Diszkrét Matematika-Gráfelmélet MSc hallgatók számára

5. Gráfok él- és csúcsszínezései

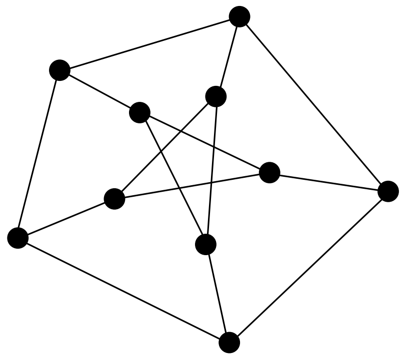
Előadó: Hajnal Péter 2011–12. őszi félév

1. Síkgráfok és élszínezések

A párosításoknál szereplő Petersen-tétel azt állította, hogy ha a G gráf kétszeresen élösszefüggő és 3-reguláris, akkor G-ben létezik teljes párosítás. Ha gráfunk síkgráf, akkor ennél több is igaz:

1. Állítás. *Ha G 3 reguláris 2-szeresen élösszefüggő, továbbá síkgráf is, akkor élhalmaza három teljes párosítás uniója, azaz találhatók olyan M_1, M_2, M_3 teljes párosítások G-ben, hogy $M_1 \dot\cup M_2 \dot\cup M_3 = E(G)$ teljesüljön.*

Megjegyzés. A síkgráf feltétel szükséges az erősebb konkúzióhoz. Az ellenpéldát Petersen adta. Tehát a nevét viselő Petersen-gráf: 3-reguláris, kétszeresen élösszefüggő, nem síkgráf, és élhalmaza nem áll elő $M_1 \dot\cup M_2 \dot\cup M_3$ alakban, ahol az M_i-k párosítások.



A Petersen-gráf egyszerűsége ellenére nagyon szimmetrikus és a gráfelmélet legkülönbözőbb területein felbukkanó, központi szerepet játszó gráf.

Petersen eredeti motivációja a négy-szín-sejtés volt. Az alábbiakban a négy-szín-sejtés egy élszínezéses ekvivalensét mutatjuk meg. Így kapcsolatot teremtünk a párosítások, élszínezések és síkgráfok között.

Definíció. G gráf élszínezése $c : E(G) \to \mathbb{N}^+$ függvény. c egy k-élszínezése G-nek, ha $c(E(G)) \subseteq \{1, 2, \ldots, k\}$.

Definíció. c jó élszínezése G-nek, ha minden x csúcsra az ott összefutó $d(x)$ élnek különböző színe van.

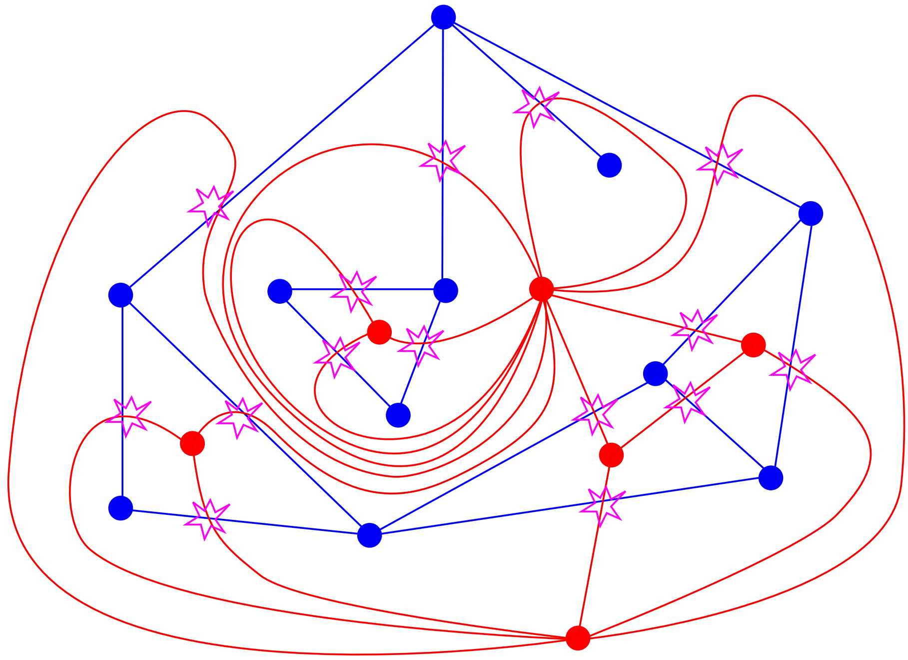
A következő optimalizálási feladat adódik: keressük azt a minimális k természetes számot, amellyel egy G gráf jól k-él-színezhető. E gráfparaméter neve: G élkromatikus száma, jelölése χ_e. Azaz

$$\chi_e(G) := \min\{k \in \mathbb{N}^+ : G\text{-nek van jó } k\text{-élszínezése}\}.$$

Megjegyzés. A hurokél akadálya a jó színezésnek: Ha van hurokél, akkor nem létezik jó élszínezés (az összefutó $d(x)$ él között ismétlődés van), ha nincs hurokél, akkor pedig létezik jó színezés (például ha minden él különböző színt kap, akkor jó színezésünk van).

A kapcsolat a párosítások és az élszínezések között az, hogy egy gráf jó színezésében az azonos színű élek egy párosítást alkotnak a gráfban. Tehát jó színezés keresése ekvivalens az élhalmaz párosításokra történő osztályozásával. Azaz állításunk ekvivalens azzal, ha G 3-reguláris, 2-szeresen élösszefüggő, síkgráf, akkor $\chi_e(G) = 3$.

A továbbiakhoz fel kell idéznünk a síkrarajzolt gráfokról és duálisukról a BSc-s Kombinatorika kurzusban tanultakat. A következő ábrán egy síkrarajzolt gráfot (kék) és duálisát (piros) láthatjuk.



Az ábrán látható lila csillagok párbaállítják az eredeti és duális gráf éleit.

A következő táblázatban összefoglaljuk síkrarajzolt gráf és duálisa közötti sokrétű kapcsolatot.

EREDETI	DUÁLIS
G síkra rajzolt gráf	G^* síkra rajzolt gráf
tartományok/országok	csúcsok/fővárosok
élek	élek
közös határéllel rendelkező (szomszédos) tartományok	szomszédos csúcsok
tartományszínezés	csúcsszínezés
jó tartományszínezés (szomszédos tartományok különböző színűek)	jó csúcsszínezés
jó színezhetőség feltétele: nincs olyan él, amely mindkét oldalán ugyanaz a tartomány fekszik	jó színezhetőség feltétele: nincs hurokél
csúcsok	tartományok

egy csúcsban összefutó élek	egy tartományt határoló élek
fokszám	határ bejárásának hossza
Négy-szín-tétel ($4CT$): kétszeresen élösszefüggő síkra rajzolt gráf tartományai négy színnel jól színezhetők	Négy-szín-tétel ($4CT$): hurokélmentes síkra rajzolt gráf csúcsai négy színnel jól színezhetők
Színezés esetén feltehető: G három-reguláris	Színezés esetén feltehető: minden tartomány háromszög (gráfunk triangulált)

Megjegyezzük, hogy 3-regularitás esetén a mohó algoritmus minden gráfot jól 4-csúcsszínez. Illetve duálisan triangulált síkrarajzolt gráf tartományai nyilvánvalóan jól 4-színezhetők.

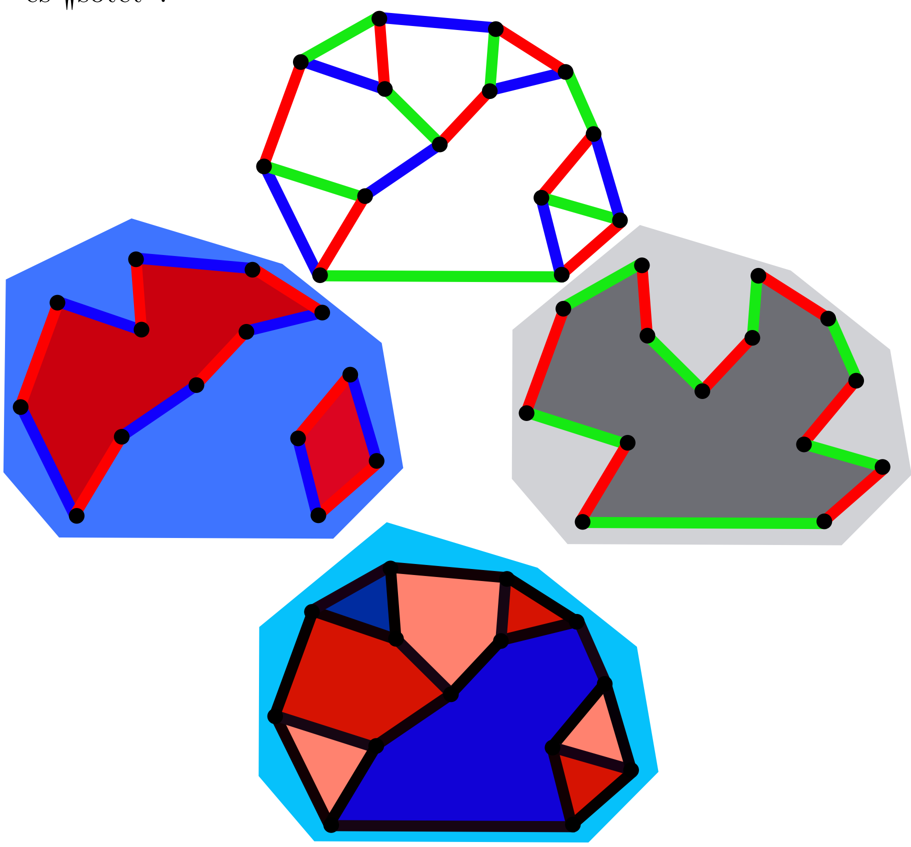
2. Tétel. *A következők ekvivalensek:*

(i) Ha G 3-reguláris, 2-szeresen élösszefüggő síkgráf, akkor $\chi_e(G) = 3$.

(ii) 4CT.

Bizonyítás. (i)$\Rightarrow$ a 4CT tartományszínezési verziója 3-reguláris gráfokra. Legyen G egy a síkra szépen lerajzolt 3-reguláris kétszeresen élösszefüggő gráf.

Tudjuk, hogy G élhalmaza M_1, M_2, M_3 teljes párosítások uniója. Legyen M_1+M_2 az $M_1 \cup M_2$ élek által meghatározott feszítő részgráf G-ben. $M_1 + M_2$ egy 2-reguláris részgráf, azaz komponensei körök. Nyilván a részgráfunknak is szépen lerajzolt és könnyen látható, hogy az $M_1 + M_2$ tartományai jól színezhetők két színnel (például a komponensek számára vonatkozó teljes indukcióval). Legyen ez a két szín „piros" és „kék". Hasonlóan $M_1 + M_3$ tartományai is jól színezhetők két színnel. Legyen ez „világos" és „sötét".



Így a síkot kétszer is kiszíneztük, speciálisan a G gráf lerajzolásának minden tartománya kétszer is színt kapott. Egy tartomány kapott színpárja négyféle lehet: „világoskék", „világospiros", „sötétkék", „sötétpiros". Ez egy jó 4-színezése G-tartományainak, mivel bármelyik két szomszédos tartomány $M_1 + M_2$-ben vagy M_1+M_3-ben külöböző tartományba esik (esetleg mindkettőben), így színeiknek már ezen komponense is megkülönbözteti őket.

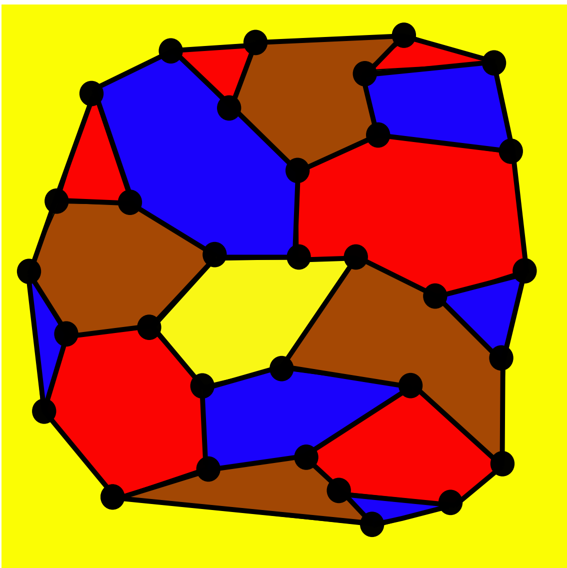
A 4CT tartományszínezési változata 3-reguláris gráfokra $\Rightarrow$ (i): Tehát tudjuk, hogy a G kétszeresen élösszefügggő, 3-reguláris síkgráf tartományait jól 4-színezhetjük. Legyen $1, 2, 3, 4$ a felhasznált színek.

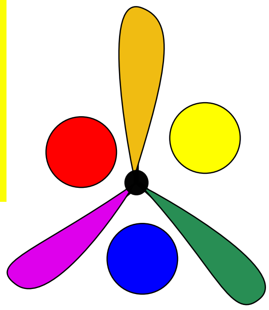
Legyen

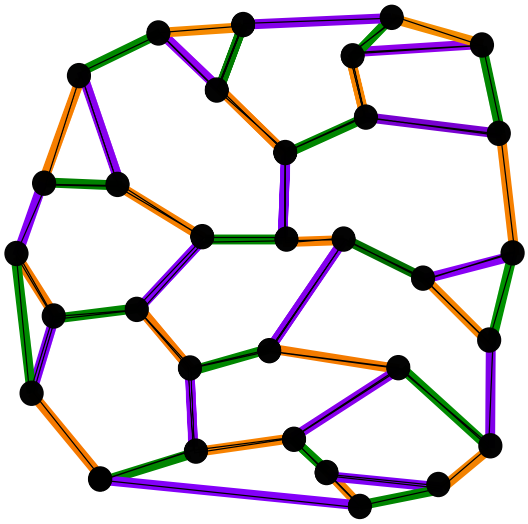
$$M_1 := \{e \in E(G)|\ e \text{ két oldalán } 1,2 \text{ vagy } 3,4 \text{ színt látjuk}\},$$

$$M_2 := \{e \in E(G)|\ e \text{ két oldalán az } 1,3 \text{ vagy } 2,4 \text{ színt látjuk}\},$$

$$M_3 := \{e \in E(G)|\ e \text{ két oldalán az } 1,4 \text{ vagy } 2,3 \text{ színt látjuk}\}.$$







Belátjuk, hogy ekkor M_1, M_2, M_3 teljes párosítások G-ben és diszjunktak.
A diszjunktság triviális a definíciókból.

Először azt igazoljuk, hogy M_1, M_2, M_3 párosítások: Tegyük fel, hogy $e, f \in M_i$ valamely $i = 1, 2, 3$ esetén és az x csúcs illeszkedik e-re és f-re is. x-ben három tartomány fut össze: τ_1, τ_2, τ_3. Ezek különböző színűek. Így e és f nem lehet ugyanabban az M_i élhalmazban.

Végül $M_1 \cup M_2 \cup M_3 = E(G)$. Valóban, úgy definiáltuk az M_i-ket, hogy bármely két szín találkozik egy e él két oldalán az valamelyik M_i halmaz definíciójának eleget tesz. (A $\binom{4}{2} = 6$ lehetőség mindegyike szerepel a három definícióban.)

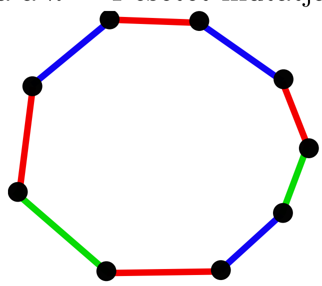
Ebből adódik az állítás. ∎

2. Gráfok él-kromatikus száma

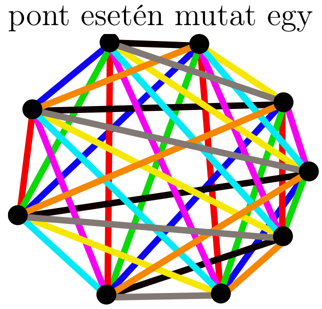
Emlékeztető. $\Delta(G) := \max_{x \in V(G)} d(x)$, a G gráf maximális fokszáma.

Nyilvánvalóan $\Delta(G) \leq \chi_e(G)$. Az alábbi példák mutatják, hogy az egyenlőtlenség két oldala között lehet különbség.

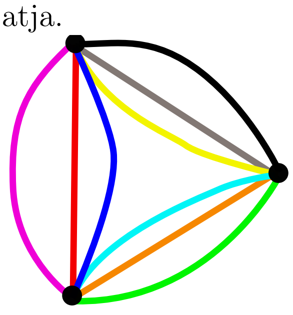
Példa. C_{2k+1} páratlan kör ($k \in \mathbb{Z}^+$). Könnyen látható, hogy $\Delta(C_{2k+1}) = 2$ és $\chi_e(C_{2k+1}) = 3$. Az alábbi ábra a $k = 4$ esetet mutatja.



Példa. K_{2k+1} páratlan pontú teljes gráf. Ekkor $\Delta(K_{2k+1}) = 2k$ és $\chi_e(K_{2k+1}) = 2k + 1$. Az alábbi ábra kilenc pont esetén mutat egy optimális élszínezést.



Példa. Legyen T_k az a gráf, amelynek három csúcsa és bármely kettőt k párhuzamos él köti össze. Ekkor bármély két él szomszédos. Így $\Delta(T_k) = 2k$ és $\chi_e(T_k) = 3k$. Az alábbi ábra a $k = 3$ esetet mutatja.



Egy gráf élkromatikus számát a maximális fokszámmal már korlátoztuk alulról ($\Delta(G) \leq \chi_e(G)$). A következő két tétel felső korlátot is ad. A második tételt igazoljuk is.

3. Tétel (Shannon tétele). *Legyen G hurokél-mentes gráf. Ekkor*

$$\chi_e(G) \le \frac{3}{2}\Delta(G).$$

4. Tétel (Vizing tétele). *Legyen G egyszerű gráf. Ekkor*

$$\chi_e(G) \le \Delta(G) + 1.$$

Bizonyítás. Adott egy G egyszerű gráf. Be kell látnunk, hogy élei jól színezhetők a $P = \{1, 2, \dots, \Delta(G) + 1\}$ palettával.

Legyen $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ és legyen $G_i := G|_{\{v_1,\dots,v_i\}}$. i-re vonatkozó teljes indukcióval belátjuk az állítást G_i-re. Bizonyításunk konstruktív lesz, azaz G_i egy jó-él-színezéséből megkonstruálunk G_{i+1} jó-él-színezését. Azaz G_i élszínezését kiterjesztjük a v_{i+1}-re illeszkedő G_i-hez haladó élekre (amik kezdetben színezetlenek). Legyen F a G_i és v_{i+1} közötti élek halmaza, így $|F| = d|_{G_{i+1}}(v_{i+1}) =: d$.

G_i élszínezésének kiterjesztése fázisokban történik. Legyen $H := \{\text{színezetlen élek}\}$. Kezdetben $H = F$. A kiterjesztés során a H halmaz élei egyenként színt kapnak. Így $|H|$ csökken, amíg $H = \emptyset$ lesz (azaz G_{i+1} teljesen élszínezett).

Legyen $O := \{F\text{-beli élek, amiknek már osztottunk színt}\}$. Azaz $O \dot\cup H = F$ és $|O \dot\cup H| = |O| + |H| = d$.

Minden H-beli e élhez tartozik egy lehetséges színek halmaza. Azaz az aktuális színezésben megnézzük a két végpontjára illeszkedő színezett élek színeit (ezek $T(e)$ halmaza tiltott szín számára). $L(e) = P - T(e)$, azaz a palettánk nem tiltott színeinek halmaza.

Kezdetben minden $e \in H = F$ élre $|L(e)| \ge 2$. Valóban egy $xv_{i+1} \in H = F$ él esetén csak az x-re G_i-ben illeszkedő elek színei tiltottak. Ezen élek száma $d|_{G_i}(x) \le d(x) - 1 \le \Delta(G) - 1$. Így

$$\begin{aligned} |L(e)| =& |P| - |\{\, x\text{-re vagy } v_{i+1}\text{-re illeszkedő színezett éle színei}\}| \\ \ge& \Delta(G) + 1 - (\Delta(G) - 1) = 2. \end{aligned}$$

Az $L(e)$ halmazokból kiválasztunk egy preferált részt, amit $P(e)$-vel jelölünk. Azaz $P(e) \subset L(e)$, azaz $P(e)$ mindegyik eleme alkalmas szín e színezésére. Definiáljuk az alábbi $(\star)$ tulajdonságot, amit a kiterjesztés során végig megőrzünk:

$(\star)$ Mindegyik $P(e)$ egy- vagy kételemű, továbbá maximum egy H-beli élre lesz preferált színhalmaza egyelemű.

Ha e egy olyan él, amely preferált színhalmaza egyelemű, akkor kivételes élnek nevezzük e-t. Kivételes élekből vagy egy van vagy egy sincs.

Most lássuk a kiterjesztés legegyszerűbb esetét:

Mohó eset: *Van olyan s szín, ami egyetlen preferált halmazban szerepel.* Ha $s \in P(e)$ $(e \in H)$, akkor a korábbi színezés megtartása mellett e-nek az s színt adjuk. $H - e$ lesz a színezetlen élek új halmaza. Egy színezetlen f élre $L(f) = L(e) - \{s\}$. s egyedisége miatt megtarthatjuk a régi $P(e)$ halmazokat.

Sajnos ezt a mohó esetet nem használhatjuk mindig.

Nem mohó eset: *A preferált színek halmazaiban előforduló színek mindegyike több preferált halmazban is szerepel.* Azaz $s \in \bigcup_{e \in H} P(e)$ esetén s legalább kettő $P(e)$-ben szerepel.

Először igazolunk egy lemmát a nem mohó esetről.

5. Lemma. *A nem mohó esetben van olyan σ szín, amit nem osztottunk ki O elemein, de a preferált színek között sincs ott. Azaz $\sigma \notin c(O) = \{c(e) : e \in O\}$ és $\sigma \notin \bigcup_{e \in H} P(e)$.*

Lemma bizonyítása: Legyen $c(O)$ az F elemein eddig kiosztott színek halmaza, azaz az O-beli élek színeinek halmaza. O elemei összefutnak v_{i+1}-ben, azaz a színeik különbözőek, $|c(O)| = |O|$. A nem mohó esetben

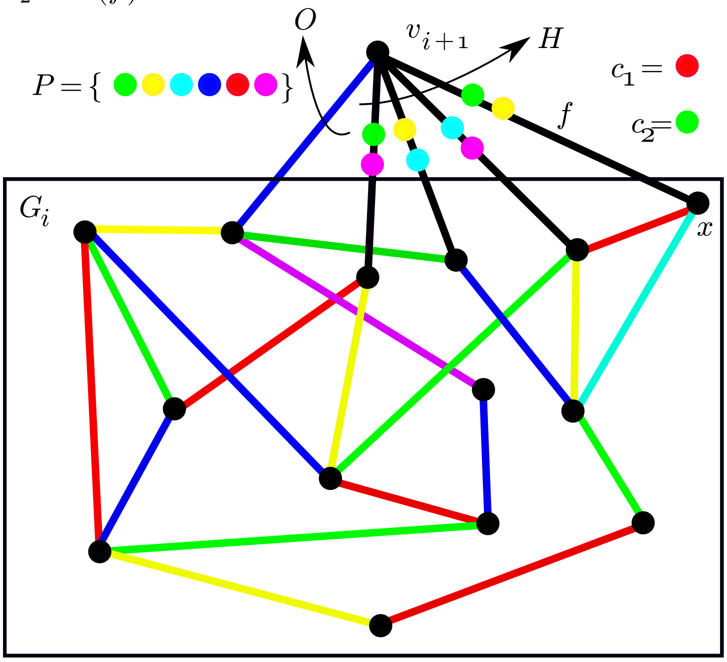
$$|\bigcup_{e \in H} P(e)| \leq \frac{\sum\limits_{e \in H} |P(e)|}{2} \leq 2\frac{|H|}{2} = |H|.$$

Azaz $c(O)$ és $\bigcup_{e \in H} P(e)$ együtt is egy legfeljebb

$$|O| + |H| = |F| = d = d|_{G_{i+1}}(v_{i+1}) \leq \Delta(G)$$

elemű színhalmazt adnak. Azaz palettánknak garantáltan lesz szabad színe. Q.e.d.

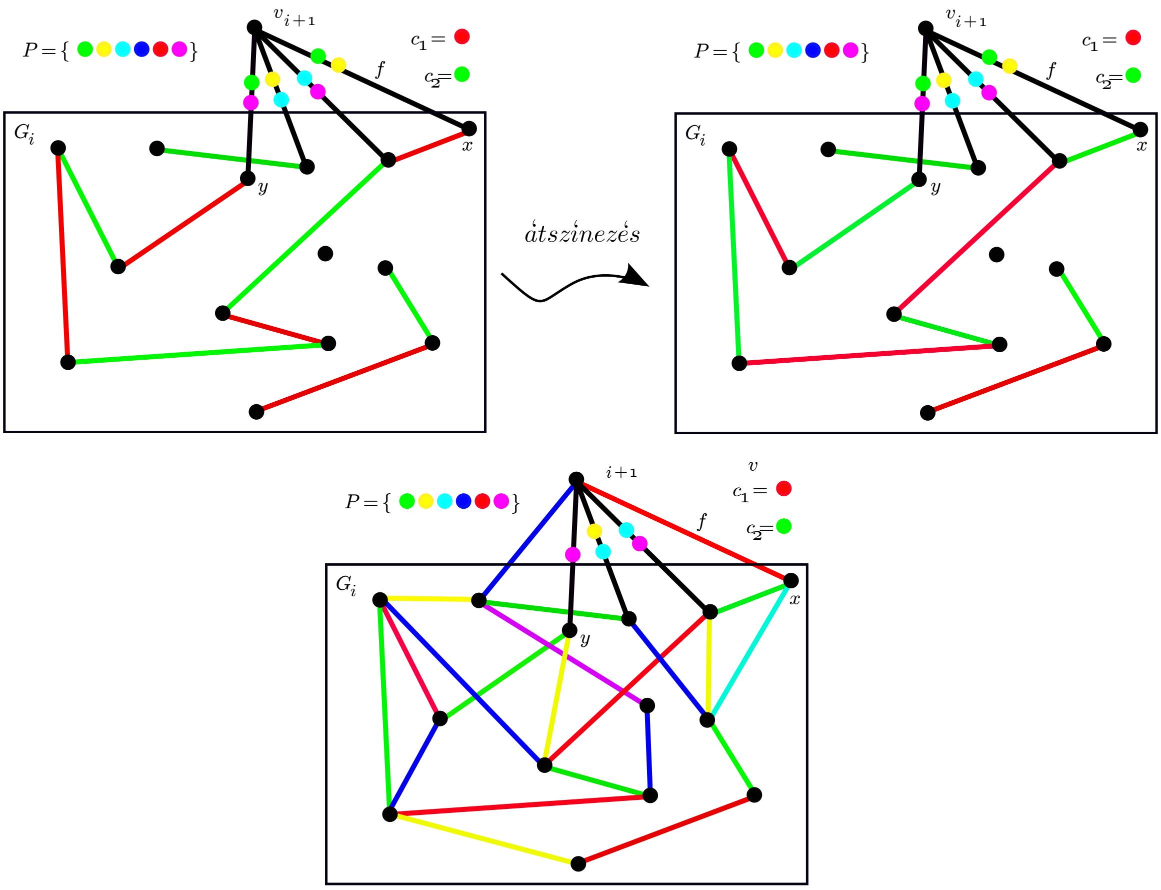
Legyen c_1 egy a lemma által garantált szín. Legyen c_2 az a szín, amelyre $\{c_2\}$ a kivételes él preferált színhalmaza, illetve tetszőles szín egy preferált halmazból, amennyiben nincs kivételes él. Legyen $f = xv_{i+1}$ az az él, amely a kivételes él, vagy amennyiben ilyen nincs, egy olyan él amely preferált színhalmazában szerepel c_2. Mindenképpen $c_2 \in P(f)$.



G_{i+1}-ből emeljük ki a c_1 és c_2 színű éleket: Összes $V(G_{i+1})$ csúcs és a c_1, c_2 színű élek gráfjában minden fok legfeljebb 2, azaz a komponensek színalternáló utak vagy körök.

Az x csúcs komponense szükségszerűen út: $c_2 \in P(f)$ és $P(f)$ definíciója miatt x-re nem illeszkedhet c_2 színű él. Legyen ez egy U xy-út, amiben x-re maximum egy c_1 színű él illeszkedik (elképzelhető, hogy x-re nem illeszkedik sem c_1, sem c_2 színű él sem).

U mentén cseréljük fel a színeket! Ekkor megmarad a színezés jó mivolta. Valamint f-re már nem illeszkedik c_1 színű él, azaz kaphatja a c_1 színt.



Az $L(e)$ halmazokat is újra kell értékelni: Azon éleknek, amelyek nem az U út valamelyik csúcsába vezetnek a lehetséges színhalmaza nem változik. Azon éleknek, amelyek az U út köztes csúcsába vezetnek szintén nem változik a lehetséges színhalmazuk!

Baj akkor van, ha v_{i+1}-ből vezet egy g él y-ba ($y \neq x$). g nem volt kivételes él, tehát ha $P(g) \leftarrow P(g) - \{c_2\}$ változtatást hajtjuk végre, akkor $P(g)$ egyeleművé változik vagy kételemű marad. A $(\star)$ tulajdonság mindenképpen megmarad! ■

Megjegyzés. A bizonyításból egy algoritmus is kiolvasható, ami egyszerű gráfokat a Vizing-korlát méretű palettával jól-élszínez.

3. (Csúcs)színezések

Ebben a fejezetben egyszerű gráfokkal dolgozunk, tehát itt minden gráfon egyszerű gráfot fogunk érteni. Emlékeztetőként idézzünk fel néhány korábban tanult definíciót és tételt.

Definíció. Egy $c : V(G) \to \mathbb{N}^+$ leképezést a G gráf egy (csúcs)színezésének nevezzük. A $c(v)$ „szám" a v csúcs színe.

Definíció. A G gráf egy színezése jó színezés, ha minden $e \in E(G)$ élre $e = uv$ esetén $c(u) \neq c(v)$.

Definíció. A G gráf egy színezése k-színezés, ha a felhasznált színek száma k.

Definíció. Egy G gráf kromatikus száma

$$\chi(G) = \min\{k : \ G\text{-nek létezik jó } k\text{-színezése}\}\,.$$

Definíció. A G gráf esetén egy $F \subset V(G)$ csúcshalmazt független ponthalmaznak nevezünk, ha bármely két F-beli pont között sincs él.

Definíció. $\alpha(G) = \max\{|F| : F \text{ független ponthalmaz } G\text{-ben}\}$.

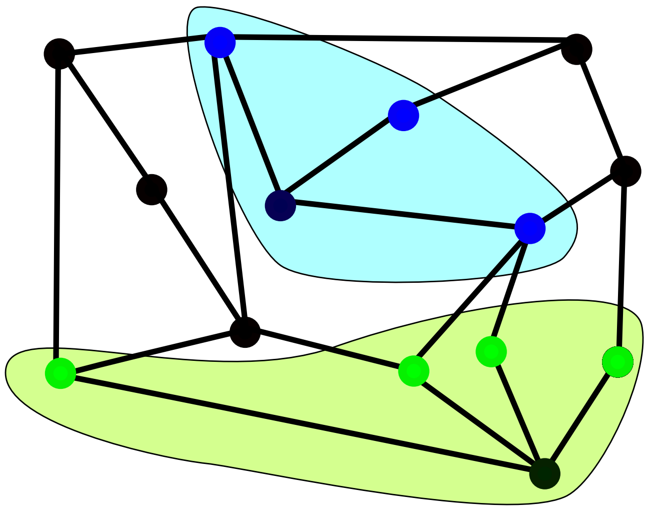
Definíció. A G gráf esetén egy $K \subset V(G)$ csúcshalmazt klikknek nevezünk, ha bármely két K-beli pont között van él.

Definíció. $\omega(G) = \max\{|K| : K \text{ klikk } G\text{-ben}\}$.

Megjegyzés. Tetszőleges G gráfra $\chi(G) \geq \omega(G)$. Ez következik abból, hogy egy klikkben minden csúcsnak más-más színt kell adnunk jó színezésnél. Egy jó színezésnél az azonos színű csúcsok egy független ponthalmazt alkotnak. Így egy jó csúcsszínezés felfogható mint $V(G)$ független halmazokra való osztályozása.

3.1. A kromatikus szám és a derékbőség paraméter

6. Tétel BSc. *Létezik olyan $\{G_n\}$ gráfsorozat, melyre teljesül, hogy $\omega(G_n) = 2$ (azaz G háromszögmentes), illetve $\chi(G_n) \to \infty$, ha $n \to \infty$.*



Vegyünk egy olyan gráfot, amelyben nincs háromszög. Tegyük fel, hogy ennek a gráfnak egy pontjában állunk. Ez a pont a szomszédaival együtt egy csillagot feszít ki, ami az eredeti gráf részgráfja. Egy ilyen helyzet látható a fenti ábrán. Ezen lokális részeket látva semmilyen nehézséget nem érzékelünk. A gráf globális színezéséhez szükséges színszám tetszőlegesen nagy lehet. Ez rávilágít a probléma nehézségére. A nehézség formálisan is igazolható: ez az egyik alap $\mathcal{NP}$-teljes probléma (szerepel Richard Karp 1972-ben összegyűjtött 21 NP-teljes problémája között).

Definíció. Tetszőleges G gráf esetén rögzítsünk egy $o \in V(G)$ csúcsot, és tetszőleges $r \in \mathbb{N}^+$ esetén definiáljuk a következő részgráfot:

$$B(o, r) = G\mid_{\{v \in V : d(o,v) \leq r\}},$$

ahol $d(o, v)$ a legrövidebb ov út hosszát jelöli.

Az előző példánál erősebb feltétel is adható. Az előző példában $B(o, 1)$ gömbök esetén láttuk, hogy a kromatikus szám tetszőlegesen nagy lehet amelett, hogy gömbjeinkben minden a legegyszerűbb. De nem kell az r-et 1-nek választani, tetszőleges sugár esetén is igaz: attól még, hogy minden $B(o, r)$ ($o \in V(G)$) esetén páros gráfot „látunk" a kromatikus szám tetszőlegesen nagy lehet.

Az, hogy a G gráfban nincs háromszög, ekvivalens azzal, hogy $\omega(G) \leq 2$, azaz $B(o, 1)$ csillag, azaz $B(o, 1)$ páros gráf. Hasonlóan $B(o, r)$ is páros gráf, és ez azzal ekvivalens, hogy G-ben nem létezik $2r + 1$ hosszú, vagy rövidebb páratlan kör. Tovább erősítjük a feltételt: azt mondjuk, hogy G-ben legyen minden kör legalább $2r + 2$ hosszú, azaz minden rögzített o középpontra $B(o, r)$ egy fa. Ez az erősített feltétel mellett is a globális kromatikus szám tetszőlegesen nagy lehet.

Definíció. A G gráf derékbőségének (girth) nevezzük azt a $g(G)$ számot, amelyre

$$g(G) = \min \{l : G\text{-ben létezik } l \text{ hosszú kör}\}.$$

A következőkben arra keressük a választ, hogy, ha adott egy γ és egy τ pozitív egész szám, akkor létezik-e olyan G gráf, melyre $\gamma \leq g(G)$ és $\chi(G) \geq \tau$.

7. Tétel (Erdős Pál). *Bármely $\gamma, \tau \in \mathbb{N}^+$ számokhoz létezik olyan G gráf, amelyre $g(G) \geq \gamma$ és $\chi(G) \geq \tau$.*

Bizonyítás. Nem konstruktív bizonyítást adunk a tételre. (Konstruktív bizonyítások is léteznek, de azok nehezebbek.) A következőkben egy valószínűségszámítási módszeren alapuló bizonyítást mutatunk meg.

Legyen V egy n elemű csúcshalmaz. **Most csak annyit kell tudnunk n-ről, hogy elég nagy.** A továbbiakban is fogunk ilyen előre kijelentett „ígéreteket" tenni, és ezeket vastag betűtípussal fogjuk jelölni. Majd a bizonyítás végén megmutatjuk, hogy ezek az ígéretek valóban teljesülhetnek. Bármely V-beli pontpárra behúzzuk a közöttük lévő élt p valószínűséggel (azaz az össze nem kötöttség valószínűsége $1-p$). **A p értékét később adjuk meg.** Persze ezzel azt ígérjük, hogy $0 \leq p \leq 1$. Ezzel a módszerrel felépíthetünk egy gráfot, egy valószínÚségi változót. Ez az Erdős—Rényi-véletlen-gráfmodell, jelölése ($G_{n,p}$).

Bevezetünk egy új paramétert, legyen ez t. Jelölje $\mathcal{A}_t$ azt az eseményt, hogy $\alpha(G) \leq t$. Ez azt is jelenti, hogy G-ben nincs $t + 1$ elemű független ponthalmaz. Jelölje $\mathcal{F}_R$ pedig azt az eseményt, hogy R független ponthalmaz G-ben. Ekkor a modell leírásából azonnal következik, hogy

$$\mathbb{P}(\mathcal{F}_R) = (1 - p)^{\binom{|R|}{2}}.$$

Érvényes továbbá az alábbi összefüggés:

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}_t) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{\substack{R \subseteq V \\ |R|=t+1}} \mathcal{F}_R\right).$$

Ez a bonyolultnak tűnő kifejezés máris egyértelművé válik, ha szavakba öntjük, hogy mit jelent. Annak a valószínűsége, hogy $\alpha(G) \leq t$, megegyezik annak a valószínűségével, hogy nem létezik $t + 1$ elemű független csúcshalmaz, ami pedig 1 mínusz annak a valószínűsége, hogy létezik $t + 1$ elemű független csúcshalmaz, és pontosan ezt a valószínűséget írja le az egyenlőség jobb oldala.

Felhasználva azt a mértékelméleti tényt, hogy

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(E_i\right),$$

azt kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}_t) \geq 1 - \tbinom{n}{t+1}\left(1-p\right)^{\binom{t+1}{2}}.$$

Felhasználtuk azt is, hogy $\binom{n}{t+1}$ tag unióját kell nézni, illetve az unió mögött álló $\mathcal{F}_R$-re igaz a $\mathbb{P}(\mathcal{F}_R) = (1-p)^{\binom{t+1}{2}}$ összefüggés. Tovább alakítva az egyenlőtlenséget, azt kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}_t) \geq 1 - n^{t+1}\left(1-p\right)^{\binom{t+1}{2}} = 1 - n^{t+1}\left(1-p\right)^{\frac{t(t+1)}{2}} = 1 - \left[n\left(1-p\right)^{\frac{t}{2}}\right]^{t+1}.$$

A t paramétert a következőkben úgy választjuk majd meg, hogy az egyenlet jobb oldala nagyobb legyen mint $\frac{1}{2}$, illetve az n „sokkal nagyobb" legyen, mint a t.

Áttérünk egy új gondolatmenetre, amely a derékbőség nagyságának garantálásához vezet. Jelöljük ξ_γ-val azt a valószínűségi változót, amely megadja a γ-nál nemhosszabb körök számát G-ben. Keressük ennek a várható értékét. Ehhez vezessük be a

$$\xi_C = \begin{cases} 1, & \text{ha } C \subseteq G_{n,p} \\ 0, & \text{különben} \end{cases}.$$

valószínűségi változót, ahol C egy lehetséges kör. Ekkor

$$\mathbb{E}\left(\xi_\gamma\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{C\text{hossza}\leq\gamma} \xi_C\right) = \sum_{l=3}^{\gamma}\left(\sum_{C\text{hossza}=l} \mathbb{E}\left(\xi_C\right)\right). \tag{1}$$

Ha a C hossza ℓ, akkor $\mathbb{E}\left(\xi_C\right) = p^\ell$. Hány darab lehetséges ℓ hosszú kör van? A válasz $\binom{n}{\ell}\frac{(\ell-1)!}{2}$, ugyanis a csúcsokat $\binom{n}{l}$-féleképpen választhatjuk ki, és ezeket a kiválasztott l pontokat $\frac{(l-1)!}{2}$-féleképpen rendezhetjük körbe. Felhasználva az

$$\binom{n}{l}\frac{(l-1)!}{2} = \frac{n\left(n-1\right)\ldots\left(n-l+1\right)}{2l} \leq \frac{n^l}{2l} \leq \frac{n^l}{6}$$

egyenlőtlenséget, felírhatunk $\mathbb{E}\left(\xi_\gamma\right)$-ra egy felső becslést:

$$\mathbb{E}\left(\xi_\gamma\right) \leq \sum_{l=3}^{\gamma}\frac{n^l}{6}p^l = \sum_{l=3}^{\gamma}\frac{n^l p^l}{6} \overset{(!)}{\leq} \sum_{l=3}^{\gamma}\frac{(np)^\gamma}{6} \leq \gamma\frac{(np)^\gamma}{6}.$$

A (!) becslésnél feltesszük, hogy $np \geq 1$. Továbbá p-t úgy fogjuk megválasztani, hogy

$$\gamma\frac{(np)^\gamma}{6} < \frac{n}{4}$$

teljesüljön. Ha ez teljesül, akkor a Markov-egyenlőtlenségből adódik, hogy

$$\mathbb{P}\left(\xi_\gamma < \frac{n}{2}\right) > \frac{1}{2}.$$

Ezek után felírhatjuk a $\mathbb{P}\left(\mathcal{A}_t \wedge \left(\xi_\gamma < \frac{n}{2}\right)\right) > 0$ megállapítást, mivel a $\wedge$ két oldalán álló események valószínűsége külön-külön legalább $\frac{1}{2}$.

Ebből következik, hogy létezik olyan G gráf, amelynek n csúcsa van, és amelyre teljesül a következő két állítás:

- A G-ben lévő γ-nál nem hosszabb körök száma $\frac{n}{2}$-nél kevesebb.
- $\alpha(G) \leq t$.

Vegyük ezt a G gráfot, és minden γ-nál nem hosszabb körből hagyjunk el egy-egy pontot, jelölje az így kapott gráfot G_0. Ekkor G_0-ban nincs legfeljebb γ hosszúságú kör ($g(G_0) \geq \gamma$), csúcsszáma legalább $\frac{n}{2}$, azaz $|V(G_0)| \geq \frac{n}{2}$, és $\alpha(G_0) \leq t$. Továbbá igaz a

$$\chi(G_0) \geq \frac{n/2}{t} = \frac{n}{2t} \geq \tau$$

becslés is, **feltéve, hogy $n \gg t$, azaz, ahogy azt a bizonyítás elején is írtuk, n elég nagy**. Abból, hogy

$$\gamma \frac{(np)^\gamma}{6} < \frac{n}{4},$$

adja magát a p választása. Ugyanis keressük p-t úgy, hogy $\gamma(np)^\gamma = n$, azaz $p = \frac{1}{n}\left(\frac{n}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$. A p-re ebből már következik, hogy mindig 0 és 1 között van, illetve az is $np > 1$. Bevezető analízisből ismeretes, hogy $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \nearrow e^{-1}$, sőt $(1-p)^{\frac{1}{p}} < \frac{1}{e}$. Ekkor

$$\left[n(1-p)^{\frac{t}{2}}\right]^{t+1} = \left[n\left((1-p)^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{pt}{2}}\right]^{t+1},$$

és t értékét úgy akarjuk megadni, hogy $\left((1-p)^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{pt}{2}} < \frac{1}{n^2}$ teljesüljön. A t paramétert ezek alapján könnyen meghatározhatjuk:

$$\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{pt}{2}} = \frac{1}{n^2} \Longleftrightarrow e^{\frac{pt}{2}} = n^2 \Longleftrightarrow \frac{pt}{2} = 2\ln n \Longleftrightarrow t = \frac{4\ln n}{p}.$$

Az esetleg hiányzó ígéretek ellenőrzése egyszerű aritmetikai számolás. Azokat elvégezve a tétel bizonyítása itt véget ér. ■

3.2. Nem k-színezhető gráfok

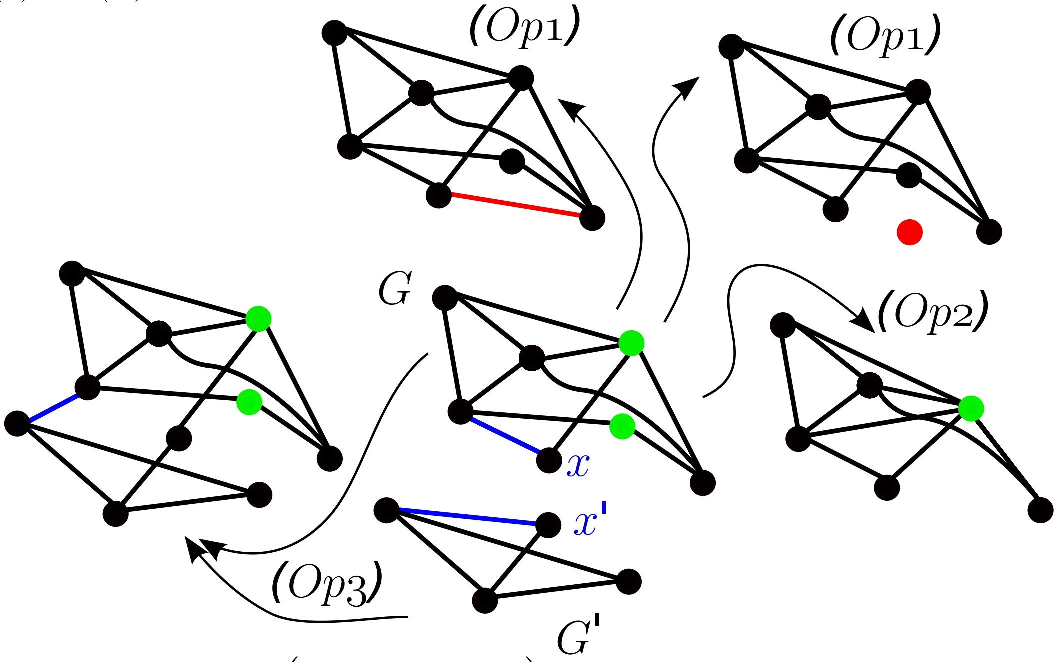
Emlékeztetőül megint idézzünk fel két állítást:

- G nem 2-színezhető $\Longleftrightarrow$ G-ben létezik páratlan hosszú kör.
- G nem 3-színezhető $\Longleftarrow$ G-nek részgráfja a K_4 ($K_4 = 4$ csúcsú teljes gráf).

Megjegyzés. A második állításában a $\Longrightarrow$ irány nem teljesül, és nem is tudunk jó jellemzést adni arra a problémára.

Tehát K_4 részgráf felmutatása egy jó módszer nem-3-színezhetőség bizonyítására. (Jó és gyors, hatásos.) De a módszer nem teljes. A következőkben Hajós György egy teljes módszerét ismertetjük annak igazolására, hogy egy gráf nem k-színezhető.

Definíció. A következőkben definiálunk három gráfokon elvégezhető operációt.
(Op1): Él vagy csúcs hozzáadása a gráfhoz. (Bővítés.)
(Op2): Két nem szomszédos csúcs (x, x') azonosítása. Ha x csúcs szomszédságát $N(x)$-szel jelöljük, akkor az összevonással keletkezett pont szomszédsága megegyezik $N(x) \cup N(x')$-vel.



(Op3): Hajós-operáció $\left(\text{Hajós}_{\overrightarrow{e},\overrightarrow{e'}}(G, G')\right)$. Legyen $e \in E(G), e' \in E(G')$, $\overrightarrow{e} = xy$, $\overrightarrow{e'} = x'y'$. Az operáció eredményét jelöljük H-val. $V(H) = (V(G) - \{x\})\dot\cup(V(G) - \{x'\})\dot\cup\{[x]\}$, $E(H) = (E(G) - \{e\})\dot\cup(E(G') - \{e'\})\dot\cup\{xx'\}$, az illeszkedés pedig természetes. A formális definíció megértését a mellékelt ábrán tesztelni lehet.

8. Lemma. *Ha G és G' nem k-színezhető, akkor G^+, $\widetilde{G}$ és Hajós(G, G') sem k-színezhető.*

Az előző Lemma nyilvánvalóan ekvivalens a következővel:

9. Lemma. *Ha G^+és $\widetilde{G}$ k-színezhető, akkor G is az. Ha Hajós(G, G') k-színezhető, akkor G vagy G' is az.*

Megjegyzés. G^+és $\widetilde{G}$ esetén a Lemma nyilvánvaló, ugyanis több objektum esetén nehezebbé válik a színezés. Hajós(G, G') esetén is egyszerű az állítás.

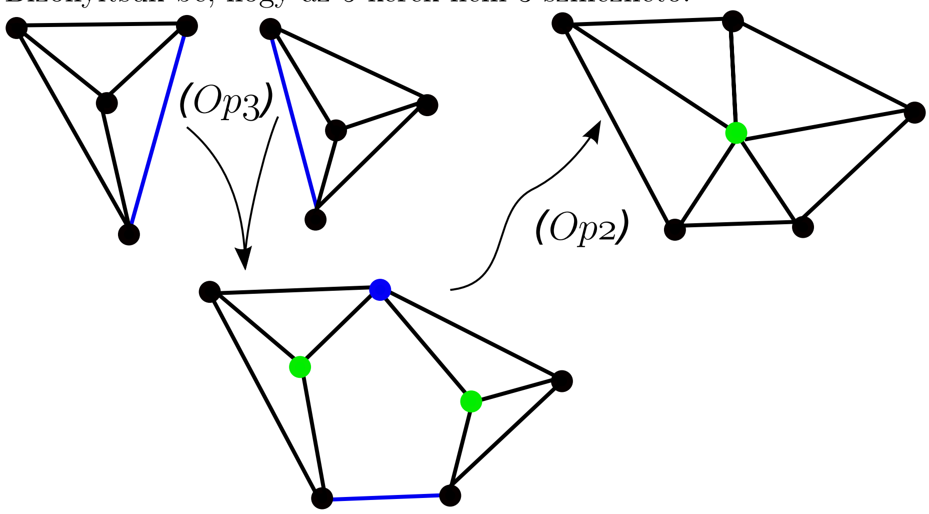
Definíció. A G gráf Hajós-konstruálható K_{k+1}-ekből, ha létezik olyan $G_1, G_2, \ldots G_l$ sorozat, hogy mindegyik G_i vagy K_{k+1}, vagy a korábbi gráfokból a fent leírt három operáció valamelyikével nyerhető.

10. Következmény. *Ha G Hajós-konstruálható, akkor G nem k-színezhető.*

A következmény bizonyítása teljes indukcióval történhet.

11. Következmény. *Nyilván G_1 mindig csak K_{k+1} lehet, G_2 pedig csak K_{k+1} vagy egy olyan gráf, ami K_{k+1}-ből (Op1) operációval kapható ((Op2) nem alkalmazható teljes gráfokra).*

Példa. Bizonyítsuk be, hogy az 5-kerék nem 3-színezhető.



Először a G_1 és G_2 gráfokon hajtjuk végre az (Op3) operációt, ezért az így kapott G_3 gráf nem 3-színezhető. A G_3 gráfon pedig az (Op2) operációt hajtjuk végre, és az eredmény a szintén nem 3-színezhető G_4 gráf lesz, amit 5-keréknek nevezünk.

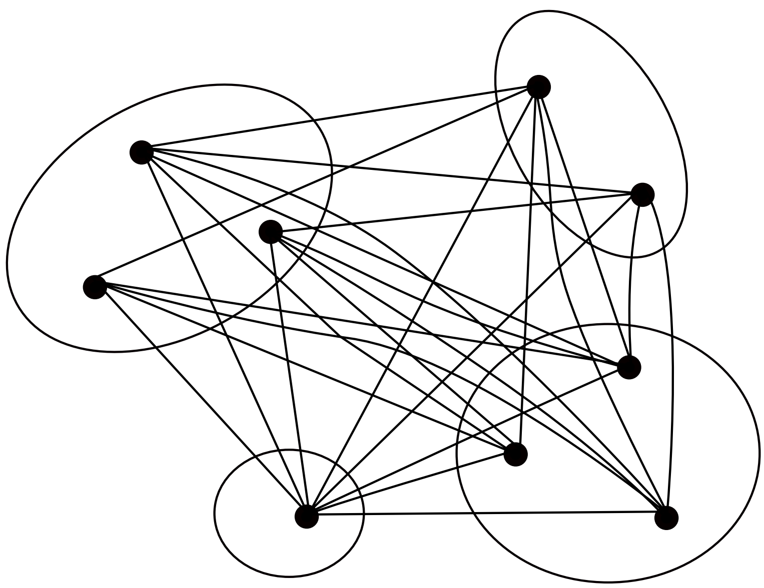
12. Tétel Hajós György. *G nem k-színezhető $\Longleftrightarrow$ G Hajós-konstruálható K_{k+1}-ből.*

Bizonyítás. A $\Longleftarrow$ irány nyilvánvaló, a $\Longrightarrow$ irányt pedig indirekt módon bizonyítjuk.

Tegyük fel, hogy létezik ellenpélda, azaz létezik olyan G nem k-színezhető gráf, ami nem Hajós-konstruálható. Tegyük a G gráfot telítetté, azaz adjunk hozzá éleket mindaddig, amíg az ellenpéldára vonatkozó két tulajdonság teljesül. Így kapjuk a G^{tel} gráfot. A bizonyítás folytatása előtt szükségünk van néhány definícióra, illetve egy nagyon fontos lemmára. A Hajós-tétel bizonyítását a lemma bizonyítása után folytatjuk.

Definíció. Egy G gráf teljes r-részes gráf, ha a $V(G)$ csúcshalmaz r darab osztály uniója, és az $E(G)$ élhalmaz pedig az összes keresztél az osztályok között.

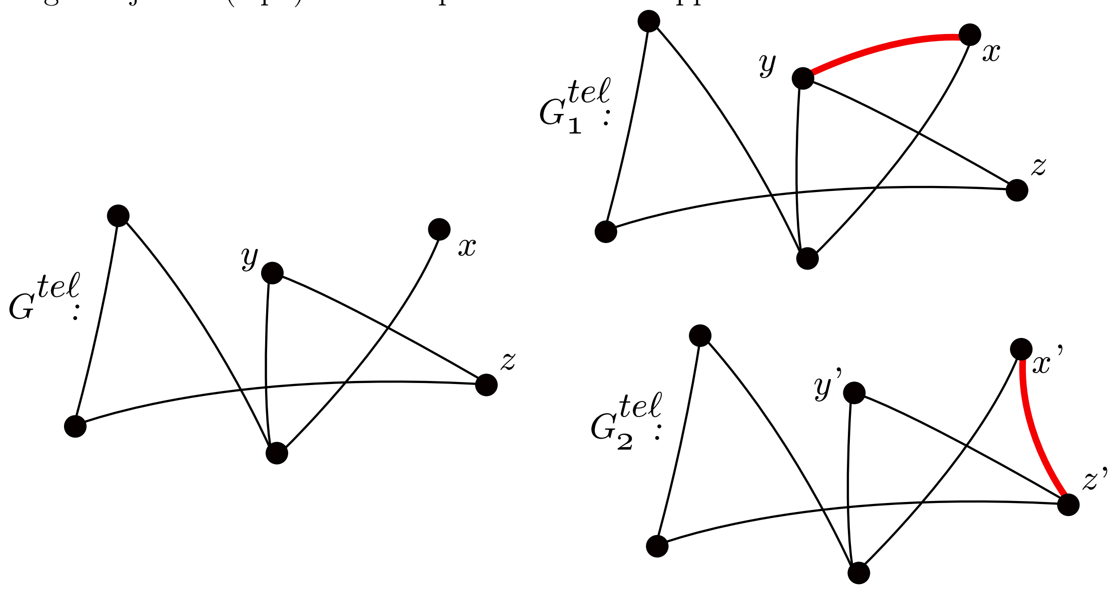
Példa. 4-részes teljes gráf például a következő:



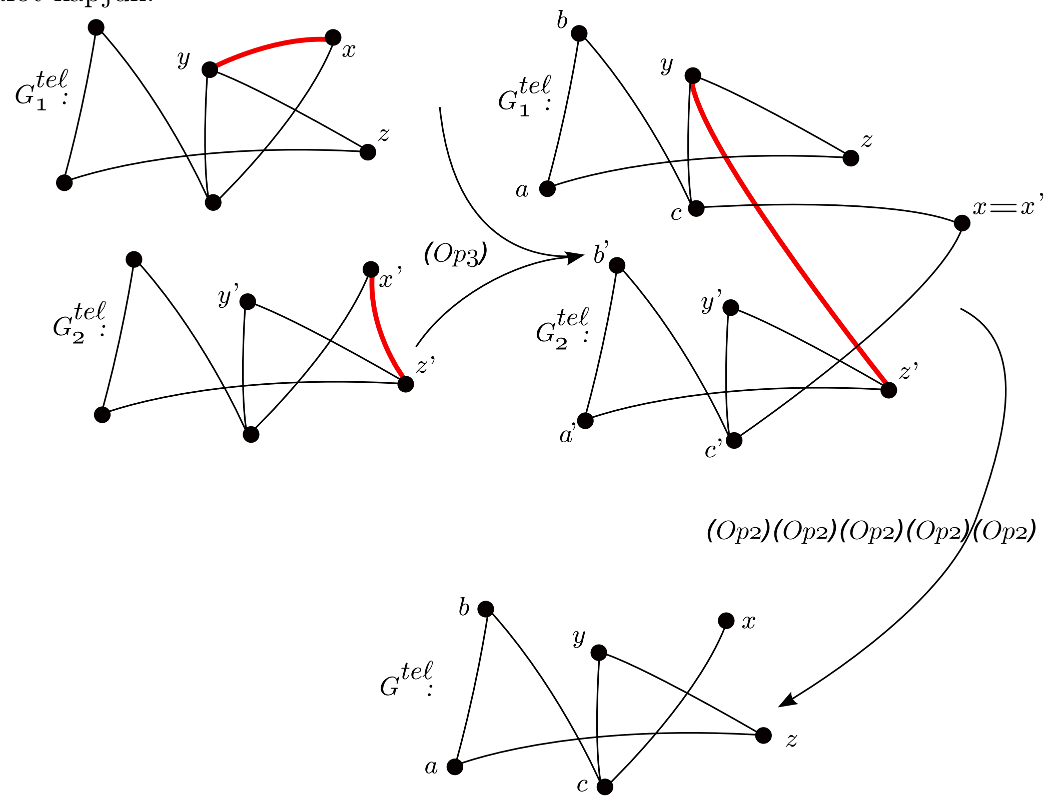
Definíció. A teljes r-részes gráf ekvivalens definíciója a következő: az „egyenlőnek vagy nem összekötöttnek lenni" reláció ekvivalenciareláció, továbbá az ekvivalecia-reláció osztályainak száma r.

13. Lemma. *G^{tel} teljes r-részes gráf.*

Bizonyítás. A bizonyítás indirekt módon történik. Tegyük fel, hogy G^{tel} nem teljes r-részes gráf, azaz az „egyenlőnek vagy nem összekötöttnek lenni" reláció nem ekvivalencia. Ekkor nyilván csak a tranzitivitás sérülhet, azaz léteznek olyan $x, y, z \in V(G^{tel})$ különböző pontok, hogy $xy, xz \notin E(G^{tel})$, de $yz \in E(G^{tel})$. Ekkor elvégezhetjük az (Op2) bővítés operációt kétféleképpen:



Ha erre két gráfra végrehajtjuk a Hajós$_{xy,x'z'}(G_1^{tel}, G_2^{tel})$ operációt, akkor a következő gráfot kapjuk:



A kapott gráfban minden G_1^{tel}-beli a pont azonosítható a neki megfelelő G_2^{tel}-beli ponttal ((Op2)). Így megkapjuk a G^{tel} gráfot. Ez azt mutatja, hogy G^{tel} Hajós-konstruálható, és ez ellentmodás. ■

Hajós-tétel bizonyításának folytatása. Emlékezzünk, hogy a tételt indirekt módon kezdtük bizonyítani, azaz feltettük, hogy létezik olyan G nem k-színezhető gráf, ami nem Hajós-konstruálható. Telítettük a G gráfot, és az így kapott G^{tel} gráfról beláttuk, hogy teljes r-részes gráf. Folytatva a bizonyítást két eset lehetséges.

1. eset: Ha $r \geq k+1$, akkor G^{tel} gráfnak létezik egy $k+1$ pontú teljes részgráfja, ugyanis minden osztályból egy tetszőleges csúcsot kiválasztva egy ilyen részgráfot kapunk. A részgráfság miatt G^{tel} megkapható K_{k+1}-ből egyszerű bővítésekkel, azaz az (Op1) operáció többszöri alkalmazásával. Ez viszont ellentmond annak, hogy G^{tel} nem Hajós-konstruálható.

2. eset: Ha pedig $r \leq k$, akkor nyilvánvaló, hogy G^{tel} gráf k-színezhető, ami szintén ellentmondás.

Mindkét esetben ellentmondásra jutottunk, így ezzel a Hajós-tétel bizonyítása véget ért. ■