Diszkrét Matematika-Gráfelmélet MSc hallgatók számára

4. Párosítások

Előadó: Hajnal Péter 2011–12. őszi félév

1. Alapfogalmak

Emlékeztető. Legyen G egy gráf, $E(G)$ a G élhalmaza, $V(G)$ gráfunk csúcshalmaza. Legyen $F \subseteq E(G)$. Ekkor $V(F) = \{x \in V : x$ illeszkedik egy F-beli élre$\}$.

$V(F)$ egy v eleméről azt mondjuk, hogy F *lefedi* a v csúcsot.

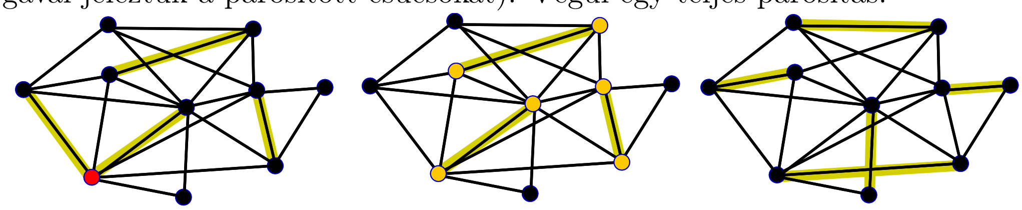
Definíció. M párosítás, ha $|V(M)| = 2|M|$ vagyis M nem-hurok élek végpont-diszjunkt halmaza.

Egy M párosítás által lefedett v csúcsról azt mondjuk, hogy *párosított*. Legyen $\overline{V}(M) = V(G) - V(M)$ az M által nem párosított/M-párosítatlan csúcsok halmaza. $|\overline{V}(M)| = |V(G)| - |V(M)| = |V(G)| - 2|M|$

Definíció. Ha az M párosítás és $V(M) = V(G)$, akkor *teljes párosításról* beszélünk.

Természetesen csak páros pontszámú gráfoknál lehetséges, hogy létezzen teljes párosítás.

Példa. Egy gráf egy élhalmazzal (sárgával kiemelt élek), ami nem párosítás (pirossal jelzett a csúcs, ahol két eleme összefut). Majd egy párosítás, ami nem teljes párosítás (sárgával jeleztük a párosított csúcsokat). Végül egy teljes párosítás.



Definíció. $\nu(G)$ a G-beli párosítások között a legnagyobb méret.

Ekkor $2\nu(G)$ a legtöbb csúcs, amit párosítani tudunk. $|V(G)| - 2\nu(G)$ a legkevesebb csúcs, ami kimarad egy párosításból.

A fenti fogalmak természetes módon vezetnek a következő algoritmikus problémákhoz:

Párosítási problémák: Adott egy G gráf.

(1) Keressünk egy M maximális elemszámú/optimális párosítást.

(2) Határozzuk meg $\nu(G)$ értékét.

(3) Döntsük el, van-e G-ben teljes párosítás.

(4) Keressünk minél nagyobb elemszámú párosítást.

A következőkben ezeket az algoritmikus problémákra ajánlunk megoldási módszereket különböző megközelítések segítségével.

2. Mohó algoritmus

A (4) problémát vizsgáljuk. Egy M párosítás kiszámítását elemi döntésekre bontjuk: minden élre el kell döntenünk, hogy beválasztjuk-e a párosításba vagy nem. Az algoritmus mohó jelzője onnan ered, hogy nem vonjuk vissza soha a korábbi döntésünket, vagyis ha egy élt egyszer beválasztottunk a párosításba, már nem vesszük ki később. Azzal, hogy korábbi döntésünket nem bíráljuk felül egy nagyon hatékony, egyszerű eljárást kapunk. Sajnos nincs garancia, hogy az output optimális.

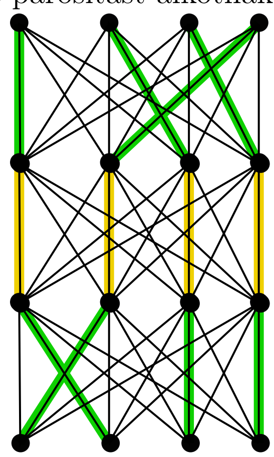
Mohó párosítási algoritmus:

`(Inicializálás) Kiindul egy` M `párosításból`
`AMÍG létezik` $e \in E(G) - M$ `él úgy, hogy` $M \cup \{e\}$ `is párosítás`
   `[(Mohó növelés/bővítés)` M`-et lecseréljük` $M \cup \{e\}$`-re.]`
`(Elakadás) Az aktuális párosítás az output`
`//Ekkor minden` M`-en kívüli él összefut valamelyik` M`-beli éllel`

Megjegyezzük, hogy nincs ciklizálási veszély: bármely javítás garantáltan növeli a párosítás élszámát, ezért az algoritmus szükségszerűen leáll.

Elakadás esetén tudjuk, hogy párosításunk egy speciális módon, a mohó módon nem javítható. Ez nem jelenti azt, hogy ettől eltérő módon nem tudunk nagyobb párosításhoz jutni.

Példa. Gráfunknak négy ugyanannyi csúcsot (legyen ez n, az ábrán $n = 4$) tartalmazó „emelete” van. Két szomszédos emelet között minden élt behúztunk, további élek nincsenek. A sárga élek egy teljes párosítást alkotnak a két középső szint között. Ha a mohó algoritmus ezeket választja ki először, akkor elakad: n élt tartalmaz outputja. A zöld élek egy teljes párosítást alkotnak ($2n$ darab él).



Megemlítünk egy, a fenti algoritmussal kapcsolatos alaptételt. Ez azt garantálja, hogy a nagyon egyszerű algoritmus outputja nem olyan rossz.

1. Tétel. *Legyen $\nu_{mohó}(G)$ a mohó algoritmus egy tetszőleges futásának mérete. Legyen $\nu(G)$ a legnagyobb párosítás mérete. Ekkor*

$$\frac{\nu(G)}{2} \leq \nu_{mohó}(G) \leq \nu(G).$$

Bizonyítás. (BSc anyag) A második egyenlőtlenség nyilvánvaló abból, hogy a mohó algoritmus egy párosítást számol ki.

Az első egyenlőtlenség igazolása: Legyen $M_{\text{mohó}}$ a mohó algoritmus outputja, $L = V(M_{\text{mohó}})$ a mohó algoritmus otputja által párosított pontok halmaza. Nyilvánvaló, hogy L lefogó ponthalmaz és $|L| = 2\nu_{\text{mohó}}(G)$. Így L mérete minden párosítás méretét felülről becsli, speciálisan $\nu(G) \leq |L| = 2\nu_{\text{mohó}}(G)$. ■

3. Véletlen módszer

A (3) problémát vizsgáljuk, azaz csak tesztelni szeretnénk,hogy gráfunkban van-e teljes párosítás. Módszerünk általános gráfok vizsgálatát is megengedi, mégis csak egy egyszerűb esetet vizsgálunk: Adott G egyszerű, páros gráf, $|A| = |F| = n$. Van-e G-ben teljes párosítás?

Az egyszerűség és a két színosztály azonos mérete természetes módon, az általánosság megszorítása nélkül feltehető.

Definíció. Legyen G egy $A\dot{\cup}F$ színosztályokkal rendelkező egyszerű páros gráf. G páros szomszédsági mátrixa B_G, az a mátrix, amely sorai A-val, oszlopai F-fel vannak azonosítva, továbbá egy $a \in A$-nak megfelelő sor és egy $f \in F$-nek megfelelő oszlop találkozásában 1 szerepl, ha szomszédosak, 0 különben.

Megjegyzés. G (teljes) A_G szomszédsági mátrixában a sorok és oszlopok is a $V(G)$ csúcshalmazzal azonosított. Ha a sorok/oszlopok felsorolásában A elemei megelőzik F elemeit, akkor az A-A, illetve F-F élek hiánya miatt a mátrix bal felső és jobb alsó sarkában 0-k egy nagy blokkja található, míg a jobb felső sarokban B_G szerepel, a bal alsó sarokban pedig B_G^T, a páros szomszédsági mátrix transzponáltja.

$$\begin{pmatrix} 0 & B_G \\ B_G^T & 0 \end{pmatrix}$$

Azaz a páros szomszédsági mátrix csak a szokásos szomszédsági mátrix tömörítése.

A mátrix leírja a G páros gráfot. A G páros gráfra vonatkozó fogalmak átfogalmazhatóak a mátrixok nyelvére. Az alábbiakban egy „szótárat” ismertetünk.

$$\begin{aligned}
B_G \text{ pozíciói} &\equiv\ A \times F \\
B_G \text{ 1-esei} &\equiv\ E(G) \\
|A| = |F| &\equiv B_G \textit{ négyzetes mátrix} \\
\text{M párosítás} &\equiv \forall \textit{ sorban és oszlopban max egy db 1-es van} \\
\text{M teljes párosítás} &\equiv \forall \textit{ sorban és oszlopban pontosan egy db 1-es van} \\
&\equiv \textit{a megfelelő 1-esek egy kifejtési tag tényezői}
\end{aligned}$$

A fentiek alapján, ha G-ben van teljes párosítás, akkor $det B_G$ kifejtésében létezik egy nem 0 tag. Ezt az egyszerű észrevételt a következő állítás foglalja össze.

2. Következmény. $\det B_G \neq 0$ *esetén* $\det B_G$ *kifejtésében létezik nem 0 tag, ami ekvivalens azzal, hogy létezik teljes párosítás G-ben.*

A fordított irány nem igaz. Ehhez vegyünk egyolyan páros gráfot, amelyben két alsó pontnak ugyanaz a szomsédsága és ezzel együtt van teljes párosítás a gráfban (például egy teljes páros gráf, $K_{n,n}$ megfelel). Ekkor B_G-ben lesz két azonos sor, azaz a determináns értéke 0.

Definíció. Az M *permanense*

$$\text{per } M_{n\times n} = \sum_{\pi\in S_n}\prod_{i=1}^{n} M_{i\pi(i)}$$

Észrevétel. (i) $perB_G \neq 0$ esetén G-ben létezik teljes párosítás.

(ii) $perB_G$ a teljes párosítások száma G-ben.

Sajnos ez az észrevétel nem segít algoritmikus problémánk megoldásában: $perB_G$ kiszámítása $\#P$-nehéz.

Definíció. $X_G \in \mathbb{R}\left[x_e : e \in E(G)\right]^{n\times n}$: $\forall e \in E(G)$ esetén B_G e-nek megfelelő 1-esét x_e-vel helyettesítjük.

3. Tétel. *$det(X_G)$ nem az azonosan 0 polinom akkor és csak akkor, ha létezik G-ben teljes párosítás.*

Észrevétel. (i) G-beli teljes párosítások száma megegyezik a $det(X_G)$-ben szereplő különböző monomok számával.

(ii) $det(X_G)$-nek túl hosszú lehet a standard leírása, de hatékonyan kiértékelhető, ha $x_e = \alpha_e$, ahol $\alpha_e \in \mathbb{R}$, (lásd numerikus analízis vagy algebra előadás).

Az előző észrevételen alapul az alábbi algoritmus.

Véletlen algoritmus.
Véletlen helyettesítés: `Minden` e `élre vegyünk egy` $r_e \in \{1,\ldots,N\}$`-t, ahol` r_e `uniform eloszlású valószínűségi változó.`
DET számolás: `Számítsuk ki` $det(X_G)|_{x_e=r_e}$`-t.`
Kiértékelés:
`Ha ez nem` 0`, akkor az output legyen „Létezik teljes párosítás”.`
`Ha ez` 0`, akkor az output legyen „Valószínűleg nem létezik teljes párosítás”.`

3.1. Az algoritmus analízise

Az algoritmusunk tévedhet. De hogyan?

- „Létezik teljes párosítás”: biztosan jó a válasz.
- „Valószínűleg nem létezik teljes párosítás”:
  - ha $det(X_G)$ az azonosan 0 polinom, akkor jó a válasz;
  - ha $det(X_G)$ nem az azonosan 0 polinom, akkor szerencsétlen r_e-ket választottunk, épp $det(X_G)$ gyökeit: az algoritmus téved.

Célunk, hogy a hibázás lehetőségét minél kisebbé tegyük. Érezhető, hogy minél nagyobb az N, annál kisebb a hibázás valószínűsége. Az alábbi lemmára van szükségünk, hogy ezt az érzésünket matematikailag is pontossá tegyük.

4. Tétel (Schwartz-lemma). *Legyen $p(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_k]$ egy nem azonos 0 polinom, és legyenek $r_i \in \{1, \dots, N\}$-k uniform eloszlású független valószínűségi változók, $(1 \leq i \leq k)$. Ekkor*

$$\mathbb{P}(p(r_1, \dots, r_k) = 0) \leq \frac{deg\ p}{N}$$

Bizonyítás. k-ra vonatkozó teljes inducióval bizonyítunk.

$k = 1$ esetén $p \in \mathbb{R}[x]$. Ekkor $|\{r \in \mathbb{R} : p(r) = 0\}| \leq \deg p$, így annak a valószínűsége, hogy egy adott $r \in \{1, \dots, N\}$ épp gyöke a p-nek felülről becsülhető $\frac{\deg p}{N}$-nel (r uniform eloszlású).

Tegyük fel, hogy $k-1$ határozatlan esetén teljesül az állítás. Írjuk fel a k-változós p polinomot a következő alakban:

$$p(x_1, \dots, x_k) = p_\alpha(x_1, \dots, x_{k-1}) \cdot x_k^\alpha + p_{\alpha-1}(x_1, \dots, x_{k-1}) \cdot x_k^{\alpha-1} + \dots + p_0(x_1, \dots, x_{k-1}),$$

ahol $p_\alpha(x_1, \dots, x_{k-1})$ egy nem azonosan 0 polinom. A felírásból következik, hogy $\deg p \geq \deg p_\alpha + \alpha$.

Legyen $R_k = \{(r_1, \dots, r_k) : p(r_1, \dots, r_k) = 0\}$, $R_{k-1} = \{(r_1, \dots, r_k) : p_\alpha(r_1, \dots, r_{k-1}) = 0\}$ és $Q = \{(r_1, \dots, r_k) : (r_1, \dots, r_{k-1}) \notin R_{k-1}, de\ (r_1, \dots, r_k) \in R_k\}$. Könnyen látható, hogy $R_k \subseteq R_{k-1} \cup Q$. Az indukciós feltevésből R_{k-1} valószínűsége becsülhető. Az egy határozatlanú polinomok esete alapján Q valószínúsége becsülhető. Összegezve kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(R_k) \leq \mathbb{P}(R_{k-1}) + \mathbb{P}(Q) \leq \frac{\deg p_\alpha}{N} + \frac{\alpha}{N} \leq \frac{\deg p}{N}.$$

Ezzel beláttuk a tétel állítását. ■

A lemmát alkalmazva a véletlen algoritmusra ($p = det(X_G)$, $\deg p = n(= |A| = |F|)$) kapjuk, hogy az $N = 2n$ választással élve a hibázás valószínűsége legfeljebb $\frac{1}{2}$. A hibázás valószínűsége tovább csökkenthető N értékének növelésével, vagy a fenti paraméterválasztáson alapuló változat többszöri, független ismétlésével.

4. Poliéderes/lineáris programozási módszer +

A következő párosítási problémát vizsgáljuk: Legyen G páros gráf, $c : E(G) \to \mathbb{R}^+$ Keressük a $c(M) = \sum_{e \in M} c(e)$ maximumát, ahol $M \subset E(G)$ a G párosításain fut keresztül.

Az $M \subseteq E(G) = \{e_1, \dots, e_m\}$ párosításhoz tartozó karakterisztikus függvény $\underline{\chi}_M = (v_i) \in \mathbb{R}^m$, ahol $v_i = 1$, ha $e_i \in M$, különben 0. A karakterisztikus vektor komponensei a gráf éleivel vannak azonosítva. $m = |E(G)|$ miatt $\mathbb{R}^{E(G)}$ és $\mathbb{R}^m$ azonosítható. Ezt használjuk: v_i a karakterisztikus vektor i-edik komponense, de egyben az $e_i \in E(G)$ élnek megfelelő komponens is.

Észrevétel. $c(M) = \langle \underline{c}, \underline{\chi}_M \rangle$, ahol $\underline{c} \in \mathbb{R}^{E(G)}$. Így a feladat:

$$\begin{aligned} max\{\langle \underline{c}, \underline{\chi}_M \rangle : M\text{párosítás}\} &= max\{\langle \underline{c}, \underline{x} \rangle : \underline{x} \in \{\underline{\chi}_M : M\text{párosítás}\}\} \\ &= max\{\langle \underline{c}, \underline{x} \rangle : \underline{x} \in conv\{\underline{\chi}_M : M\text{párosítás}\}\} \end{aligned}$$

Az utolsó kifejezésben szereplő geometriai fogalmakat itt is ismertetjük.

Definíció. Legyen $P \subseteq \mathbb{R}^m$ ponthalmaz. Ekkor P *konvex burka*,

$$conv P = \{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underline{p}_i : \lambda_i \geq 0, \sum \lambda_i = 1, \underline{p}_i \in P\}$$

a legszűkebb konvex halmaz, amely P-t tartalmazza.

A konvex burokban összegyűjtött vektorokat a P ponthalmaz elemei konvex kombinációinak nevezzük.

Jelölés. A $conv\{\underline{\chi}_M : M$párosítás$\}$ halmazt jelöljük $MP(G)$-vel.

$MP(G)$ tehát a $\{\chi_M : M$ párosítás$\}$ halmazt bővíti ki a konvex kombinációkkal. Általában a lehetséges megoldások halmazának bővítése kihat a maximalizálási feladatra is. Ebben az esetben ez nem így van. $MP(G)$ konvex, korlátos, zárt halmaz. Egy lineáris függvény $MP(G)$-beli optimumát egy $\underline{\chi}_M$ pontban veszi fel, hiszen

$$\langle \underline{c}, \sum \lambda_i \underline{p}_i \rangle = \sum \lambda_i \langle \underline{c}, \underline{p}_i \rangle \leq \max \langle \underline{c}, \underline{p}_i \rangle.$$

Ezzel az észrevételünket igazoltuk.

A $max\{\langle \underline{c}, \underline{x} \rangle : \underline{x} \in MP(G)\}$ optimalizálási feladat megoldása egy lineáris programozási feladat. Ennek szimplex módszerrel történő megoldásához szükséges $MP(G)$ lineáris egyenlőtlenségekkel való leírása. Az alábbiakban néhany olyan egyenlőtlenséget gyűjtünk össze, amelyek $\{\chi_M : M$párosítás$\}$ elemeire (így $MP(G)$ pontjaira is) teljesülnek.

Definíció. Tekintsük $\underline{x} = (x_e : e \in E(G)) \in \mathbb{R}^{E(G)}$ vektort.

Legyen $\widehat{MP}(G) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^{E(G)} : x_e \geq 0 \; \forall e \in E(G),$ és $\sum_{e:vIe} x_e \leq 1 \; \forall v \in V(G)\}$

Megjegyzés. A definiált két politóp között egy irányú kapcsolat van:

- $MP(G) \subseteq \widehat{MP}(G)$.
- Általában a tartalmazás valódi. Erre példa a $G = C_{2k+1}$ gráf, ugyanis például $\underline{x}$ minden koordinátáját $\frac{1}{2}$-nek véve, a kapott vektor eleme $\widehat{MP}(G)$-nek, viszont nem eleme $MP(G)$-nek ($\sum_{e \in E(G)} x_e = 2{,}2$ hipersík elvágja ezt a vektort $MP(G)$-től).

Célunk belátni, hogy ha G páros, akkor $MP(G) = \widehat{MP}(G)$ Ehhez elég megmutatni, hogy $\widehat{MP}(G)$ csúcsai egészek. Ugyanis $\widehat{MP}(G)$ egész koordinátájú pontjai pontosan $\{\chi_M : M$párosítás$\}$ elemei. $\widehat{MP}(G)$ viszont csúcsai konvex burka, így a másik irányú tartalmazás is adódik. $\widehat{MP}(G)$ minden csúcsát megkapjuk úgy, hogy a politópot leíró egyenlőtlenségek közül kiválasztunk néhányat, amelyek egyenlőségjellel egy egyértelműen megoldható rendszert alkotnak. Az egyértelmű megoldás a tetszőlegesen kiválasztott csúcs. Az egyértelmű megoldás Cramer-szabállyal is felírható. Ekkor a koordináták két determináns hányadosaként adódnak. A deteminánsokban egészek vannak, a nevező értéke pedig nem-nulla. A hányados biztos egész lesz, ha a nevezőben szereplő mátrix determinánsa ± 1. Könnyű látni, hogy bárhogy is döntünk az egyértelműen megoldható egyenletrendszer mátrixa a gráf pont-él-illeszkdési mátrixának részmátrixa lesz. Így célunkat elérjük, ha belátjuk a következő lemmát.

5. Lemma. *Legyen B_G egy G páros gráf pont-él illeszkedési mátrixa. Ekkor B_G minden négyzetes R részmátrixának determinánsa a $\{-1, 0, 1\}$ egy eleme.*

Bizonyítás. Legyen R egy $k \times k$ méretű részmátrix. k-ra vonatkozó teljes indukcióval bizonyítunk. $k = 1$ esetén nyilvánvaló az állítás.

B_G sorai (és így R sorai is) az A és F kategóriák közt oszlanak meg.

1. eset: R valamelyik oszlopában nulla avgy egy 1-es szerepel. Ekkor ezen oszlop szerint fejtsük ki a determinánst. Vagy biztos 0-t kapunk (R-ben csupa 0 oszlop szerepel), vagy az indukciós lépes alapján leszünk készen.

2. eset: R minden oszlopában két 1-es van, ekkor szükségszerűen egy A-beli és egy F-beli. Ekkor az A-beli sorok összege egyenlő az F-beli sorok összegével. A determináns értéke emiatt 0. ■

A lemmában szereplő tulajdonsággal már korábban is találkoztunk más mátrixok esetén.

Definíció. Egy M mátrix *totálisan unimoduláris*, ha minden négyzetes aldeterminánsa 0 vagy ± 1.

Végül összefoglaljuk az eredményünket.

6. Következmény. *Ha G páros, akkor*

a) B_G *totálisan unimoduláris,*

b) $MP(G) = \widehat{MP}(G)$.

Ez a következmény vezet el a következő algoritmushoz:

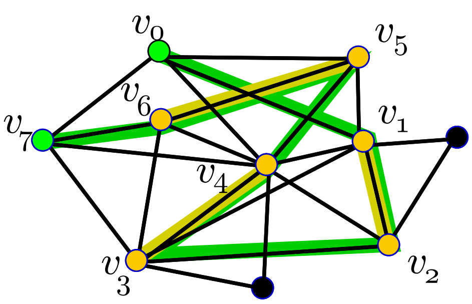
Lineáris programozáson alapuló algoritmus:

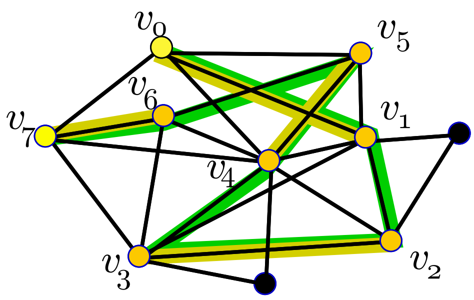
1) `Írjuk fel az` $\widehat{MP}(G)$`-t leíró LP feladatot.`
2) `Oldjuk meg szimplex módszerrel.`
`// A megoldás garantáltan egész koordinátájú lesz, így egy párosítást`
`// ír le.`
3) `A megoldásból kiolvasunk egy párosítást. Ez az algoritmus outputja.`

5. Javító utas algoritmusok

Definíció. Legyen G gráf M párosítás G-ben, $P : v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k$ egy út. P út javító út M-re nézve, ha v_0 és v_k nem párosítottak, k páratlan és a páros sokadik élek elemei M-nek.

Példa. A sárga párosításra nézve a zöld út javító út. A második ábrán a javított párosítás látható:





A P javító út segítségével kapott $M' = (M \setminus E(P)) \cup (E(P) \setminus M) = M \triangle E(P)$ élhalmaz párosítás. Azaz M'-be P mentén pontosan azon P-beli éleket rakjuk, melyek eredetileg nem voltak M-ben, P-n kívül a párosítás nem változik. Könnyen látható, hogy így mindig eggyel nagyobb élszámú párosítást kapunk. Ezt nevezzük M javító utas javításának.

Ezzel sémát kaptunk nagy párosításokat kereső algoritmusokra, amiket javító utas algoritmusoknak nevezünk. Ezek általános vázlata:

Javító utas algoritmusok sémája:

Adott egy G gráf és benne egy M párosítás
AMÍG találunk M-re vonatkozó javító utat
  [(Javító utas növelés) M-et lecseréljük $M \triangle E(P)$-re.]
(Elakadás) Az aktuális párosítás az output
// Ekkor nem létezik M-re vonatkozó javító út.

Megjegyzés. Itt sincs ciklizálási veszély, mert bármely javítás garantáltan növeli a párosítás élszámát, ezért az algoritmus szükségszerűen leáll.

Megjegyzés. Az 1 hosszú javító út menti javítás a mohó javítás.

Azaz a javító utas algoritmusok a mohó algoritmus kiterjesztései. A mohó algoritmus elkadására korábban láttunk példát. Könnyű ellenőrizni, hogy azon futva a javító utas algoritmusok megtalálják a teljes párosítást. Ez nem véletlen.

7. Tétel (Berge-tétel). *G gráf, M párosítás. Ha M nem optimális, akkor létezik rá javító út. Vagyis elakadás esetén az aktuális párosítás optimális.*

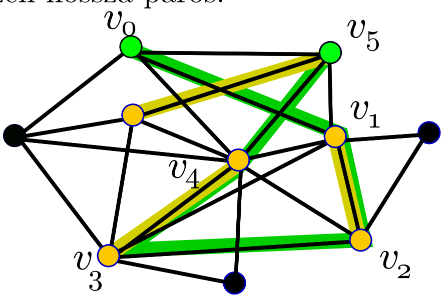
Megjegyzés. A javító utak hatékony keresése nem egyszerű! Keresésünknek olyanak kell lenni, ha sikertelen, akkor ne is legyen javító út. Egy gráfban az utak teljes sokasága hatalmas lehet. Így ennek végignézése általában túl sokáig tart.

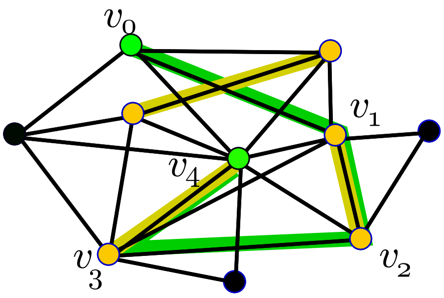
A következőkben a javító út keresésre mutatunk egy mohó változatot.

6. Mohó javító út keresés

Definíció. P javító út kezdemény, ha $P: v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k$ út, és $v_0 \notin V(M)$, valamint a páros indexű élek elemei M-nek.

Példa. Egy öt hosszú javító út kezdemény, ami nem javító út, mert v_5 párosított. A második ábrán egy négy hosszú javító út kezdemény, ami nem lehet javító út, hiszen hossza páros.





Javító út kezdeményeket keresünk és ezeket párhuzamosan növeljük annak reményében, hogy javító úttá terjesztjük ki őket. Keresésünk megvalósítása egy címkézés lesz: A csúcsokra címkéket helyezünk, aminek jelentése: oda vezető javító út kezdeményt találtunk.

Ezen címkék egy kicsit több információt tartalmaznak mint az odavezető javító út kezdemény megtalálásának ténye. Ha a megtalált javító út kezdeménye páros hosszú akkor a csúcs `külső` címkét kap, ha pedig páratlan hosszú, akkor `belső` címkét kap.

Legyen C a címkézett csúcsok halmaza és K a külső, B a belső címkézett pontok halmaza. Nyilván $C = K\dot{\cup}B$.

A mohóság abban nyilvánul meg, hogy a címkehalmaz folyamatosan bővül, és nincs felülírás. Azaz, ha azt tapasztaljuk, hogy már címkézett pontba egy eddig nem látott javító út kezdemény halad, akkor ezt elvetjük („későn vettük észre”). Az eredeti javító út kezdemény (amire a címkézést korábban alapítottuk) lesz az amit folytatni próbálunk.

Kiinduló címkehalmazt választunk (ezek pontok lesznek, amikbe egy 0 hosszú javító út kezdeményt találtunk, azaz $\overline{V}(M)$ egy részhalmaza) és a címkézést az alábbi módon bővítjük:

Mohó javító út kereső algoritmus:

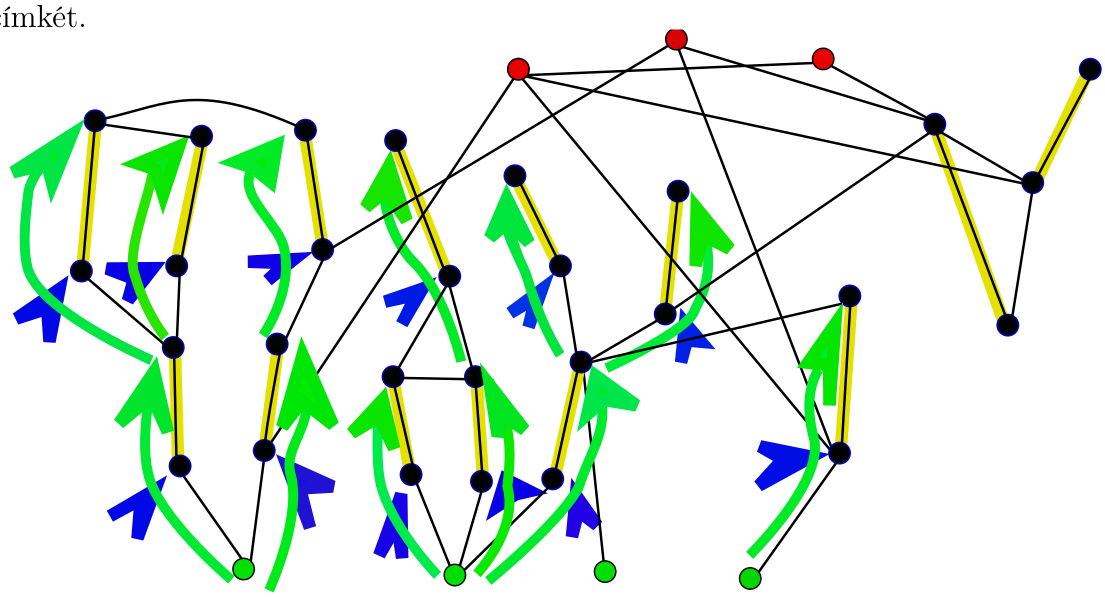
(Inicializálás) Kiindulunk $\overline{V}(M)$ egy R részhalmazából.
   A kezdeti $K = R$,
   A kezdeti $B = \emptyset$,
   // Így a kezdeti $C = K = R$.
AMÍG találunk $k \in K$ csúcsot és s címkézetlen szomszédját
   [Ha s nem párosított csúcs, akkor
   (Sikeres keresés) a k-ba vezető javító út kezdemény s-be
      meghosszabbítva egy javító utat kapunk.
   Ha s párosított csúcs, akkor
   (Mohó címkenövelés) legyen s' az M-beli párja.
      $K \leftarrow K \cup \{s'\}$,
      $B \leftarrow B \cup \{s\}$,
      $C \leftarrow C \cup \{s, s'\}$.]
(Elakadás) Ha a fenti ciklusból nem 'sikeres kereséssel'
   jöttünk ki, akkor 'sikertelen kereséssel' állunk le.
// Sikertelen keresés esetén minden külső pont
// összes szomszédja címkézett.

A sikeres keresés esete „tiszta”. A sikertelen keresés esetén azonban célszerű vizualizálni mi is történt.

A címkenövelések minden címkekiosztásához egy „felelős” rendelhető: az s csúcs k miatt kapja címkéjét, s' pedig s miatt. A megfelelő élek mentén terjed ki a címke. Így a címketerjedést/keresést gyökeres erdő írja le. A gyökerek az inicializálás során kiválasztott R pontjai. A címkék további terjedése dupla ághajtásokkal történik. A kettő hosszú ágak belső pontjai kapják a belső címkét. A végső pontjai a külső címkét kapott pontok, ahonnan a keresés/címkekiosztás továbbléphet.

Példa. A sárga élek alkotják párosításunkat. A zöld csúcsok azok a párosítatlan csúcsok, amelyek kiinduláskor külső címkét kaptak (R elemei). A piros csúcsok azok a párosítatlan csúcsok, amelyek kiinduláskor nem lettek megcímkézve ($\overline{V}(M)-$

R, a célcsúcsok, amiket szeretnénk keresésünkkel elérni). A zöld nyilak a dupla ághajtások (a külső címke terjedése). Közben a kék nyíl mutatja a kiosztott belső címkét.

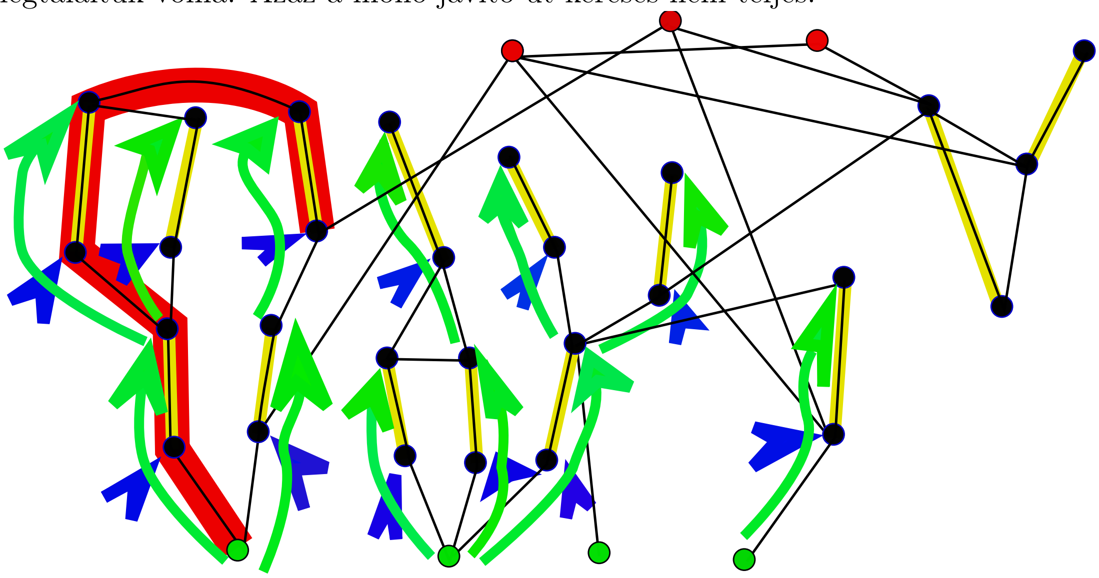


Észrevétel. Kezdetben a címkezett pontok nem párosított csúcsok és mind külső címkét kap, majd egyszerre két párosított csúcs kap címkét, egyik külsőt, másik belsőt. Ennek két következményét emeljük ki.

(1) s-et úgy választottuk, hogy ne legyen címkezett. Így automatikusan teljesül, hogy s' se címkézett. Azaz korábbi ígéretünk (nincs újracímkézés) teljesül.

(2) A címkézés minden címkekiterjesztése után $|K| - |B| = |R|$. Valóban: A kezdetben ez teljesült, majd mindig eggyel növeltük $|K|$-t és $|B|$-t is, azaz különbségük azonos marad.

Példa. Előfordulhat, hogy a keresés belső pontként ér el egy x pontot és ekkor a keresés x-nek az x' párja felé megy, és x más szomszédja felé nem. Egy másik javító út kezdemény viszont külső pontként érné el x-et. Az ábrán egy ilyen rossz fázisban elért javító út kezdeményt emel ki a piros út. Ezt be is fejezhetnénk javító úttá, ha megtaláltuk volna. Azaz a mohó javíto út keresés nem teljes.



8. Tétel (Kőnig Dénes - Egerváry Jenő / Magyar módszer). *Ha G páros gráf (A alsó és F felső színosztályokkal), M párosítás. Legyen $R = A \cap \overline{V}(M)$. Ekkor ha a mohó javító út kereső algoritmus sikertelen kereséssel ér véget, akkor M optimális, azaz nincs rá vonatkozó javító út.*

Bizonyítás. Kezdetben $K \subseteq A$, $B \subseteq F$. Címkekiosztásnál külső címkét egy belső címkéjű pont szomszédja kap és belső címkét egy külső címkéjű pont szomszédja kap. Így a fenti tulajdonság öröklődik. Mindig (így az algoritmus végén is) $K \subseteq A$, $B \subseteq F$. Azaz a külső és alsó kategóriák ugyanazok. Hasonlóan a belső és felső kategóriák ugyanazok.

Feltevésünk szerint sikertelen kereséssel állunk le. Így a külső pontok szomszédai mind címkézettek.

Jelölés. X szomszédsága: $N(X) = \{s \in V,\ s$ szomszédos valamely X-belivel$\}$.

Tehát az algoritmus végén $N(K) \subset C$.

A tétel nagyon fontos, két bizonyítást is közlünk rá.

I. Bizonyítás: Néhány általános megjegyzéssel kezdünk.

Definíció. Legyen $S \subset A$. Legyen $\epsilon(S) = |S| - |N(S)|$. Azaz S elemszámának többlete szomszédainak számához képest (ami persze lehet negatív is).

Definíció. $\delta_A(P) = |A| - |P|$ (nem párosított pontok száma A-ban).

Észrevétel. Legyen S egy tetszőleges alsó pontokat tartalmazó halmaz, P egy párosítás. Ekkor

$$\delta_A(P) \geq \epsilon(S).$$

Tetszőleges P párosítás esetén S-beli csúcsok párjai $N(S)$-ból kerülnek ki. Így legalább $|S| - |N(S)| = \epsilon(S)$ csúcs párosítatlan marad A-ban (már csak S-et figyelembe véve is). Ezek után az észrevételbeli egyeblőtlenség nyilvánvaló.

Persze az észrevétel csak akkor nem semmitmondó, ha $\epsilon(S) > 0$.

9. Következmény. *Legyen S alsó pontok egy halmaza, amelyre $\epsilon(S) > 0$. Ekkor G-ben nincs teljes párosítás.*

A fenti tulajdonságú S halmazokat hasznos külön névvel ellátni.

Definíció. Alsó pontok egy S halmaza *Kőnig-akadály*, ha $\epsilon(S) > 0$, azaz S szomszédainak száma kisebb mint elemeinek száma.

10. Következmény. *Legyen S alsó pontok egy halmaza és P egy párosítás. Ha $\epsilon(S) = \delta_A(P)$, akkor P egy optimális párosítás.*

A fenti esetben azt mondjuk, hogy S egy bizonyító alsó-Kőnig-halmaz P optimalitására.

Térjünk vissza a G páros gráfunkhoz, amelyben az M párosítással a magyar módszert futtatva sikertelen keresést folytattunk. Tudjuk, hogy leálláskor $N(K) \subset C$. Páros gráfban azt is tudjuk, hogy $K \subset A$, így $N(K) \subset F$. Azaz $N(K) \subset C \cap F = B$. Igazából belső címkét csak úgy kaphat egy csúcs, hogy egy már külső címkéjű csúcs szomszédja. Azaz $N(K) = B$.

Tehát

$$\epsilon(K) = |K| - |N(K)| = |K| - |B| = |R| = |A \cap \overline{V}(M)| = \delta_A(M).$$

Azaz K egy bizonyító alsó-Kőnig-halmaz M optimalitására.

II. Bizonyítás: Ismét néhány általános megjegyzéssel kezdünk.

Emlékeztető. Egy L csúcshalmaz lefogó ponthalmaz, ha minden él legalább egy L-beli pontra illeszkedik.

Egy a fogalmat megvilágító „mese”: Legyen a gráf egy múzeum tervrajza, amiben képek vannak a folyosókon (éleken). Ezeket őrökkel őriztetjük, akik csúcspontokban ülhetnek, ahol az ott összefutó összes folyosót ellenőrzik. Minél kevesebb őrrel akarjuk az összes élt/folyosót ellenőrizni.

Észrevétel. Ha L lefogó ponthalmaz, és P párosítás: $|L| \geq |P|$.

A „mese” szerepkiosztását használó magyarázat: P össze nem futó folyosórendszer, így mindegyik eleme külön őrt követel. Azaz tetszőleges jó őrelhelyezésben legalább $|P|$ darab őr szerepel.

Kiemeljük két fontos következményét az észrevételnek:

11. Következmény. *Legyen L egy lefogó ponthalmaz és M egy párosítás. Ha $|L| = |P|$, akkor P a lehető legnagyobb párosítás G-ben és L a lehető legkisebb lefogó ponthalmaz G-ben.*

A következményben szereplő L, P pár esetén azt mondjuk, hogy L egy bizonyító lefogó ponthalmaz P optimalitására és P egy bizonyító párosítás L optimalitására.

Most térjünk vissza G páros gráfunkhoz benne egy M párosítással, ahol a magyar módszer sikertelen kereséssel állt le.

Az M-beli élek két csoportra, címkézett és címkézetlen élekre osztható. (A címkézett élek mindkét végpontja, a címkézetteknek egyik végpontja sem címkézett.) Jelöljük a címkézett felső végpontok halmazát L_C-vel, a címkézetlen alsó végpontok halmazát $L_{\overline{C}}$-vel. Vegyük észre, hogy $L_C = B$. Legyen $L = L_C \cup L_{\overline{C}}$. Ekkor $|L| = |M|$, hiszen minden M-beli él egy csúccsal járul hozzá L-hez, amit ezek a hozzájárulások adnak ki.

Észrevétel. L lefogó ponthalmaz G-ben.

Valóban: Legyen $e = af$ egy tetszőleges él ($a \in A, f \in F$).

(1) Ha f címkézett, akkor $f \in B$ és így $f \in L_C$.

(2) Ha f nem címkézett, akkor a sem címkézett (hiszen, ha a címkézett, azaz külső pont lenne, akkor szomszédja nem lehetne címkézetlen a címkekiosztás elakadásánál). Speciálisan $a \notin C_0$. Azaz a párosított alsó pont címkézetlen M-beli élen: $a \in L_{\overline{C}}$.

Tehát $L = L_C \cup L_{\overline{C}}$ valóban lefogó ponthalmaz.

Az észrevétel azt adja, hogy az L, M pár olyan, hogy L bizonyítja M optimalitását (természetesen M is bizonyítja L optimalitását). ∎

Megjegyzés. Mindkét bizonyítás többet állít mint az M optimalitása. Az is adódott, hogy M optimalitására van bizonyító lefogó ponthalmaz és bizonyító alsó-Kőnig-halmaz. Ezek konstruktív módon adódnak a magyar módszer melléktermékeként.

Megjegyzés. Az is adódott, hogy a második bizonyításban kiolvasott L lefogó halmaz optimális. Azaz a magyar módszer alkalmazható a legkisebb méretű lefogó ponthalmaz meghatározására páros gráfokban.

Az előző tétel páros gráfokra működik csak. Mire az általánosabb, nem páros gráfokra is hasonló tételek kialakultak, majdnem 10 év telt el. A következő részben az általános esetben vizsgáljuk a problémát, azaz nem szükségszerűen páros gráfokban keresünk javító utat egy adott párosításra nézve.

7. Edmonds-algoritmus

A magyar módszerben az alsó párosítatlan pontokból indítottuk a keresésünket. Általában nincs ilyen fogalmunk, mint „alsó pontok”. Most kiindulásnak $K = \overline{V}(M)$, $B = \emptyset$ címkézést választjuk. Azaz az összes párosítatlan pontot 0 hosszú javító út kezdeményeknek tekintjük és alkalmazzuk a mohó címkenövelő eljárást elakadásig. Ez biztosan elakad, hiszen a növelés mohón történik és kezdetben minden lehetséges javító út végpont „lehetséges javító út kezdőpont” címkét kap.

Edmonds-algoritmus:

(Inicializálás) Legyen $R = \overline{V}(M)$.
   A kezdeti $K = R$,
   A kezdeti $B = \emptyset$,
   //Így a kezdeti $C = K = R$.
(Címkenövelés) Mohó címkenövelés elakadásig
// Ekkor a külső csúcsok mindegyik szomszédja címkézett. Kialakul egy
// F kereső erdő. A kereső erdő mindegyik komponense egy-egy R-beli
// pontban gyökerezett.
AMÍG találunk $k, k' \in K$ csúcsot, amelyek egy e él mentén szomszédosak
// Legyen r és r' azon R-beli elemek, amelyekből induló/amelyekben
// gyökerező keresések megcímkézik k-t és k'-t.
   [Ha $r \neq r'$, akkor
   (Sikeres keresés) a k-ba vezető javító út kezdemény után e-n
      keresztül k-ba lépve, majd bejárva az ehhez vezető javító
      út kezdeményt fordítva r és r' közötti javító utat találtunk.
   Ha $r = r'$, akkor
   (Edmonds-eset) $\star$ // Később tárgyaljuk.]
(Elakadás) Ha a fenti ciklusból nem 'Sikeres kereséssel'
   jöttünk ki, akkor 'Sikertelen kereséssel' állunk le.

Mielőtt az „Edmonds-esetet” részletesen tárgyaljuk néhány fogalmat kialakítunk. Legyen P az r-ből k-ba vezető javító út kezdemény, ami a címkézéséért felel. Hasonlóan legyen P' az $r(= r')$-ből k'-be vezető javító út kezdemény, ami a címkézéséért felel. Legyen a_e az elágazás pontja, azaz az utolsó csúcs, amíg a két út közösen halad.

Észrevétel. a_e-ben a kereső erdő szétágazik vagy P és P' közül valamelyik út leáll (azaz $a_e \in \{k, k'\}$). Mindkét esetben a_e egy külső pont a felépített kereső erdőben.

P-n a_e-től k-ig, illetve P'-n a_e-től k'-ig dupla ághajtásokkal ért el a keresés. Azaz az odavezető két út mindegyike páros hosszú, amit e egy páratlan körré, C_e fűz össze.

r komponense az F kereső erdőben egy r gyökerű F_r kereső fa. Ebben e nem egy él. Így F_r-hez hozzáadva az e élt egyetlen kör keletkezik. Ezt írtuk le előbb.

Észrevétel. C_e összes pontjába vezet páros hosszú javító út kezdemény is.

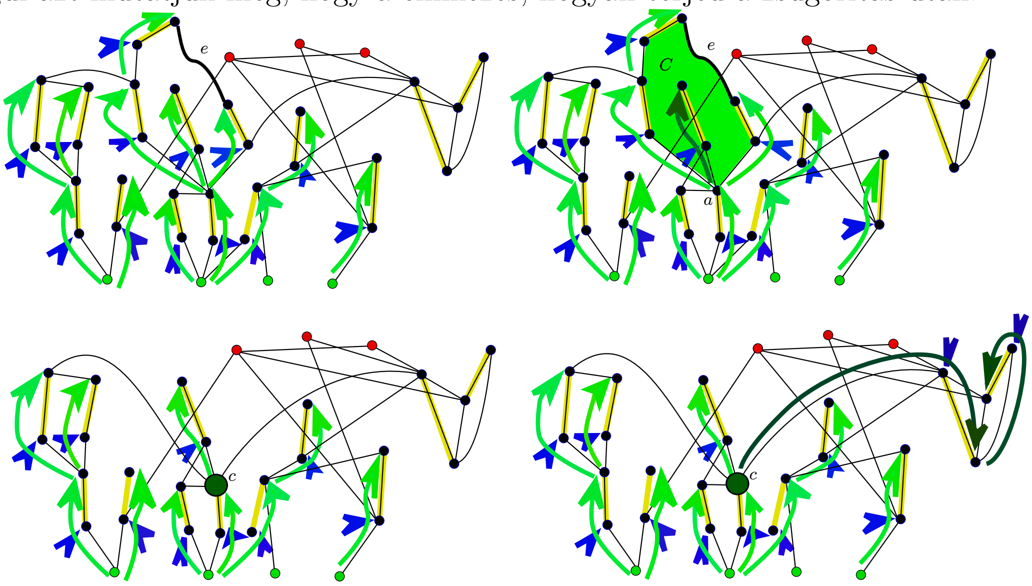
Persze C_e összes pontjába a_e-től különböző pontjába vezet páratlan hosszú javító út kezdemény is. Számunkra azonban a páros hosszúak értékesebbek. Ezek azok, amelyek olyan fázisban érik el a csúcsot, hogy a keresés nem determinált/szétágazhat.

Definíció. G-ben a C_e kör zsugorítása (a kör ponthalmazát egy pontba húzzuk össze) a $\widetilde{G}$ gráfhoz vezet. Formálisan: $V(\widetilde{G}) = V(G) \setminus V(C_e) \dot{\cup} \{c\}$ (c egy új pont, ami a kör összes csúcsát reprezentálja). $E(\widetilde{G}) = E(G) \setminus \{C_e\text{-n belüli élek}\}$. $I(\widetilde{G})$ természetes módon definiált.

$\widetilde{M} = M \cap E(\widetilde{G})$.

$\widetilde{F}$: a C_e-n kívüli dupla ághajtásokkal felépülő kereső erdő.

Példa. Az első ábra a keresést és az e élt mutatja. A második ábra a C kört és annak a pontját mutatja. A harmadik ábrán a zsugorítás utáni helyzet látható. Végül azt mutatjuk meg, hogy a címkézés, hogyan terjed a zsugorítás után.



12. Lemma. *(i) $\widetilde{M}$ párosítás $\widetilde{G}$-ben*

(ii) $\widetilde{F}$ keresőerdő $\widetilde{M}$-ra

(iii) c külső pont $\widetilde{F}$-ben.

A lemma egyszerű, nem bizonyítjuk, csak egy megjegyzést teszünk. Legyen C egy kör G-ben és M egy párosítás. M egy $e = xy$ élét C tüskéjének nevezzük, ha x és y közül az egyik C-re, a másik C-n kívülre esik. Zsugorításnál a C_e körünk olyan, hogy 1 vagy 0 tüskéje van. Könnyen látható, hogy két vagy több tüskés körök zsugorítása után a megmaradt M-beli élek nam alkotnak párosítást. A C_e kör tüskéinek száma attól függ, hogy a_e gyökér-e vagy nem. Ha a_e gyökér, akkor C_e-nek nincs tüskéje. Ha a_e nem gyökér, akkor a keresés egy párosított élen keresztül érte el, amelt körünk egyetlen tüskéjét alkotja. A C_e kör a_e-től különböző csúcsait M párosítja.

Ezek után már tárgyalhatjuk az Edmonds-algoritmus kihagyott esetét.

`(Edmonds-eset) A megfelelő` e `él megtalálása után határozzuk meg a` C_e `kört. Zsugorítsuk ezt. A zsugorítás egy` $\widetilde{G}$ `gráfhoz,` $\widetilde{M}$ `párosításhoz és az erre vonatkozó` $\widetilde{F}$ `kereső erdőhöz vezet. Ezzel térjünk vissza a (Címkenövelés) lépéshez`

A zsugorított kört reprezentáló csúcs külső pont. A körre estek eredetileg belső címkét kapott csúcsok is. Tehát a zsugorítás egy címke felülírás. Itt lépünk ki a korábbi mohó keresés kereteiből.

Hol is tartunk? Hogyan néz ki az eddig leírt lépések végrehajtása? Az algoritmusunk „generikus futása" során egy

$$(G, M) = (G_0, M_0) \to (G_1, M_1) \to \ldots \to (G_\ell, M_\ell)$$

zsugorítás sorozatot hajt végre, majd sikeres vagy sikertelen kereséssel leáll. A sikeres keresés esete sem világos. A látható javító út egy M_ℓ-re vonatkozó javító út G_ℓ-ben. Nekünk egy M-re vonatkozó javító út kell G-ben.

A teljességhez szükségesek a következők.

13. Tétel-hiány. *Legyen P javító út M_ℓ-re G_ℓ-ben. Ekkor létezik javító út M-re G-ben.*

Ez persze adódik abból, ha egy zsugorítás esetén a javító utat vissza tudjuk vetíteni. (A tételt a lemma ℓ-szeres iterált alkalmazása adja.)

14. Lemma-hiány. *Legyen P javító út $\widetilde{M}$-ra $\widetilde{G}$-ben. Ekkor létezik javító út M-re G-ben.*

15. Tétel-hiány. *Ha az Edmonds-algoritmus „Sikertelen kereséssel" áll le, akkor M optimális, azaz nem létezik rá vonatkozó javító út.*

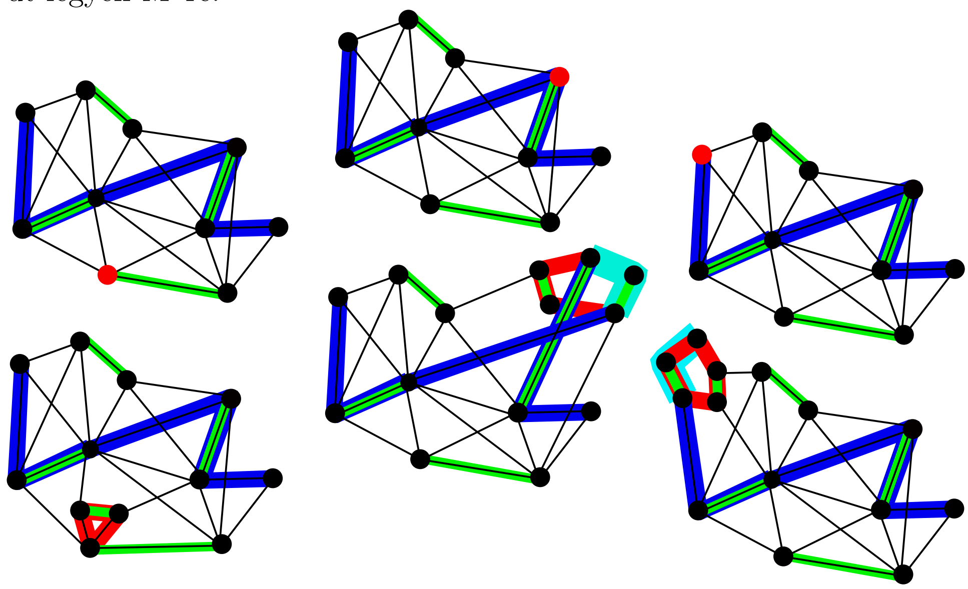
Igazából a hiányzó lemma konstruktív bizonyítása szükséges. Azaz a lemma által garantált javító utat meg is kell konstruálnunk (és a programozónak ezt implementálni is kell az Edmonds-algoritmus megvalósításakor).

16. Lemma. *Adott G gráf egy M párosítással. Legyen C egy páratlan kör a gráfban, amelynek csúcsait egy a csúcsot eltekintve $M \cap E(C)$ élei teljesen párosítanak. Legyen $\widetilde{G}$ és $\widetilde{M}$ a C kör zsugorításával kapott gráf és benne a zsugorított párosítás. A zsugorítás során az a csúcs maradjon meg és reprezentálja a C kört.*

Tegyük fel, hogy P javító út $\widetilde{M}$-ra $\widetilde{G}$-ben. Ekkor létezik javító út M-re G-ben.

Bizonyítás. Három esetet vizsgálunk.
1. eset: *Az a csúcs nincs rajta P-n.* Ekkor könnyű látni, hogy P egy javító út G-ben (M-re).
2. eset: *Az a csúcs a P út egy belső pontja.* Ekkor a két részre vágja a P utat: P_1 és P_2 ($\widetilde{G}$-ben). a-ban egy $\widetilde{M}$-beli és egy nem párosított él találkozik. Feltehető, hogy P_1 a-ra illeszkedő éle $\widetilde{M}$-beli. a-ra mint P_1 utolsó, P_2 első csúcsa hivatkozunk.

$E(P_1)$ és $E(P_2)$ a G gráfban is egy-egy út élhalmaza lesznek: $\widehat{P}_1$ és $\widehat{P}_2$. A különbség, hogy az a csúcs nem szükségszerűen végpontjuk. Az eredeti a végpont az egész kört reprezentáló csúcs volt. G-ben ez a csúcs C valamelyik csúcsa. Illetve tudjuk, hogy $\widehat{P}_1$ utolsó éle M-beli, utolsó csúcsa C-re esik. Ez csak úgy lehet, ha utolsó csúcsa a (az egyetlen csúcs, amely C-n kívüli csúccsal lehet (és ebben az esetben van is) párosítva). Legyen a' a $\widehat{P}_2$ út első (C-re eső) csúcsa. Feltesszük, hogy $a \neq a'$ ($a = a'$ esetében lényegében az előző eset érvényes). C-n két a-t és a'-t összekötő ív van. Ezek egyike úgy fűzi össze $\widetilde{P}_1$ és $\widetilde{P}_2$ utakat egy $\widetilde{P}$ úttá, hogy az javító út legyen M-re.



3. eset: *Az a csúcs a P út egyik végpontja.* $E(P)$ a G gráfban is egy-egy út élhalmaza lesznek: $\widehat{P}_0$. A különbség, hogy az a csúcs nem szükségszerűen végpontja. Az eredeti a végpont az egész kört reprezentáló csúcs volt. G-ben ez a csúcs C valamelyik csúcsa, legyen ez a'. Illetve tudjuk, hogy P a végpontja nem párosított. Ez csak úgy lehet, ha a párosítatlan csúcs G-ben (a csak C-n kívüli csúccsal lehet párosítva (és ebben az esetben ez a lehetőség nem valósulhat meg). Feltesszük, hogy $a \neq a'$ ($a = a'$ esetében lényegében az első eset érvényes). C-n két a-t és a'-t összekötő ív van. Ezek egyike úgy terjeszti ki $\widetilde{P}_0$-t egy $\widetilde{P}$ úttá, hogy az javító út legyen M-re. ■

Ezek után befejezhetjük az Edmonds algoritmus leírását a következő rövid kiegészítés hozzáadásával:

`(Sikeres keresés lezárása) Ha sikeres kereséssel léptünk ki az algoritmus fő vázából, akkor találtunk egy` P `javító utat egy` ℓ`-szeresen zsugorított gráfban. A fenti lemma` ℓ`-szeres alkalmazásával vetítsük ezt vissza az eredeti gráfba.`
`Az így kapott javító út lesz algoritmusunk outputja.`

A helyességet bizonyító hiányzó részhez néhány előzetes definíciót vezetünk be és megjegyzést teszünk.

Definíció. Legyen $R \subset V(G)$. Ekkor

$$\beta(R) = c_1(G - R) - |R|,$$

ahol c_1 a páratlan pontszámú komponensek számát adja meg egy gráfra. Ez az R ponthalmaz Berge—Tutte-paramétere.

Azaz a ponthalmaz β-értéke megadja milyen többlettel rendelkeznek a ponthalmaz elhagyásával keletkező páratlan pontszámú komponensek az elhagyott pontokkal szemben.

A paraméter azért fontos, mert tetszőleges P párosításra teljesül a következő: $G - R$ minden páratlan pontszámú komponensében lesz legalább egy csúcs, amit P a komponensen belül nem párosíthat. Ezek lehetnek még P által párosítva, de párjuk csak R-ből kerülhet ki. Ha a fenti többlet pozitív, akkor legalább annyi párosítalan csúcsunk lesz. Általában tetszőleges $R \subset V(G)$ és P párosítás esetén

$$\beta(R) \leq \delta(P),$$

ahol δ a párosításhoz a párosítatlan csúcsok számát rendeli.

Ez az összefüggés két nagyon fontos észrevételhez vezet.

Definíció. $T \subset V(G)$ csúcshalmazt Tutte-akadálynak nevezzük, ha $\beta(T) > 0$.

Észrevétel. Ha G-ben van Tutte-akadály, akkor nem lehet teljes párosítása.

Észrevétel. Ha $R \subset V(G)$ és P párosítás olyan, hogy

$$\beta(R) = \delta(P),$$

akkor P optimális párosítás. Az ilyen párokat Berge-pároknak nevezzük. A benne szereplő csúcshalmaz Berge-bizonyíték P optimalitására.

Mielőtt az Edmonds-algoritmus korrektségét garantáló tételt kimondjuk jelöléseket vezetünk be. Az algoritmus futása során egy

$$(G, M) = (G_0, M_0) \to (G_1, M_1) \to \ldots \to (G_\ell, M_\ell)$$

zsugorítás-soroazat történjen. G_i-ben egy M_i-re vonatkozó kereső erdő épül fel, amelyben B_i a belső és K_i a külső csúcsok halmaza.

Megjegyezzük, hogy K_{i+1} csúcshalmaz van egy csúcs, ami nem szerepel G_i-ben: az éppen zsugorított kört reprezentáló csúcs egy új csúcs. B_{i+1} azonban G_i-ben is „ott van”. Például B_ℓ mindegyik G_i gráfnak egy csúcshalmaza.

17. Tétel. *Sikertelen keresés esetén mindegyik G_i-ben B_ℓ, M_i egy Berge-pár.*

A tétel nyilvánvalóan adja, hogy M_i optimális G_i-ben, azaz $i = 0$ esetén kapjuk az Edmonds-algoritmus korrektségéhez szükséges állítást.

Bizonyítás. A bizonyítandó egy állítás-sorozat. Ezt $i = \ell, \ell - 1, \ell - 2, \ldots, 2, 1, 0$ sorrendben igazoljuk teljes indukcióval.

$i = \ell$ esetén azt kell észrevennünk, hogy $G_\ell - B_\ell$-ben K_ℓ elemei izolált csúcsok. Valóban: Köztük nem mehet él mert vagy sikeres lenne a keresés vagy további zsugorítás történne. K_ℓ csúcsaiból csak B_ℓ-hez vezet él, hiszen a címkekiterjesztés elakadásig történt. Így speciálisan $c_1(G_\ell - B_\ell) \geq |K_\ell|$, továbbá

$$\beta(B_\ell) = c_1(G_\ell - B_\ell) - |B_\ell| \geq |K_\ell| - |B_\ell| = \delta(M_\ell).$$

Az indukciós lépéshez azt kell észrevenni, hogy a $G_{i+1} \to G_i$ ugrásban az összezsugorodott kör, c_{i+1} a K_{i+1} külső ponthalmaz egy eleme, azaz egy $G_{i+1} - B_\ell$-beli csúcs egy páratlan körré „fújodik fel”. Ez csak egyetlen komponensre hat. Azaz $G_i - B_\ell$ komponensei egy kivételével megegyeznek $G_{i+1} - B_\ell$ komponenseivel egy kivételével. $G_i - B_\ell$ kivételes koponense $G_{i+1} - B_\ell$ kivételes (a c_{i_1} csúcsot tartalmazó) komponenséből keletkezik. Az új komponens pontszámának paritása megegyezik a felfújodott komponens pontszámának paritásával (egy csúcsot helyettesítettünk páratlan sokkal). Speciálisan $c_1(G_i - B_\ell) = c_1(G_{i+1} - B_\ell)$. Azaz B_ℓ a G_i gráfban felvett β paramétere (az indukciós feltevést használva)

$$c_1(G_i - B_\ell) - |B_\ell| = c_1(G_{i+1} - B_\ell) - |B_\ell| = \delta(M_{i+1}).$$

A bizonyítás befejezéséhez azt kell észrevenni, hogy $\delta(M_i) = |V(G_i)| - 2|M_i|$ az algoritmus futása során nem változik. Valóban, egy $2k+1$ hosszú kör zsugorítása a csúcsok számát $2k$-val, a párosított élek számát k-val csökkenti. Azaz $\delta(M_{i+1}) = \delta(M_i)$. ■

A fenti analízis közvetlenül adja a következő két tételt.

18. Tétel (Tutte-tétel, 1947). *Egy gráfban akkor és csak akkor van teljes párosítás, ha nem tartalmaz Tutte-akadályt.*

19. Tétel (Berge-formula, 1958). *Legyen G egy tetszőleges gráf. Ekkor*

$$\max\{\beta(T) : \ T \subset V(G)\} = \min\{\delta(P) : \ P \textit{ párosítás}\}.$$

A Tutte-tétel ekvivalenciájának egyik iránya, illetve a Berge-fomulában az egyik oldal nem-kisebb volta nyilvánvaló, nem kíván a fogalmak ismereténél és „józan paraszti észnél” többet. Ezen „fél állítások” felismerése és indoklása teszteli a hallgató megértésének mélységét.

A Tutte-tétel szokásos alkalmazása a következő tétel. Petersen tételét több mint egy félévszázaddal a párosítások elméletének kialalkulása előtt közölte. Bizonyítása nem alapult korábbi gráfelméleti vizsgálatokon.

20. Tétel (Petersen-tétel, 1891). *Egy kétszeresen élösszefüggő, 3-reguláris gráfban van teljes párosítás.*

8. Párosítási struktúra-tételek +

Az alábbiakban egy tetszőleges G gráf $V(G)$ ponthalmazának csak G-től függő három diszjunkt halmazra való felosztását írjuk le. A három osztály jelentősége a későbbiekből lesz világos.

Definíció. Legyen

$$D_G = \{x \in V(G) : \ G\text{-ben van } x\text{-et elkerülő optimális párosítás}\},$$

$$A_G = N(D_G) = \ D_G \text{ szomszédainak halmaza,}$$
$$C_G = V(G) - (D_G \cup A_G).$$

Legyen G egy gráf egy M optimális/maximális elemszámú párosítással. Futassuk az Edmonds-algoritmust, amely sikertelen kereséssel áll le: Egy — esetleg G-ből többszörös zsugorítással kapott — gráfban az aktuális külső pontok K halmazában nincs él, továbbá K-ból nem vezet él címkézetlen csúcsokhoz (azaz $V_{\text{aktuális}} - (K \cup B)$-hez, ahol B az aktuális belső pontok halmaza).

21. Tétel. *A fenti definiált K és B halmazokra teljesülnek a következők.*

a) Azon pontok halmaza G-ben, amelyek a zsugorítások során K egy elemére képződnek éppen D_G.

b) Azon pontok halmaza G-ben, amelyek az egész algoritmus során belső pontok maradnak (azaz B elemei) éppen A_G.

c) Azon pontok halmaza G-ben, amelyek az egész algoritmus során címkézetlenek maradnak éppen C_G.

Azaz speciálisan az a)-c) pontokban leírt, látszólag az Edmonds-algoritmus futásától (amelyben sok nem-determinisztikus elem van) függő három halmaza igazán nem függ az algoritmus során tett döntéseinktől.

A tétel bizonyítása az Edmonds-algoritmus ismeretén és a helyességének bizonyításán alapul. Nem végezzük el, az érdeklődő hallgató megpróbálhatja az igazolást.

A fenti tétel könnyű következménye az alábbi.

22. Tétel (Gallai—Edmonds-struktúratétel). *a) $G|_{D_G}$ komponensei faktor-kritikusak, azaz nincs bennük teljes párosítás, de bármelyik pontjuk elhagyása után már lesz bennük.*

b) Legyen S az a páros segédgráf, amely egyik színosztályának elemei A_G pontjai, másik színosztályának elemei $G|_{D_G}$ komponensei; élei a D_G és A_G közti élek (természetes illezkedéssel: xy él ($x \in D_G$, $y \in A_G$) esetén a két végpont y, illetve x komponense $G|_{D_G}$-ben. Ekkor az S páros gráf komponensei elemi páros gráfok, azaz minden $\emptyset \subsetneq X \subset A_G$ szomszédsága több elemű mint $|X|$.

c) $G|_{C_G}$ egy teljes párosítással rendelkező gráf.

Végül a struktúratétel egy egyszerű következményét adjuk.

23. Tétel. *Legyen G egy pont-tranzitív összefüggő gráf (azaz $\mathbb{A}ut(G)$, G automorfizmus csoportja tranzitíven hat $V(G)$-n, azaz minden $u, v \in V(G)$ esetén található olyan automorfizmusa G-nek, amely u-t v-be viszi). Ekkor G-ben van teljes párosítás vagy majdnem teljes párosítás (azaz olyan párosítás, amely egyetlen csúcsot hagy párosítatlan).*

Bizonyítás. Pont-tranzitivitás esetén két lehetőség van. Vagy $D_G = V(G)$ (ekkor $A_G = C_G = \emptyset$) vagy $D_G = \emptyset$ (ekkor $A_G = \emptyset, C_G = V(G)$). A Gallai—Edmonds-struktúratétel mindkét esetben adja az állítást. ■

A Gallai—Edmonds-struktúratétel egy gráfot háromféle összetevőre bont: faktor-kritikus gráfok, elemi páros gráf, teljes párosítással rendelkező gráf. Az állítás bizonyos értelemben megfordítható: Ha faktor-kritikus gráfok egy családját elemi páros gráf szerint összekötünk egy A csúcshalmazzal, amely csúcsait egymás közt és egy P teljes párosítással rendelkező gráf pontjaival kötünk össze, akkor egy olyan G gráfhoz jutunk, amely Gallai—Edmonds-felbontása visszaadja a kiinduló (tetszőlegesen választott) összetevőket.

Fontos az összetevők mély megértése. Az alábbi (bizonyítás nélkül közölt) tétel ezen irányba tett első lépés.

Definíció. Legyen H egy gráf. H egy fülragasztással történő bővítése alatt azt értjük, hogy $f_1, \ldots, f_{\ell-1}$ új pontot adunk gráfunkhoz. Továbbá $V(H)$-ból kijlölölünk f_0, f_l csúcsokat (amik egybe is eshetnek) és gráfunkhoz hozzáadjuk az új $f_0f_1, f_1f_2, \ldots, f_{\ell-1}f_\ell$ éleket. Azaz egy utat vagy egy kört ragasztunk H-hoz. ℓ a fül hossza.

24. Tétel. *G akkor és csak akkor faktor-kritikus, ha megkapható az egy pontú gráfból páratlan hosszú fülek ragasztásával.*