Diszkrét Matematika-Gráfelmélet MSc hallgatók számára

3. k-szorosan élösszefüggő gráfok

Előadó: Hajnal Péter 2011–12. őszi félév

1. Minimálisan k-szorosan élösszefüggő gráfok

Definíció. Legyen G gráf, k pozitív egész. G-t minimálisan k-szorosan élösszefüggőnek nevezzük, ha

(i) k-szorosan élösszefüggő, továbbá

(ii) bármely e élre $G - e$ már nem k-szorosan élösszefüggő.

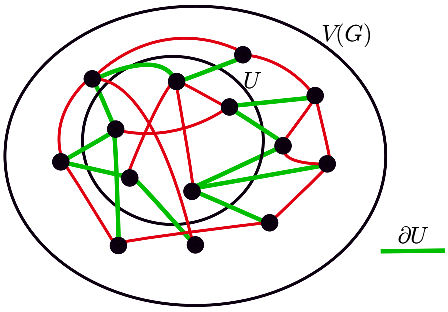
Megjegyzés. $k = 1$-re a minimálisan k-szorosan élösszefüggő gráfok a fák.

Ha G minimálisan k-szorosan élösssszefüggő, akkor nincs benne hurokél.

Ha G k-szorosan élösszefüggő és legalább két csúcsa van, akkor minden csúcs foka legalább k.

Jelölés. $U \subseteq V(G)$ határa:

$$\partial U = \{xy \in E(G) : \ x \in U \text{ és } y \notin U, \ \text{vagy } x \notin U \text{ és } y \in U\}$$



Példa. Az ábrán a zöld élek ∂U elemei.

Megjegyzés. $\partial U = \partial \overline{U}$, ahol $\overline{U} = V(G) \setminus U$.

Ha G-ben nincs hurokél, akkor bármely $x \in V(G)$-re $d(x) = |\partial\{x\}|$.

G akkor és csak akkor k-szorosan élösszefüggő, ha $V(G)$ bármely valódi, nem-üres részhalmazának határa legalább k darab élt tartalmaz.

1. Tétel. *Legyen k pozitív egész, G minimálisan k-szorosan élösszefüggő gráf, $|V(G)| \geq 2$. Ekkor a következők teljesülnek:*

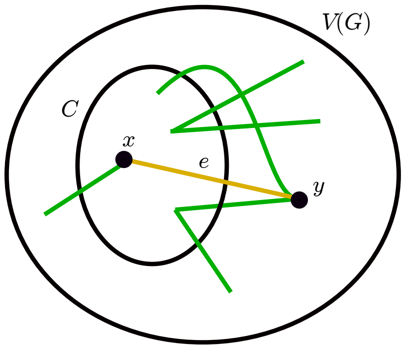
(i) Van G-ben k-fokú csúcs.

(i)$^+$ G-ben legalább két darab k-fokú csúcs van.

Definíció. k pozitív egész, G minimálisan k-szorosan élösszefüggő gráf. A $P \subseteq V(G)$ halmazt pontos halmaznak nevezzük, ha a határa k elemű.

Észrevétel. A tétel i) állítása ekvivalens azzal, hogy G-ben van egyelemű pontos halmaz.

Ha tetszőleges $e = xy \in E(G)$-re $G - e$ nem k-szorosan élösszefüggő, akkor létezik olyan $C \subset V(G)$ cáfoló halmaz, amelyre $|\partial_{G-e} C| < k$. Ekkor C pontos G-ben és elválasztja x-t és y-t:



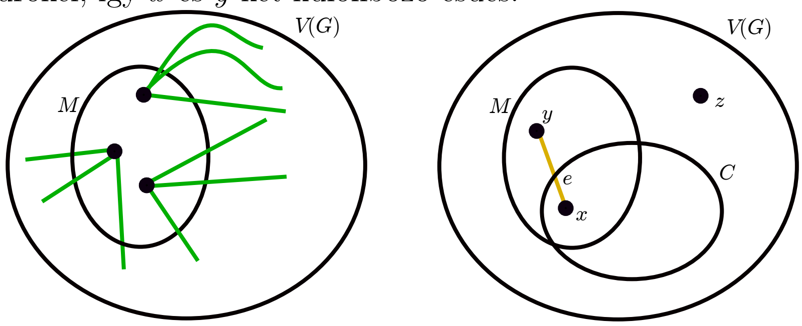
Bizonyítás. i) Legyen M minimális pontos halmaz G-ben, azaz olyan pontos halmaz, amelynek semelyik valódi részhalmaza sem pontos. Azt állítjuk, hogy M egyelemű. Két eset van:

1. eset: *M-en belül nem halad él.* Ekkor a következő egyenlőség teljesül:

$$k = |\partial M| = \sum_{m \in M} |\partial\{m\}| = \sum_{m \in M} d(m)$$

Tudjuk, hogy G-ben minden csúcs foka legalább k, ezért M csak egyelemű lehet.

2. eset: *M-en belül halad legalább egy él.* Legyen ez az él xy. Tudjuk, hogy G-ben nem lehet hurokél, így x és y két különböző csúcs.



1.*eset* 2.*eset*

M pontos, tehát $M \neq V(G)$. Legyen $z \in V(G) \setminus M$. Az észrevételek miatt van olyan $C \subseteq V(G)$ pontos halmaz, ami elválasztja x-t és y-t. Feltehető, hogy $z \notin C$; ha eleme lenne akkor C helyett vehetnénk $\overline{C}$-t.

2. Lemma (Szubmoduláris egyenlőtlenség). *Ha H gráf és $A, B \subseteq V(H)$, akkor teljesül a következő egyenlőtlenség:*

$$|\partial(A \cap B)| + |\partial(A \cup B)| \leq |\partial A| + |\partial B|$$

A lemma bizonyítása egyszerű: minden élre megnézzük, hogy hányszor számolja a bal, illetve jobb oldal. Azt tapasztaljuk, hogy a jobb oldal mindig legalább annyiszor megszámolja, mint a bal oldal. A részleteket az érdeklődő hallgatóra bízzuk.

Alkalmazzuk a lemmát M-re és C-re. Választásaink alapján $M \cap C \neq \emptyset$, $M \cup C \neq V(G)$:

$$k + k \leq |\partial(M \cap C)| + |\partial(M \cup C)| \leq |\partial M| + |\partial C| = 2k$$

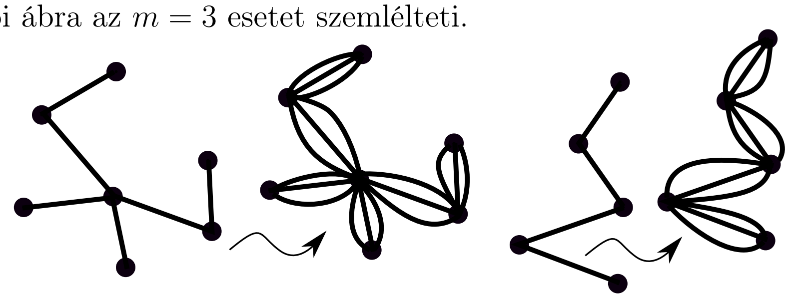
Az egyenlőtlenség első és utolsó tagja egyenlő, ezért összes becslésünk éles, speciálisan $|\partial(M \cap C)| = k$. Az x és y csúcsok közül valamelyik nem eleme C-nek, ezért $M \cap C$ valódi pontos részhalmaza M-nek. Ez ellentmond M minimalitásának, a második eset nem lehetséges.

ii) Legyen P pontos halmaz G-ben. Ekkor $\overline{P}$ is pontos. P-nek és $\overline{P}$-nek van egy-egy tartalmazásra nézve minimális pontos részhalmaza, legyenek ezek M_1 és M_2. Ez két különböző egyelemű pontos halmaz G-ben. ■

Példa. Legyen $m \geq 2$ egész. Ha egy T fában minden él helyére m darab párhuzamos élt teszünk, akkor egy minimálisan m-szeresen élösszefüggő gráfot kapunk.

Speciálisan, ha T egy legalább egy hosszú út, akkor pontosan két olyan csúcsunk lesz, amelynek foka m.

Az alábbi ábra az $m = 3$ esetet szemlélteti.



2. Lovász leemelési lemmája és következményei

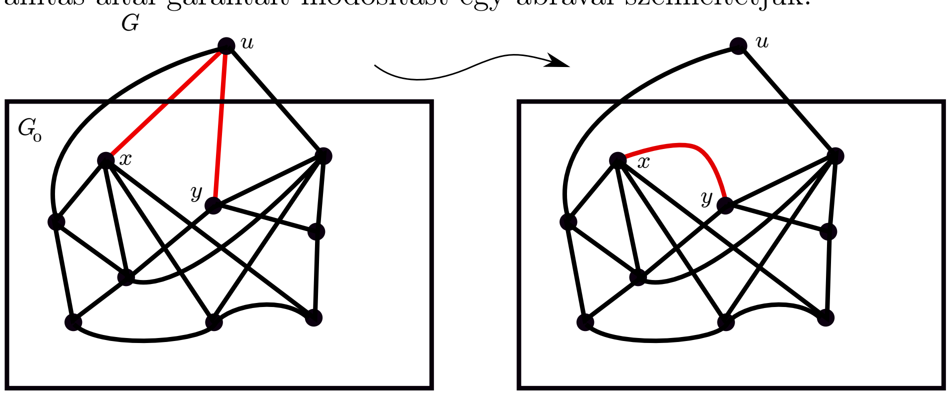
2.1. A lemma

3. Tétel (Lovász László leemelési lemmája). *Legyen G gráf, $u \in V(G)$, $G_0 = G - u$, $k \geq 2$ egész. Tegyük fel az u és G_0 közötti élek száma páros és pozitív, valamint u-ra teljesül a következő feltétel:*

(L) Ha U nemtriviális részhalmaza $V(G_0)$-nek, akkor $|\partial_G U| \geq k$.

Ekkor az u-ra illeszkedő élek között található olyan $e = ux$ és $f = uy$ él, hogy a $\widetilde{G} = G - e - f \dot{+} xy$ gráf is rendelkezzen az (L) tulajdonsággal.

Az állítás által garantált módosítást egy ábrával szemléltetjük.

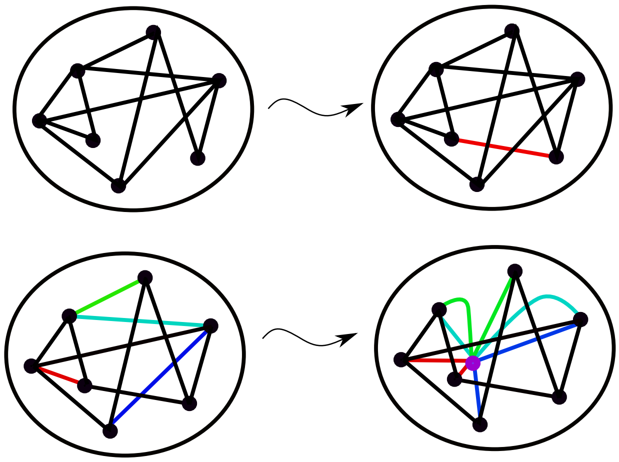


Az ábrán a piros éleket cseréljük. Ha x és y között már halad él, akkor egy új, a már meglévő xy élekkel párhuzamos élt veszünk fel.

2.2. Alkalmazás: 2ℓ-szeresen élösszefüggő gráfok növekedése

Legyen G gráf, k páros pozitív egész szám. Definiáljuk a következő két operációt:

Élhozzáadás: A G két tetszőleges pontja közé egy új élt teszünk, ezzel a G^+ gráfot kapjuk.



Példa az élhozzáadás és összecsípés ($k = 8$) operációkra

$k/2$ **darab él összecsípése:** A G gráfban törlünk $k/2$ darab élt és felveszünk egy új pontot. A törölt éleket olyan 2 hosszúságú utakkal helyettesítjük, amelyek két végpontja a törölt él két végpontja és középső pontja az új csúcs. Így egy új, $\widetilde{G}$ gráfot kapunk.

Észrevétel. Ha G k-szorosan élösszefüggő, akkor G^+ és $\widetilde{G}$ is az. G^+ esetén ez nyilvánvaló. $\widetilde{G}$ esetén azt kell ellenőrizni, hogy $V(G)$ tetszőleges valódi, nem-üres részhalmazának határa legalább k elemű. Ezt elég az új pontot nem tartalmazó halmazokra megnézni. Ez egyszerű feladat.

Ez előző észrevétel iterálható: Legyen G_0, az a gráf, aminek egy pontja van és nincs éle. Tegyük fel, hogy G felépíthető az alábbi módon:

$$G_0 \to G_1 \to \ldots \to G_l = G,$$

ahol minden $i = 0, \ldots, l-1$-re a $G_i \to G_{i+1}$ művelet vagy élhozzáadás, vagy $k/2$ darab él összecsípése. Ekkor G k-szorosan élösszefüggő.

Célunk a fenti észrevétel megfordításának igazolása.

4. Tétel. *Ha k pozitív páros szám, és G k-szorosan élösszefüggő gráf, akkor G felépíthető G_0-ból (lásd fent) az előző két operáció segítségével.*

Bizonyítás. Legyen G és k adott. Az élszám szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk az állítást. G_0 és az összes egypontú gráf triviálisan felépíthető. Legyen G egy legalább két csúcsot tartalmazó k-szorosan összefüggő gráf. Tegyük fel, hogy a legfeljebb $|E(G)| - 1$ élszámú gráfok felépíthetőek.

Két eset lehetséges:

1. eset: G nem minimálisan k-szorosan élösszefüggő. Ekkor G-nek van olyan e éle, hogy $G - e$ k-szorosan élösszefüggő. $|E(G - e)| = |E(G)| - 1$ és az indukciós feltevés miatt $G - e$ felépíthető. Így az e él hozzá/vissza-adásával kapott G gráfot is felépíthetjük G_0-ból.

2. eset: G minimálisan k-szorosan élösszefüggő, $|V(G)| \geq 2$.

Ebben az esetben a G-nek van egy u csúcsa, aminek a fokszáma k. Erről a csúcsról a Lovász-lemma $k/2$-szörös alkalmazásával emeljük le az éleket, majd töröljük u-t. Így a lemma miatt egy H k-szorosan élösszefüggő gráfot kapunk, aminek kevesebb éle van, mint G-nek. Ha a H gráf $E(H) \setminus E(G)$ halmazbeli éleit egy u pontba összecsípjük, akkor a G gráfot kapjuk. Az 1. esethez hasonlóan adódik, hogy G felépíthető G_0-ból a két operáció alkalmazásával. ∎

2.3. A lemma bizonyítása

A Lovász-lemma következő, az eredetinél kissé erősebb változatát bizonyítjuk:

5. Lemma $^+$. *Legyen G gráf, $u \in V(G)$, $G_0 = G - u$, $k \geq 2$ egész. Tegyük fel az u és G_0 közötti élek száma páros és pozitív, valamint G_0-ra teljesül az (L) feltétel. Ekkor bármely $e = ux$ élhez van olyan $f = uy$ él, hogy a $\widetilde{G} = G - e - f \dot{+} xy$ gráf is rendelkezzen az (L) tulajdonsággal.*

Bizonyítás. Legyen G, u, k és $e = ux$ adott. Próbáljuk az $f = uy$ élt. Legyen $\widetilde{G} = G - e - f \dot{+} xy$. Tegyük fel, hogy $\widetilde{G}$ nem (L) tulajdonságú. Ekkor létezik $C_f \subseteq V(G_0)$ cáfoló halmaz, amelyre $|\partial_{\widetilde{G}} C_f| < k$.

Ha C_f elvágja x-t és y-t, akkor $|\partial_{\widetilde{G}} C_f| = |\partial_G C_f| \geq k$, ami ellentmondás.

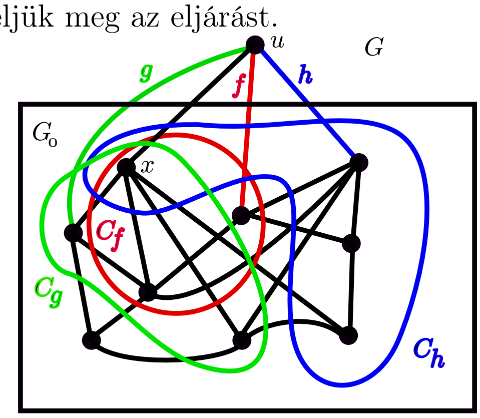
C_f nem vágja el x-t és y-t. Feltehető, hogy $x, y \in C$; ellenkező esetben C helyett vehetnénk $V(G_0) \setminus C$-t.

Ekkor $k > |\partial_{\widetilde{G}} C_f| = |\partial_G C_f| - 2$, ezért $|\partial_G C_f| \leq k + 1$. Jelöljük $V(G_0) \setminus C_f$-t $\overline{C_f}$-rel. Legyen az $u - G_0$ élek száma d, az $u - C_f$ élek száma d_1, az $u - \overline{C_f}$ élek száma d_2 és a $C_f - \overline{C_f}$ élek száma d_3. A G gráf (L) tulajdonságú, ezért $d_2 + d_3 = |\partial_G \overline{C_f}| \geq k$, valamint $d_1 + d_3 = |\partial_G C_f| \leq k + 1$. $d_1 + d_2 = d$ páros, azaz $d_1 \equiv d_2 \mod 2$, ezért

$$d_1 \leq d_2. \tag{1}$$

Azaz az u-ból induló éleknek maximum fele haladhat a C_e cáfoló halmazhoz.

Más élekre is ismételjük meg az eljárást.



Vagy találunk megfelelő uy élt, vagy kapunk cáfoló halmazok egy $\mathcal{C}$ halmazát, amelyre $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$ tartalmazza u szomszédságát. Ritkítsuk ki a $\mathcal{C}$ halmazrendszert úgy, hogy ezen tulajdonság teljesüljön, de benne minimális számú cáfoló halmaz legyen. Legyen $\mathcal{C}_0$ az így kapott rendszer. (1) alapján nem lehet, hogy $\mathcal{C}_0$ csak két cáfoló halmazból álljon: Ekkor u-ból induló éleknek maximálisan a fele haladhatna a két halmaz mindegyikéhez úgy, hogy az ux él mindkettőben szerepel és a két halmaz mégis lefedé u szomszédságát. Ez pedig nyilván nem lehet.

A továbbiakhoz szükségünk van egy lemmára.

6. Lemma. *Ha H gráf, és $A, B, C \subseteq V(H)$, akkor teljesül a következő egyenlőtlenség:*

$$|\partial(A \cap B \cap C)| + |\partial(A \cap \overline{B} \cap \overline{C})| + |\partial(\overline{A} \cap B \cap \overline{C})| + |\partial(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)| \leq |\partial A| + |\partial B| + |\partial C|$$

A lemma bizonyítása (mint a szubmoduláris egyenlőtlenség bizonyítása) egyszerű számolás. Minden élre ellenőrizni kell, hogy a bal, illetve jobb oldal hányszor számolja meg. A jobb oldalhoz minden él legalább annyi hozzájárulást ad mint bal oldalhoz.

Legyen $C_1, C_2, C_3 \in \mathcal{C}_0$. Alkalmazzuk a lemmát ezekre, azzal a plusz észrevétellel, hogy az ux él a bal oldalon egyszer, míg a jobb oldalon háromszor van számolva:

$$|\partial(C_1 \cap C_2 \cap C_3)| + |\partial(C_1 \cap \overline{C_2} \cap \overline{C_3})| + |\partial(\overline{C_1} \cap C_2 \cap \overline{C_3})| + |\partial(\overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap C_3)| \leq$$
$$\leq |\partial C_1| + |\partial C_2| + |\partial C_3| \leq (k+1) + (k+1) + (k+1) - 2$$

A kiinduló négy tagú összegben szereplő háromtagú metszethalmazok mindegyike nem üres (az elsőnek eleme x, a többi üressége abból ered, hogy $\mathcal{C}_0$ egyik elemét sem lehet elhagyni úgy, hogy lefedjék u szomszédságát, például C_3 szükségszerűen metszi $\overline{C_1} \cap \overline{C_2}$-t). Így az (L) tulajdonság miatt a négy tagú összeg mindegyik tagja legalább k. Összefoglalva $4k \leq 3k + 1$, azaz rendezés után $k \leq 1$.

Ez ellentmondás, mert feltettük, hogy $k \geq 2$. Azaz valamelyik uy él kielégíti a lemma állítását. ■