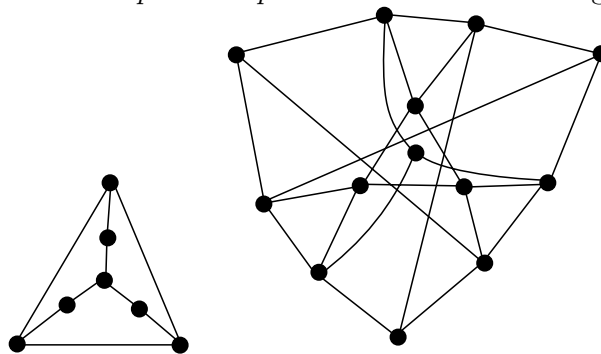
Megjegyzés. A fentiekben egy algebrai struktúrából konstruáltunk egy geometriait, amely szép geometriai tulajdonságokkal rendelkezik. A fordított logika is természetes. Elvárjuk a szép geometriai tulajdonságokat (axiómák) és keresünk ezt teljesítő modelleket. Esetünkben (az axiómák leírását itt nem részletezzük) ezek a véges projektív síkok. $PG(2, \mathbb{F})$ csak egy modell (igazából egy modell-sorozat) a sok lehetőség közül.

A fentiek alapján nyilvánvaló, hogy $PG(2, \mathbb{F})$ -ben $|\mathcal{P}| = |\mathcal{E}| = (|\mathbb{F}|^3 - 1)/(|\mathbb{F}| - 1) = |\mathbb{F}^2| + |\mathbb{F}| + 1$. Az is könnyen számolható, hogy minden egyenesre $|\mathbb{F}| + 1$ pont illeszkedik.

Konstrukció (Sok élt tartalmazó gráf C_4 nélkül). Legyen p egy prímszám. Definiálunk egy G_p egyszerű gráfot.

G_p csúcsait $PG(2, \mathbb{F}_p)$ pontjai alkotják. Két csúcs, $[a, b, c]$ és $[a', b', c']$ akkor és csak akkor szomszédos ha $a \cdot a' + b \cdot b' + c \cdot c' = 0$. (Azaz az egyik csúcs koordinátáit pontként, a másikat egyenesként olvasva illeszkedő párt kapunk.)

Példa. A következő ábrán a $p = 2$ és $p = 3$ esetből adódó két gráfot láthatjuk.



Észrevétel. (i) G_p -ben nincs négy hosszú kör. Valóban, ha ilyen lenne, akkor felvátva pontnak, egyenesnek értelmezve a négy hosszú kör csúcsait két olyan egyenest kapnánk, ami két különböző pontban metszenék egymást. Ez pedig nem lehetséges.

(ii) $|V(G_p)| = p^2 + p + 1 =: n$.

(iii) Az $v = [a, b, c]$ csúcs szomszédjai az $v^* = [a, b, c]^*$ egyenesre illeszkedő v -től különböző pontok. Azaz, ha a v pont nem illeszkedik v^* egyenesre, akkor $p + 1$ szomszédja van, különben p szomszédja van. Azon v pontok, amelyek illeszkednek a v^* egyenesre olyanok, hogy koordinátáik teljesítik az $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ egyenletet (modulo p aritmetikában dolgozunk!). Ez az egyenlet geometriailag egy kúpszeletet ír le. Ismert, hogy pontainak száma $p + 1$. Azaz $p + 1$ darab csúcs foka p és így p^2 csúcs foka $p + 1$.

(iv) $2|E(G_p)| = p^2(p + 1) + (p + 1)p = p^3 + 2p^2 + p$, azaz $|E(G_p)| = (p^3 + 2p^2 + p)/2$.

Az észrevételből az élek pontszámától való függésének nagyságrendjét emeljük ki: $|E| \sim \frac{1}{2}n^{3/2}$. Ez az extrémális élszám helyes nagyságrendje.

17. Tétel.

$$ext(n, C_4) \sim \frac{1}{2}n^{\frac{3}{2}}.$$

5. Ramsey-paraméter, homogén halmazok

Definíció. Legyen $Ramsey(G) = \max\{\alpha(G), \omega(G)\}$, a G gráf Ramsey-paramétere.

A Ramsey-paraméter egy ekvivalens leírása: egy ponthalmazt homogénnek nevezünk, ha független vagy klikk. A Ramsey-paraméter értéke a legnagyobb homogén halmaz mérete.

Egy további nyelvezet: A gráf éleit színezzük zöldre, a nem szomszédos csúcsokat is kössük össze egy piros éllel. Így a V csúcshalmazon definiált teljes gráf éleinek egy kétszínezésével azonosítottuk G -t. Egy homogén csúcshalmaz egy olyan halmaz, amelyen belül minden él egyforma színű, idegen szóval monokromatikus.

Az alábbi egyszerű algoritmus egy nagy homogén halmazt határoz meg G -ben.

18. Algoritmus (Ramsey-algoritmus). Input: egy G egyszerű gráf, output: egy H homogén halmaz

$KF = \emptyset, T = V(G)$

// KF kiválasztott pontok egy halmaza

// T a túlélő csúcsok halmaza

Amíg $M \neq \emptyset$ Kiválasztási lépés:

Legyen $x \in T$ tetszőleges eddig túlélő csúcs.

$KF \leftarrow KF \cup \{x\}$.

$N = N_T(x) = \{s \in T : xs \in E\}$

$\bar{N} = \bar{N}_T(x) = \{s \in T : xs \notin E\} = T - \{x\} - N_T(x)$

// $T - \{x\} = N \cup \bar{N}$

$T \leftarrow N$ és \bar{N} közül a nagyobb

// $|N| = |\bar{N}|$ esetén bármelyik betöltheti M szerepét

// $T = N \neq \emptyset$ esetén azt mondjuk x_i egy K -elem

// $T = \bar{N} \neq \emptyset$ esetén azt mondjuk x_i egy F -elem

// $T = N = \bar{N} = \emptyset$ esetén x_i F -elem és K -elem is egyben

// Azaz egy F -elem esetén szükségszerűen minden később

// kiválasztott elem nem-szomszédja.

// Azaz egy K -elem esetén szükségszerűen minden később

```

// kiválasztott elem szomszédja.
Amíg ciklus vége.
F = {x ∈ KF : x egy F-elem}
K = {x ∈ KF : x egy K-elem}
// F ∩ K = {z}, ahol z az utolsónak kiválasztott elem.
// F független csúcshalmaz, K klikk.
A H output K és F közül a nagyobb.
// H homogén csúcshalmaz.

```

Ha az algoritmus az F halmazt számolja ki, akkor az egy független halmaz: két kiválasztott F -elem között nem mehet él, hiszen a később kiválasztott elem az előbb kiválasztott elem szomszédaiak eldobását (F -elem esetén ez történt) túlélte. Hasonlóan, ha K az output, akkor az egy klikk. Azaz az algoritmus egy homogén halmazt számol ki.

A következő lemma a kiszámolt halmaz méretét becsüli.

19. Lemma. *Legyen G egy tetszőleges n pontú gráf. Legyen k a Ramsey-algoritmus által kiválasztott csúcsok száma. Legyen s az output homogén halmaz mérete. Ekkor*

$$k \geq \log_2 n, \quad \ell \geq \frac{1}{2} \log_2 n.$$

Bizonyítás. Nyilván $\ell \geq \frac{k+1}{2}$. Így elég az első egyenlőtlenséget igazolni.

Legyen T_i az i -edik csúcs kiválasztása előtt a T halmaz, míg legyen T_{i+1} a kiválasztás után update-elt T halmaz. Könnyen látható, ha $|T_i| \geq 2^s$, akkor $|T_{i+1}| \geq 2^{s-1}$. Ebből az állítás kiolvasható. ■

20. Következmény. *Az előző lemma jelöléseit használva, ha $n = 4^e$, akkor $k \geq 2e$ és $\ell \geq e$.*

21. Következmény. *Egy 4^k pontú gráfban mindig van k elemű homogén halmaz.*

Definíció. Legyen $R(k)$ az a minimális csúcsszám, hogy minden ilyen csúcsú gráfban legyen k elemű homogén halmaz.

A fenti állítások alapján $R(k)$ jól definiált és $R(k) \leq 4^k$. A felsőbecslés egy exponenciális függvény, amely alapja 4, ezt mind a mai napig nem sikerült megjavítani. Megemlítjük a legjobb alsó becslést is (ami szintén exponenciális), a valószínűség-számítási módszer egyik első alkalmazása Erdős Pál által.

22. Tétel.

$$\sqrt{2}^k < R(k) < 4^k.$$

Az $R(k)$ számokat Ramsey-számoknak nevezzük. Az érdekes értékek $k \geq 3$ esetén vevődnek fel ($k = 1, 2$ esetén minden egy-, illetve kételemű halmaz homogén, azaz nyilván $R(1) = 1$ és $R(2) = 2$). Csupán néhány Ramsey-szám ismert: $R(3) = 6$, $R(4) = 18$. $R(5)$ -ről annyi ismert, hogy $43 \leq R(5) \leq 49$. A $k = 10$ esetén ismereteink hiánya még látványosabb. Jelen pillanatban csak azt tudjuk, hogy $798 \leq R(10) \leq 23\,556$.

Erdős Pál személyes véleménye, hogy $R(5)$ kiszámolása esetleg mai ismereteink alapján talán megoldható. $R(6)$ meghatározásához azonban valami új ötlet, elmélet

szükséges. Ezt a következő „mesével” találja. Ha az űrből egy idegen szupercivilizáció érkezne a Földre és azt mondaná, hogy az emberiséget akkor kíméli meg, ha meghatározza $R(5)$ értékét, akkor a politikusoknak és gazdasági szakembereknek a matematikusokat és számítástudományjal foglalkozókat kellene támogatunk, hogy az összes szuperszámítógép erejét és tudásukat összerakva megoldják a problémát. Amennyiben a lények $R(6)$ meghatározásához kötik az erőszak elkerülését, akkor ugyanezt a támogatást a katonáknak és a fegyverkezéssel foglalkozóknak kellene nyújtaniuk.

6. A Ramsey-számok kiterjesztései

A színezéses nyelvet használva: Legyen $f : E(K_n) \rightarrow \{\text{piros, kék}\}$ az n pontú teljes gráf éleinek tetszőleges 2-színezése. Egy $S \subseteq V(K_n)$ halmazt monokromatikus piros halmaznak nevezünk, ha tetszőleges $x \neq y \in S$ esetén $f(xy) = \text{piros}$. Hasonlóan értelmezhető a monokromatikus kék halmaz fogalma. Egy halmaz monokromatikus, ha monokromatikus kék vagy monokromatikus piros halmaz.

23. Tétel (Ramsey-tétel, 1930). *Ramsey-tétele azt mondja ki, ha k -hoz képest n elég nagy, akkor K_n éleit bárhogyan színezzük piros-kékkel, lesz monokromatikus k elemű csúcshalmaz.*

Az a határ, ahonnan kezdve „ n elég nagy” az $R(k)$ Ramsey szám.

A fenti állítást 2-színezésre mondtuk ki, de kimondható és egyszerűen bizonyítható c -színezésre is. Ennek megfelelően új Ramsey-számokat vezethetünk be: $R_c(k)$, ha c elemű a palettával dolgozunk.

Az alap Ramsey-tétel egy teljes gráf éleit, a csúcsok kételemű részhalmozait színezte. Ez kitejeszthető r -elemű részek színezésére. Persze ekkor egy monokromatikus halmaztól azt követeljük meg, hogy minden k -elemű része azonos színű legyen. A megfelelő tétel most is igaz (azaz elég nagy halmaz esetén szükségszerű a k elemű homogén halmaz jelenléte). Ennek megfelelően bevezethetők a $R^{(r)}(k)$ Ramsey-számok.

A két továbblépés összegezhető. Vizsgálhatjuk az r -elemű részhalmozok c -színezését. Elég nagy alaphalmaz esetén ekkor is garantált a k -elemű monokromatikus halmaz megléte. A megfelelő Ramsey-számok jelölése $R_c^{(r)}(k)$.

A részletek kidolgozását az érdeklődő hallgató elvégezheti.

7. Erdős—Turán-algoritmus

Erdős Pál és Turán Pál egy kissé módosította Ramsey algoritmusát. Ezzel javították a Ramsey-számok fenti becslését. Algoritmusuk képes bármilyen R csúcshalmaz esetén párhuzamosan kiszámolni egy $F(R)$ független ponthalmazt és egy $K(R)$ klikket. G -n futva az algoritmus $F(V(G))$ független halmazt és $K(V(G))$ klikket számol ki. Szemben a korábbi algoritmusokkal ez nem „dobálja el” a csúcsokat.

24. Algoritmus (Erdős—Turán-algoritmus). *Input: egy G egyszerű gráf, output: egy $F(V)$ független halmaz és egy $K(V)$ klikk.*

Ha $|V| \leq 2$, akkor a két halmazunk legyen V és egy egyelemű része. Különben x egy tetszőleges csúcs.

$$N = \{y \in V(G) - \{x\} : xy \in E\}$$

$$\bar{N} = \{y \in V(G) - \{x\} : xy \notin E\}$$

$$// N \cup \bar{N} = V(G) - \{x\}$$

Hívjuk meg rekurzíven az algoritmust $G|_N$ és $G|\bar{N}$ gráfokra

// $F(N)$, illetve $K(N)$ a $G|_N$ -ben talált független halmaz és klikk

// $F(\bar{N})$, illetve $K(\bar{N})$ a $G|\bar{N}$ -ben talált független halmaz és klikk

$F(V(G))$ legyen $F(N)$ és $\{x\} \cup F(\bar{N})$ közül a nagyobb.

$K(V(G))$ legyen $\{x\} \cup K(N)$ és $K(\bar{N})$ közül a nagyobb.

Az algoritmus analízisét a következő tétel adja.

25. Tétel. Ha $|V| \geq \binom{k+\ell-2}{k-1} = \binom{k+\ell-2}{\ell-1}$, akkor az algoritmus egy legalább k elemű független halmazt vagy egy legalább ℓ elemű klikket talál.

Bizonyítás. Ha k vagy ℓ értéke legfeljebb 2, akkor az állítás nyilvánvaló. $k + \ell$ -re vonatkozó indukciót alkalmazunk. Feltesszük, hogy $k, \ell \geq 3$. Tudjuk, hogy $|V| \geq \binom{k+\ell-2}{k-1}$ és $|N| + |\bar{N}| = |V| - 1$. Ekkor

$$|N| + |\bar{N}| = |V| - 1 \geq \binom{k+\ell-2}{k-1} - 1 > \left[\binom{(k-1)+\ell-2}{(k-1)-1} - 1 \right] + \left[\binom{k+(\ell-1)-2}{k-1} - 1 \right].$$

Így

$$|\bar{N}| > \binom{(k-1)+\ell-2}{(k-1)-1} - 1 \quad \text{vagy} \quad |N| > \binom{k+(\ell-1)-2}{k-1} - 1.$$

Ha $|\bar{N}| \geq \binom{(k-1)+\ell-2}{(k-1)-1}$, akkor a rekurzív hívás után (az indukciós feltevés alapján) $F(\bar{N})$ legalább $k-1$ elemű vagy $K(\bar{N})$ legalább ℓ elemű. Így $F(V(G))$ legalább k elemű, hiszen $F(\bar{N}) \cup \{x\}$ is szerepel az összevetésben, amellyel meghatároztuk. Hasonlóan $K(V(G))$ legalább ℓ elemű.

Az $|N| \geq \binom{k+(\ell-1)-2}{k-1}$ eset hasonlóan tárgyalható. Ez befejezi az állításunk indoklását. ■

A fenti bizonyítástechnika után természetes a következő aszimmetrikus Ramsey-számok bevezetése.

Definíció. Legyen $R(k, \ell)$ az a minimális $|V|$ érték, amely esetén biztosak lehetünk abban, hogy tetszőleges egyszerű gráf V -n tartalmaz k elemű független halmazt vagy ℓ elemű klikket.

A bizonyítás lényegét a következő lemma foglalja össze.

26. Lemma.

$$R(k, \ell) \leq R(k-1, \ell) + R(k, \ell-1).$$

Ahogy az Erdős—Turán bizonyításban tettük más Ramsey-számoknál is megbonthatjuk a színek szimmetriáját és ennek megfelelően általánosított aszimmetrikus Ramsey-számokat vezethetünk be: $R_c(k_1, k_2, \dots, k_c)$, $R^{(r)}(k, \ell)$, $R_c^{(r)}(k_1, k_2, \dots, k_c)$.

8. Ramsey-elmélet

A gráfelméleti Ramsey-tétel a következő filozófiát támasztja alá: nincs teljes rendezetlenség. Bárhogy húzunk is be éleket n csúc közé mindig lesz $\mathcal{O}(\log n)$ nagyságú független halmaz vagy klikk, azaz egy rendkívül rendezett rész. Ez akkor is igaz, ha célunk a teljes káosz kialakítása. Bizonyos lokális rend elkerülhetetlen.

A fenti filozófia a matematika több tételében megjelenik. A megfelelő tételek Ramsey-típusú tételek. A sok összefüggés miatt egy elmélet alakult ki a filozófia köré. Ebbe a matematika legkülönbözőbb ágai adnak részeredményeket.

9. Geometriai Ramsey-tételek

Legyen adva egy n elemű \mathcal{P} ponthalmaz a síkon úgy, hogy pontjaink közül semelyik három sem esik egy egyenesre (\mathcal{P} pontjai általános helyzetűek). \mathcal{P} elemei közül szeretnénk kiválasztani k -t úgy, hogy ezek egy konvex sokszög csúcsait alkossák. A következő tétel azt mondja ki, hogy ha $|\mathcal{P}|$ elég nagy, akkor ez garantáltan lehetséges.

27. Tétel (Erdős Pál és Szekeres György tétele). *Ha $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2(5, k)$ darab általános helyzetű pont halmaza, akkor közülük ki lehet választani k pontot úgy, hogy ezek egy konvex sokszög csúcsait alkossák.*

Bizonyítás. A bizonyítás a következő egyszerű geometriai lemmán múlik. A lemmát nem bizonyítjuk. Az érdeklődő hallgató középiskolai ismeretei alapján könnyen beláthatja.

28. Lemma. *(i) Ha adott a síkon öt általános helyzetű pont, akkor kiválasztható közülük négy úgy, hogy ezek konvex négyszöget határozzanak meg.*

(ii) Ha adott a síkon k általános helyzetű pont úgy, hogy közülük tetszőleges négy konvex négyszöget határoz meg, akkor a k pont konvex helyzetben van.

Ezek után a \mathcal{P} ponthalmaz négyeseit színezzük ki két színnel úgy, hogy egy négyes akkor és csak akkor kapjon piros színt, ha a benne szereplő pontnégyes nem egy konvex négyszög csúcshalmaza.

A lemma éppen azt mondja ki, hogy a ponthalmaznak ekkor nincs piros homogén ötelemű részhalmaza. $|\mathcal{P}|$ választása miatt ekkor van \mathcal{P} -ben egy k elemű kék rész. Erről Lemma (ii) azt állítja, hogy egy konvex k -szög csúcshalmaza. ■

Megjegyzés. A tétel Klein Eszter egy kérdését válaszolta meg. A bizonyításban szereplő elemi geometriai megállapítást Klein Eszter vette észre, aki ezek után feltette a kérdést: Igaz-e, hogy elég nagy ponthalmaz esetén garantáltan találhatunk egy konvex k -szöget alkotó csúcshalmazt a ponthalmazunkban? A problémát „Happy end” problémának nevezte el Erdős Pál, mert talán a kérdésfelvetés is szerepet játszott abban, hogy később Szekeres György és Klein Eszter házasságot kötött.

A tétel után definiálható a $ESz(n)$ függvény: $ESz(n)$ az a minimális szám, amilyen számosságú általános helyzetű ponthalmaz esetén garantáljuk egy konvex n -szög csúcsainak halmazát a ponthalmazunkban. A következő becslés Erdős Páltól és Szekeres Györgytől származik:

$$2^{k-2} + 1 \leq ESz(k) \leq \binom{2k-2}{k-1}.$$

Sejtés. (Szekeres György) Igaz-e, hogy tetszőleges k esetén $ESz(k) = 2^{k-2} + 1$?

A fenti sejtést/egyenlőséget csak $k \leq 5$ esetén igazolták.

10. Aritmetikai Ramsey tételek

A következőkben olyan problémákkal foglalkozunk, ahol adott egy számhalmaz, melynek elemeit kiszíneztük. Majd veszünk egy egyenletet/egyenletrendszert, és azt vizsgáljuk, hogy megoldható-e úgy, hogy a megoldás monokromatikus halmaz legyen.

Az első ilyen tételünk az alábbiakban egy lemma lesz. Ehhez a Fermat-sejtés vizsgálata vezetett el. Eszerint az $x^n + y^n = z^n$ Diophantikus egyenletnek nincs nem triviális megoldása 2-nél nagyobb egész n esetén. (Ezt a sejtést Wiles 1994-ben bizonyította.)

Megállapodás. Következőkben az alatt, hogy egy állítás elég nagy s számra teljesül, azt értjük, hogy

Van olyan s_0 küszöbszám, hogy minden $s \geq s_0$ esetén az állítás igaz.

A nyelvezetet értelemszerűen használjuk prímekre, illetve használhatnánk négyzet-számokra, vagy \mathbb{N} egy tetszőleges végtelen részhalmazából vett értékekre.

29. Tétel (Schur-tétel). *Legyen adott $n \in \mathbb{N}^+$. Elég nagy p prímre az*

$$x^n + y^n \equiv_p z^n$$

egyenletnek létezik nem triviális megoldása, ahol $x \equiv_p y$ jelentése: $x \equiv y \pmod{p}$, továbbá egy x, y, z megoldás akkor nem-triviális, ha $x, y, z \not\equiv_p 0$.

Természetesen a p -re vonatkozó küszöbszám függ n -től. Mielőtt még a tételt bizonyítanánk, szükségünk van a következő számunkra központi lemmára.

30. Lemma (Schur-lemma, 1916). *Legyen ν elég nagy, és $c \in \mathbb{N}^+$ tetszőleges palettaméret. Vegyünk egy tetszőleges $\varphi : \{1, 2, \dots, \nu\} = [\nu] \rightarrow \{1, 2, \dots, c\}$ színezést. Ekkor az*

$$x + y = z, \text{ ahol } x, y, z \in [\nu],$$

egyenletnek van monokromatikus megoldása.

Bizonyítás. (Lemma bizonyítása) Definiáljuk az $\{0, 1, 2, \dots, \nu\}$ halmazon értelmezett teljes gráf éleinek egy színezését. Az ij él színe legyen $\varphi(|i - j|)$. Ekkor Ramsey-tételéből adódóan, ha ν elég nagy, lesz monokromatikus hármas (azaz egy háromszög, melynek minden éle ugyanolyan színű). Igazából $\nu = R_c(3)$ egy jó határ. Legyen h, i, j egy monokromatikus háromszög csúcsai. Feltehető, hogy $h < i < j$. Tudjuk, hogy

$$\varphi(i - h) = \varphi(j - i) = \varphi(j - h).$$

Ekkor az $x = i - h, y = j - i, z = j - h$ egy megfelelő megoldása az egyenletünknek. ■

A teljesség kedvéért lássuk a tétel bizonyítását is.

Bizonyítás. (Tétel bizonyítása) Legyen p elég nagy prím, és tekintsük a p elemű test multiplikatív csoportjának (\mathbb{F}_p^* -nek) a következő

$$H = \{x^n \mid x \in \mathbb{F}_p^*\} = \{g^n, g^{2n}, \dots\}$$

részcsoportját, azaz az n -edik hatványok által alkotott részcsoportját (g a \mathbb{F}_p^* ciklikus csoport egy generátora). Látható, hogy ennek a részcsoportnak az elemszáma, $|H| \geq \frac{p-1}{n}$. Ekkor \mathbb{F}_p^* felbomlik H szerinti mellékosztályokra.

$$\mathbb{F}_p^* = m_1 H \dot{\cup} m_2 H \dot{\cup} \dots \dot{\cup} m_\ell H$$

A mellékosztályok ℓ száma $\ell = \frac{|\mathbb{F}_p^*|}{|H|} = \frac{p-1}{|H|} \leq n$.

Tekintsük $\mathbb{F}_p^* \equiv [p-1] = \{1, 2, \dots, p-1\}$ -nek, azt az n színezését, ahol $m_i H$ elemei az i -edik színt kapják. Ekkor a Schur-lemmát alkalmazva $\nu = p-1$, és $c = n$ paraméterekkel adódik, hogy alkalmas színre/mellékosztályra ($m_i H$) és ilyen színben/ezen mellékosztályban alkalmas x, y és z elemre ($x, y, z \in m_i H$) teljesül, hogy $x + y = z$. Azaz $x = m_i x_0^n$, $y = m_i y_0^n$, $z = m_i z_0^n$ és

$$m_i x_0^n + m_i y_0^n \equiv_p m_i z_0^n.$$

m_i -vel leosztva ($m_i \neq 0$), adódik hogy

$$x_0^n + y_0^n \equiv_p z_0^n,$$

ahol $x_0^n, y_0^n, z_0^n \in H$, speciálisan $x_0^n, y_0^n, z_0^n \not\equiv_p 0$.

Ezzel a keresett nem triviális megoldásokat megtaláltuk. ■

Ahogy Ramsey-tétele elvezet a Ramsey-számok definíciójához a Schur-lemmán is alapul egy fontos definíció.

Definíció. Legyen $c \in \mathbb{N}^+$ tetszőleges, ekkor az $Sch(c)$ legyen az a minimális ν szám, amire $[\nu]$ tetszőleges c színezésében lesz monokromatikus $\{x, y, z\}$, amelyre $x + y = z$, azaz a fenti lemmában az „elég nagy ν ” pontos határa. $Sch(c)$ a c paraméterű Schur-szám.

A Schur-lemma — ami továbbiakban számunkra az igazi Schur-tétel lesz — további kutatásokat indított el. Az elért eredmények közül kiemelkedik az alábbi.

31. Tétel (van der Waerden tétele, 1927). *Elég nagy n -re, $[n]$ -nek tetszőleges c színezésére lesz monokromatikus k hosszú, nem konstans számtani sorozat.*

Ismét fontos megemlítenünk a tétellel kapcsolatos számsorozatot, ami leírja a tételben szereplő „elég nagy” fogalmat.

Definíció. Azt a legkisebb n számot, amelyre a fenti tétel igaz $W_c(k)$ -val jelöljük.

A tétel bizonyítását a következő részben vázoljuk.

11. Ramsey-féle tételek pozícióhalmazokra

A pozíciós játékoknak sokféle változata van, általában kétszemélyes játék, ahol a két játékos felváltva foglal el még szabad pozíciókat egy tábláról, azzal a céllal, hogy elérjen valamilyen (nyerő) alakzatot.

Az egyik legismertebb változat az amőba. Itt a tábla (a pozíciók halmaza egy végtelen sík négyzetrács. A nyerőalakzatok sorban, oszlopban vagy valamelyik átlós irányban szomszédos öt mező. Egy másik játék a Tic-Tac-Toe, ahol a tábla egy 3×3 -as táblázat, a nyerő alakzatok a sorok, oszlopok és a két átló pozícióhármasai.

A továbbiakban a Tic-Tac-Toe egy általánosítását vizsgáljuk. Táblánk a következő lesz.

Definíció. $U_k^d = \{\text{pozíciók halmaza}\} = \{1, 2, \dots, k\}^d$.

Azaz két paraméterünk is van: k a tábla „szélessége”, d a tábla dimenziója. Tehát egy pozíciót egy d dimenziós vektorral tudunk leírni, melynek koordinátái 1-től, k -ig terjedő számok lehetnek.

Ez a megállapodás természetes. Például az eredeti Tic-tac-Toe játék pozíciói azonosíthatók a

$$(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)$$

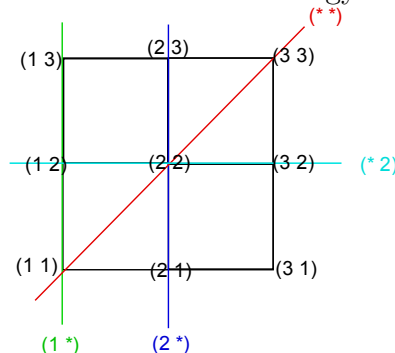
elemekkel. A sakktábla pozícióinál a szokás az $a_1, a_2, \dots, h_7, h_8$ elemekkel való azonosítás, habár használhatnánk itt is az 11, 12, 13, \dots , 86, 87, 88 számjegypárokat.

Most lássuk az általános játékunk nyerő pozícióit.

Definíció. Legyen $e \in \{*, 1, \dots, k\}^d \setminus \{1, 2, \dots, k\}^d$, melyhez hozzárendelünk egy $\mathcal{L}_e = \{P_1, P_2, \dots, P_k\}$ egyenest, ahol $P_i = P_i(e)$ azt a pozíciót jelöli, amelyet úgy kapunk, hogy e -ben a csillagokat i -vel helyettesítjük.

Azaz egyenesen pozíciók olyan halmazát értjük, melyhez van indexeknek olyan nemüres S halmaza, hogy az S -en kívüli koordinátái fixek, belül pedig minden koordinátája ugyanazt az értéket veszi fel. U_k^d minden egyenese k darab pozíciót tartalmaz.

Példa. A következő ábrán $k = 3$, és $d = 2$ esetre láthatunk példát. Az $(1 *)$ egyenesen (zöld színű), olyan pontok vannak melyek első koordinátája 1, és $S = \{2\}$, ugyanis a második koordináta mindig annyi ahányadik pontot vesszük, vagyis az $(1 *)$ egyenesen az $(1 1)$, $(1 2)$ és $(1 3)$ pontok helyezkednek el. A $(* *)$ egyenesen (piros színű) az $(1 1)$, $(2 2)$ és $(3 3)$ pontok vannak. Nyilván a másik átló nem lesz már egyenes. Ebben az esetben összesen 7 darab egyenes van.



Megjegyzés. Az U_k^d táblán $(k+1)^d - k^d$ darab egyenes van.

Mielőtt kimondanánk fő tételünket általánosítsuk az egyenes fogalmát.

Definíció. Az U_k^d táblán egy e -dimenziós alteret egy $a \in \{*_1, *_2, \dots, *_e, 1, 2, \dots, k\}^d$ vektorral írhatunk le, amelyben minden indexelt csillag legalább egyszer szerepel. Az ezzel leírt \mathcal{A}_a altér elemeit úgy kapjuk, hogy a $*_i$ -ket ugyanazzal az $\{1, 2, \dots, k\}$ -beli elemmel helyettesítjük (különböző i -kre egymástól függetlenül). Azaz egy e -dimenziós altér k^e darab pozíciót foglal el. Az $e = 1$ esetén az 1-dimenziós altér egy egyenes.

Lássuk a fejezet fő eredményét.

32. Tétel (Hales—Jewett-tétel, 1963). Minden k -ra (minden táblaszélességre), minden c -re (minden paletta méretre) elég nagy d esetén az U_k^d tábla pozícióit tetszőlegesen c -színezve lesz monokromatikus egyenes.

Ezt úgy is értelmezhetjük, hogy a fenti táblán elég nagy dimenzió esetén, ha c játékos osztozik a pozíciókon, akkor nem lehet döntetlen, azaz valamelyik játékos elér/színoztály tartalmaz egyenest/nyerő pozícióhalmast.

Megjegyzés. Hales—Jewett-tételből következik a van der Waerden-tétel:

k legyen a van der Waerden tételben keresett számtani sorozat hossza. A Hales—Jewett-tételben ehhez (mint táblaszélességhez) tartozik egy d dimenzió. Legyen $n = k^d$. Tekintsük a $\{0, 1, \dots, n-1\}$ halmast és elemeit írjuk k -as számrendszerbe. Ha átíráskor a számjegysorozatokat 0-kal előlről kiegészítjük d hosszúvá, akkor ezzel egy

$$\{0, 1, \dots, n-1\} \longleftrightarrow \{0, 1, \dots, k-1\}^d$$

bijekciót írtunk le. Azaz a van der Waerden tételében szereplő számainkat azonosítjuk egy tábla pozícióival. A van der Waerden tételének színezése megfelel táblánk egy Hales—Jewett-féle színezésének, amiben a Hales—Jewett-tétel garantál egy monokromatikus egyenest. Ennek pozícióit visszakódolva számokká kapunk egy monokromatikus k hosszú számtani sorozatot, ahogy Van der Waerden tétel állítja.

Definíció. Azt a minimális dimenziót, amelyre a fenti tétel igaz $HJ_c(k)$ -val jelöljük. Ezek a k, c paraméterű Hales–Jewett-számok.

Bizonyítás. (Bizonyítás vázlat) A bizonyítás k -ra, azaz a táblaszélességre vonatkozó teljes indukcióval történik.

$k = 2$ esetben vegyük észre, hogy a $00 \dots 000, 00 \dots 001, 00 \dots 011, \dots, 01 \dots 111, 11 \dots 111$ azaz monoton sorozattal leírt pozíciók ($d+1$ elemű) halmaza olyan, hogy bármely kettő egy egyenest alkot. Ha $d \geq c$, akkor a skatulya-elv garantál két egyszínű elemet, azaz monokromatikus egyenest.

Az indukciós lépés: Tegyük fel, hogy k -ra teljesül a tétel (HJ-Állítás(k)) és $k+1$ -re kell belátni (HJ-Állítás($k+1$)). Ez a nehéz rész. Két részre bontjuk. Bevezetünk egy köztes állítást, jelölése: Állítás($k + \frac{1}{2}$). A bizonyítás menete $HJ\text{-Állítás}(k) \Rightarrow \text{Állítás}(k + \frac{1}{2}) \Rightarrow HJ\text{-Állítás}(k)$ lesz.

A közbülső állítás megfogalmazásához (bizonyításunk érdemi részéhez) előkészületek kellenek.

Táblánk U_{k+1}^d lesz. Azaz megtesszük a „szélesítés” lépését. Egy e paraméterünk lesz, ami egy altér dimenziója. Azaz ismét nehezítünk, egyenes helyett egy előírt

dimenziójú alteret keresünk. A színezettségénél viszont könnyítünk. Monokromatikus helyett beérjük az alábbi szépen színezettséggel.

Alterünket elemeit azonosítjuk U_{k+1}^e pozícióival. Ebből kiválasztjuk az alábbi részhalmazt

$$U_{k+1}^e \supseteq \{(a_1, a_2, \dots, a_e) : \text{ha } a_i = k + 1, \text{ akkor } \forall j > i \text{-re } a_j = k + 1\} \stackrel{jel}{=} S_{k+1}^e.$$

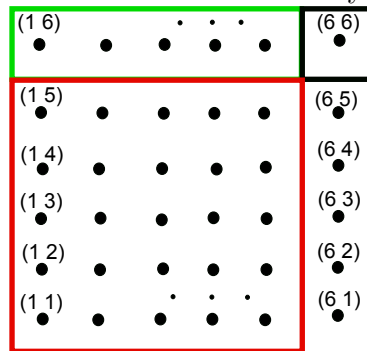
Azaz S_{k+1}^e -t megkaphatjuk a következő módon

$$S_{k+1}^e = \bigcup_{i=0}^e S_{k+1}^e(i),$$

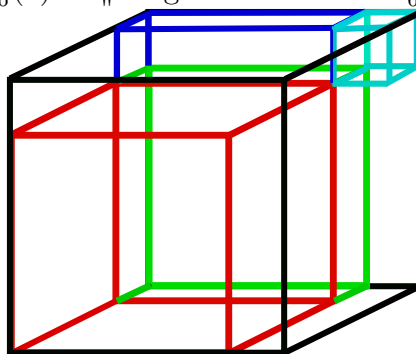
ahol $S_{k+1}^e(i)$ -ben azok a szám e -sek vannak, amelyben az első $e - i$ darab legfeljebb k , majd i darab $k + 1$ -es következik.

Felhívjuk a figyelmet, hogy a fenti definíció megköveteli, hogy az e -féle csillagunk egy sorrendje rögzített legyen.

Példa. $k = 6$ és $e = 2$. Az $S_6^2(2)$ -nek a fekete négyzet felel meg, mivel ekkor már a_1 -től 6-os számjegyeknek kell állnia mindenhol. A zöld téglalap az $S_6^2(1)$ -et, a piros négyzet az $S_6^2(0)$ -át jelöli. A nem bekeretezett rész nem felel meg a feltételnek, mert az első helyen 6-os áll, viszont az utána következő helyen már 6-nál kisebb szám áll.



Példa. Az alábbi ábrán $e = 3$ eset látható. A „piros kocka” = $S_k^3(0)$, „zöld téglalest” = $S_6^2(1)$, „kék téglalest” = $S_6^2(2)$ és „világoskék kocka” = $S_6^2(3)$.



Egy altér szépen színezett, ha mindegyik $S_{k+1}^e(i)$ halmaz monokromatikus.

Megjegyezzük, hogy az $S_{k+1}^e(i)$ halmazok ($i = 0, 1, 2, \dots, e$) nem fedik le a táblát. A le nem fedett részre semmilyen színezési feltételünk nincs. A különböző i -k által kijelölt részek függetlenek. Mindegyikükön monokromatikusnak kell a színezésnek lennie, de a különböző részek lehetnek különböző színűek (ahogy azonos színűek is).

Ezekután kimondhatjuk a közbülső állításunkat:

33. Állítás (Állítás($k + \frac{1}{2}$)). *Tetszőleges e és c esetén, elég nagy d dimenzióban U_{k+1}^d pozícióinak tetszőleges c színezésére garantáltan található olyan e -dimenziós altér, ami szépen színezett.*

Állítás($k + \frac{1}{2}$) \Rightarrow HJ-Állítás($k + 1$): Válasszuk e -t HJ-Állítás(k) állítás palettaméretének és a közbülső állítás elég nagy dimenziójában dolgozzunk. A közbülső állítás $e + 1$ halmaz monokromatikusságát írja elő. A skatulya-elv alapján lesz kettő, ami azonos színű. A Hales—Jewett-állítás igazolása onnan adódik, hogy az $S_{k+1}^e(i)$ halmazok közül bármely kettő uniója tartalmaz egyenest. (A példák tanulmányozása után egyszerűen ellenőrizhető.)

HJ-Állítás(k) \Rightarrow Állítás($k + \frac{1}{2}$): e -re vonatkozó indukcióval igazoljuk az Állítás($k + \frac{1}{2}$)-t.

$e = 1$ könnyen adódik: U_{k+1}^d pozíciói tartalmazzák a keskenyebb U_k^d táblát, amiben feltevésünk garantál monokromatikus egyenest. Ez a nagyobb táblában egy egyenes része lesz (a $*$ most már a $k + 1$ értéket is felveheti). Azaz a nagyobb táblán a megfelelő egyenes a keskeny, de monokromatikus egyenes egy pozícióval való bővítése. A monokromatikusság elveszhet, de mindenképpen szépen színezett egyenest/1-dimenziós alteret kapunk.

e -ről $e + 1$ -re való ugrás: Az elég nagy d dimenziót $d' + d''$ alakban keressük, ahol mindkét tag megfelelően nagy lesz. Vegyünk egy tetszőleges színezést. Meg kell találnunk a szépen színezett $e + 1$ -dimenziós alteret. Minden pozíciónak lesz egy első d' koordinátája, ez a pozíció eleje és lesz utolsó d'' koordinátája, a pozíció vége. (A táblánk két kisebb dimenziós tábla szorzata.) A pozíció elejét rögzítsük. A rögzítésre a lehetőségeket $U_{k+1}^{d'}$ pozícióival azonosíthatjuk. Egy rögzítéshez a lehetséges végek $U_{k+1}^{d''}$ pozícióival azonosíthatók. Ebben mindegyik vég (a rögzített elejével) leír egy színezett pozíciót a teljes táblában. Azaz a rögzítéshez tartozik egy színezett $U_{k+1}^{d''}$. Erre $c^{(k+1)d''}$ darab lehetőség van. Mindegyiket felfoghatjuk egy „szuper-színnek”. Azaz $U_{k+1}^{d'}$ táblának van egy szuper-színezése. Ebben található egy szépen színezett egyenes (lásd $e = 1$ esete). Az egyenes kijelölése: első d' koordinátát „csillagozzuk $*$ -gal, illetve rögzítjük”.

A szépen színezett egyenes $S_{k+1}^1(0)$ részhalmaza monokromatikus, azaz mindegyik eleméhez — pozíció előhöz — ugyanaz a szuper-szín, azaz ugyanaz a színezett $U_{k+1}^{d''}$ tábla tartozik. d'' legyen olyan nagy, hogy ebben legyen e -dimenziós szépen színezett altér. Ezen altér kijelölése: az utolsó d'' koordinátát „csillagozzuk $*_1, *_2, \dots, *_e$ -vel, illetve rögzítjük”.

Az egyenes és az altér kijelölése a teljes tábla egy $e + 1$ -dimenziós alteréhez vezet (a csillagok sorrendje: $*, *_1, *_2, \dots, *_e$). Azt állítjuk, hogy ez szépen színezett. Ez könnyen ellenőrizhető, ami a bizonyítást befejezi. ■

12. Ramsey-tételek és a sűrűség

A gráfelméleti Ramsey-tétel egy nyelvezete a teljes gráf éleinek tetszőleges piros/kék színezéséről beszél. Az $\binom{n}{2}$ élt két kategóriába osztjuk. A többséget legalább $\frac{1}{2}\binom{n}{2}$ él alkotja. Felmerül hogy ez az egyszínű élek sokasága már garantálja, hogy ebben a színben nagy homogén halmaz alakuljon ki. Az első gondolatot Turán-tétele rögtön megcáfolja. Több mint az élek fele lehet piros úgy, hogy három elemű piros-homogén csúcshalmaz se legyen. Ha nagyobb homogén halmaz a célunk, akkor még több él megadható a nagy homogén halmaz elkerülésével. Ramsey tételének igaz mivolta

strukturális okú. Ha a piros élek elkerülik nagy homogén halmaz kialakítását, akkor a komplementeréthalmaz (a kék élek) már nem lehet hasonló strukturájú.

Más esetben azonban a sűrűség okozhatja a szabályos rész kialakulását. Erdős Pál és Turán Pál ezt sejtésként mondta ki a van der Waerden-tétel esetére.

Az eddig megemlített Ramsey-tételeket a következő táblázatban foglaljuk össze:

Tétel	Színezendő struktúra	Keresett monokromatikus részstruktúra	Lehetséges színosztály maximális mérete
Ramsey-tétel	n pontú teljes gráf élei	3 pontú teljes gráf élei	$K_{\lfloor n/2 \rfloor, \lfloor n/2 \rfloor}$, az n pontú, kétrészes Turán-gráf
Ramsey-tétel	n pontú teljes gráf élei	k pontú teljes gráf élei	$T_{n, k-1}$ az n pontú, $k-1$ részes Turán-gráf
Schur-tétel	$[n]$	$\{x, y, x+y\}$	I. Példa: a páratlan számok. II. Példa: $[n] \setminus [\lfloor n/2 \rfloor]$, azaz a „nagy számok $[n]$ -ban”.
van der Waerden tétele	$[n]$	k hosszú (nem-konstans) számtani sorozat	???

Erdős Pál és Turán Pál sejtette, hogy ??? helyére nem létezik jó példa, azaz nem lehet megadni $\{1, 2, \dots, n\}$ egy „jelentős” részét úgy, hogy az ne tartalmazzon k hosszú számtani sorozatot. Eszerint a van der Waerden-tétel egyfajta indoklása egy sűrűségi indoklás. Ami jóval erősebb mint a Ramsey-tételek szokásos kombinatorikus bizonyítása.

Definíció.

$$r_k(n) = \max\{|R| : R \subseteq [n], R\text{-ben nincs } k \text{ hosszú számtani sorozat}\}.$$

Sejtés (Erdős Pál—Turán Pál, 1936). $r_k(n) = o(n)$, ha $k \geq 3$,

Azaz minden pozitív ε esetén, ha n elég nagy, akkor $r_k(n) \leq \varepsilon n$. Az első lényeges eredmény a sejtés kimondása után 20 évvel született

34. Tétel (Roth tétele, 1956). $r_3(n) = o(n)$.

Majd Szemerédi Endre a négy hosszú számtani sorozatok esetét bizonyította, később pedig következett az általános eset.

35. Tétel (Szemerédi Endre, 1975). Minden $k \geq 3$ esetén igaz a sejtés. Azaz

$$r_k(n) = o(n).$$

A sejtés bizonyítása után a kérdéskör vizsgálata szinte még pezsgőbb lett. Csak a legkiemelkedőbb eredményeket vázoljuk.

A tételt újra bizonyították

- 1977 Fürstenberg. Bizonyítása ergodelméletet használ.
- 2001 Gowers. Bizonyítása erős kombinatorikus számelméleti eredményeket és Fourier-technikát használ. A Fourier-módszer használatát Roth vezette be, de eredményes kihasználása további zseniális ötleteket kívánt.

Gowers új bizonyítása azért is kiemelkedő, mert az eredeti kombinatorikus, illetve későbbi ergodelméleti bizonyítás szükségszerűen nem adott becslést az $r_k(n)$ számokra. A Fourier-módszer alkalmazása viszont effektív becsléseket is ad. Így mellékeredményként adódott a van der Waerden számok következő becslése.

36. Tétel (Gowers-becslés).

$$W_2(k) \leq 2^{2^{2^{2^{k+9}}}}.$$

A fenti módszerek összes erejére és még többre volt szükség, hogy az alábbi eredmény adódjon.

37. Tétel (Green—Tao-tétel). Minden k pozitív egészre a prímek között van k hosszú számtani sorozat.

Terence Tao 2006-ban Fields-érmét kapott. Az odaítélés indoklásában a fenti eredmény ki lett emelve.

A tétel oka ismét sűrűségi.

38. Tétel (Green—Tao-tétel, sűrűségi változat). Legyen $P_n = \{2, 3, 5, 7, 11, p_6, \dots, p_n\}$ az első n prím halmaza. Legyen ϵ tetszőleges (kicsi) pozitív konstans. Ha $A \subset \mathbb{N}$ teljesíti, hogy $|A \cap P_n| \geq \epsilon n$ végtelen sok n -re, akkor A -ban van k hosszú számtani sorozat minden k pozitív egészre.