Diszkrét Matematika MSc hallgatók számára

13. Előadás

Előadó: Hajnal Péter
Jegyzetelő: Virágh Zita 2010. december 13.

1. Aritmetikai Ramsey-elmélet (folytatás)

Eddig megemlített Ramsey-tételeket a következő táblázatban foglaljuk össze:

Tétel	Színezendő struktúra	Keresett monokromatikus részstruktúra	Lehetséges színosztály maximális mérete
Ramsey-tétel	n pontú teljes gráf élei	k pontú teljes gráf élei	$K_{\lfloor n/2\rfloor,\lceil n/2\rceil}$, az n pontú, kétrészes Turán-gráf
Schur-tétel	$[n]$	$\{x, y, x+y\}$	I. Példa: a páratlan számok. II. Példa: $[n] \setminus [\lfloor n/2\rfloor]$, azaz a „nagy számok $[n]$-ban”.
van der Waerden tétele	$[n]$	k hosszú (nemkonstans) számtani sorozat	???

Erdős Pál és Turán Pál sejtette, hogy ??? helyére nem létezik jó példa, azaz nem lehet megadni $\{1, 2, \ldots, n\}$ egy „jelentős” részét úgy, hogy az ne tartalmazzon k hosszú számtani sorozatot. Eszerint a van der Warden-tétel egyfajta indoklása egy sűrűségi indoklás. Ami jóval erősebb mint a Ramsey-tételek szokásos kombinatorikus bizonyítása.

Definíció.

$$r_k(n) = \max\{|R| : R \subseteq [n],\ R\text{-ben nincs } k \text{ hosszú számtani sorozat}\}.$$

Sejtés (Erdős Pál — Turán Pál, 1936). $r_k(n) = o(n)$, ha $k \geq 3$,

Azaz minden pozitív ε esetén, ha n elég nagy, akkor $r_k(n) \leq \varepsilon n$. Az első lényeges eredmény a sejtés kimondása után 20 évvel született

1. Tétel (Roth tétele, 1956). $r_3(n) = o(n)$.

Majd Szemerédi Endre a négy hosszú számtani sorozatok esetét bizonyította, később pedig következett az általános eset.

2. Tétel (Szemerédi Endre, 1975). *Minden $k \geq 3$ esetén igaz a sejtés. Azaz*

$$r_k(n) = o(n).$$

A sejtés bizonyítása után a kérdéskör vizsgálata szinte még pezsgőbb lett. Csak a legkiemelkedőbb eredményeket vázoljuk.

A tételt újra bizonyították

- 1977 Fürstenberg. Bizonyítása ergodelméletet használ.
- 2001 Gowers. Bizonyítása erős kombinatorikus számelméleti eredményeket és Fourier-technikát használ. A Fourier-módszer használatát Roth vezette be, de eredményes kihasználása további zseniális ötleteket kívánt.

Gowers új bizonyítása azért is kiemelkedő, mert az eredeti kombinatorikus, illetve későbbi ergodelméleti bizonyítás szükségszerűen nem adott becslést az $r_k(n)$ számokra. A Fourier-módszer alkalmazása viszont effektív becsléseket is ad. Így mellékeredményként adódott a van der Waerden számok következő becslése.

3. Tétel (Gowers-becslés).

$$W_2(k) \leq 2^{2^{2^{2^{2^{k+9}}}}}.$$

4. Tétel (Green—Tao-tétel). *Minden k pozitív egészre a prímek között van k hosszú számtani sorozat.*

A tétel oka ismét sűrűségi.

5. Tétel (Green—Tao-tétel, sűrűségi változat). *Legyen $P_n = \{2, 3, 5, 7, 11, p_6, \ldots, p_n\}$ az első n prím halmaza. Legyen ϵ tetszőleges (kicsi) pozitív konstans. Ha $A \subset \mathbb{N}$ teljesíti, hogy $|A \cap P_n| \geq \epsilon n$ végtelen sok n-re, akkor A-ban van k hosszú számtani sorozat minden k pozitív egészre.*

2. Extremális gráfelmélet

Emlékeztető (BSc). $T_{n,k}$ (n pontú, k részes) Turán-gráf csúcshalmaza V, amelyre $|V| = n$ és a csúcshalmazt k diszjunkt osztály adja ki: $V = O_1 \dot\cup \ldots \dot\cup O_k$, ahol az osztályok „majdnem” ugyanakkorák.

A Turán-gráf (amely egyszerű gráf) éleit a következőben írjuk le: x és y akkor és csak akkor szomszédosak, ha különböző osztályokba esnek.

Emlékeztető. Egy halmaz k osztályra történő osztályozására azt mondjuk, hogy osztályai majdnem ugyanakkorák, ha a következő ekvivalens állítások egyike/mindegyike teljesül

(i) Minden O osztályra $|O| \in \left\{ \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor, \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil \right\}$.

(ii) Bármely két, O és O', osztályra $||O| - |O'|| \leq 1$.

(iii) $n - k \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$ darab $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ méretű és $k - \left(n - k \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor\right)$ darab $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$ méretű osztály van.

Észrevétel. $T_{n,k}$ Turán-gráf nem tartalmaz $k+1$ elemű klikket (ami olyan csúcshalmaz, amelynek bármely két eleme összekötött). Valóban, ha egy ponthalmaz mérete eggyel nagyobb, mint az osztályok száma, akkor a skatulya-elv miatt szükséges, hogy egy osztályból egynél több elemet vegyünk ki. A Turán-gráf definíciója viszont azt mondja, hogy ez a két elem nem összekötött, a kivett csúcshalmaz nem lehet klikk.

A $k+1$ elemű klikk hiánya egy kissé általánosabb észrevételből is adódik.

Észrevétel. $T_{n,k}$ összes részgráfja k színezhető (a gráfot úgy definiáltuk, hogy a k darab osztály felfogható k színosztálynak). Azaz $T_{n,k}$ nem tartalmaz R részgráfot, ha $\chi(R) \geq k+1$ (azaz R nem k színezhető).

Az alaptételünk (BSc-s anyag):

6. Tétel (Turán Pál). *Ha G n pontú egyszerű gráf és nem tartalmaz k elemű klikket, akkor*

$$|E(G)| \leq |E(T_{n,k-1})|.$$

A Turán-tétel egy speciális esete, amikor gráfunkban nincs 4 pontú klikk. Ekkor a tétel azt mondja ki, hogy nem lehet $|E(T_{n,3})|$-nál több élünk. A feltételünket úgy is megfogalmazhatjuk, hogy gráfunk nem tartalmazza a tetraéder gráfját részgráfként (minden testnek van egy egyszerű gráfja, ahol a test csúcsai a gráf csúcsai, élei pedig a gráf éleinek felelnek meg). Turán tétele bizonyítása után a következő kérdést tette fel:

Mi van más szabályos testekkel? Például hány éle lehet egy gráfnak, ha nincs benne oktaéder, vagy ha nincs benne kocka, vagy ha nincs benne dodekaéder?

Definíció.

$$ext(T, n) = \max\{|E(G)| : \ G \ n \text{ pontú, egyszerű gráf, } T \not\subseteq G\}.$$

T-re úgy hivatkozunk, hogy tiltott részgráf. n a csúcsméret. A továbbaikhoz hasznos, ha bevezetjük a következő jelölést: Az n pontú egyszerű gráfok osztályát jelölje $\mathcal{G}_n$. Tehát $G \in \mathcal{G}_n$ jelentése G egy n pontú egyszerű gráf.

Az $ext(T; n)$ függvény vizsgálatával kapcsolatos problémákat Turán-típusú kérdéseknek nevezzük. Ez az extremális gráfelmélet első kérdésköre. Az extremális gráfelméletben bizonyos feltételeknek eleget tevő gráfok közt nézzük meg, hogy bizonyos gráfparaméter milyen határok között változik. Azaz a paraméter milyen extremális értékeket vehet fel.

Megjegyezzük, hogy Turán Pál kérdése a kocka gráfjára mind a mai napig megoldatlan kérdés.

3. Extremális gráfelméleti eredmények

A továbbiakban feltesszük, hogy a T tiltott gráfban nincsenek izolált csúcsok: Az izolált csúcsok hozzáadása/elvétele csak ott játszik szerepet, ahol T mérete meghaladja n-et. Ez pedig

Észrevétel. Legyen I a két pontot és egyetlen élt tartalmazó gráf. Ekkor $ext(I; n) = 0$.

Ha egy élt tiltunk, akkor nyilván a maximális élszám nulla lesz.

Észrevétel. Legyen $\wedge$ a három pontot és két élt tartalmazó gráf. Ekkor $ext(\wedge; n) = \lfloor n/2 \rfloor$.

Ha két összefutó élt tiltunk, akkor minden csúcs foka 0 vagy 1. Azaz a fokok összege legfeljebb n. Az élszám legfeljebb $n/2$. Mivel az élszám mindig egy természetes szám, ezért felső becslésünk igazából $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

A másik irányú egyenlőtlenség bizonyításához konstruálnunk kell egy $\wedge$ részgráfot nem tartalmazó gráfot: Ez egy teljes párosítás n vagy $n-1$ csúcson (ha n paritásától függően). Ennek élszáma $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Észrevétel. Legyen M_2 a négy pontot és két nem összefutó élt tartalmazó gráf (azaz egy két élű párosítás). Ekkor $ext(M_2; n) = n - 1$, ha $n \geq 4$.

Ennek ellenőrzése az érdeklődő hallgatók számára egy egyszerű feladat.

7. Következmény. *Ha T olyan, hogy $|E(T)| \geq 2$, akkor elég nagy n esetén $ext(T, n) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.*

A továbbiakban legalább két élű tiltott részgráfokkal foglalkozunk. A körmentes tiltott gráfok esete egyszerű.

8. Tétel. *Legyen T erdő (azaz körmentes gráf; azaz olyan gráf, amely a komponensei fák). Legyen T-nek legalább két éle. Ekkor $\alpha_T \cdot n \leq ext(T, n) \leq \beta_T n$. Azaz $ext(T; n)$ nagyságrenje lineáris.*

A tételben szereplő alsó becslés már ismert, hiszen tiltott részgráfunknak legalább két éle van. Mielőtt a tétel nehezebb részét igazolnánk felidézünk két fogalmat és belátunk egy lemmát.

Jelölés. Legyen H egy gráf. Ekkor $\overline{d}(H)$ a H gráf átlagos foka, $\delta(H)$ a H gráf minimális foka.

9. Lemma. *$G \in \mathcal{G}_n$ esetén létezik olyan R részgráf ($R \subseteq G$), amelyre $\delta(R) \geq \frac{\overline{d}(G)}{2}$ teljesül.*

Bizonyítás. Egy algoritmus leírásával kezdjük a bizonyítást.

$A := G$
`// ` A ` az aktuális gráf, kezdetben ` G.
`Amíg találunk ` $x \in V(A)$`-t,úgy, hogy ` $d_A(x) < \frac{\overline{d}}{2}$
    $A \leftarrow A - x$.
`// Ha egy csúcs foka túl kicsi, akkor nem lehet az outputban.`

A lemma ekvivalens azzal, hogy az algoritmus nem „üríti ki” G-t.

Az algoritmus ad egy kiürítési sorrendet $V(G)$re, jelöljük ezt π-vel: $\pi : v_1, \ldots, v_n$, azaz v_i az i-ediknek elhagyott csúcs ($n = |V(G)|$).

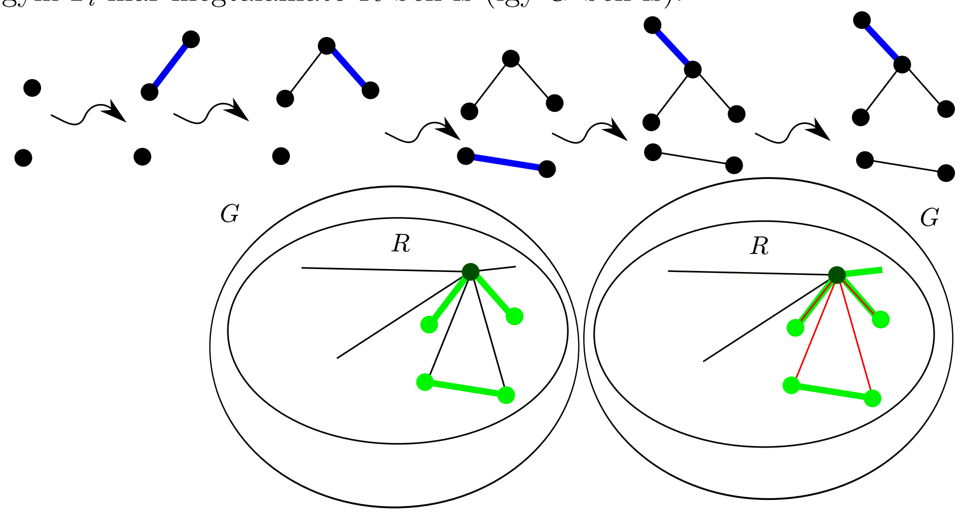
Tudjuk: v_1-nek kevesebb mint $\frac{\overline{d}}{2}$ szomszédja volt a G gráfban. Utána a v_2-nek a v_1 elhagyása után kevesebb mint $\frac{\overline{d}}{2}$ szomszédja volt. Bevezetünk ehhez egy jelölést: $d_\pi^{\text{hátra}}(v)$ a v csúcs nagyobb indexű szomszédainak száma. Általában igaz, hogy $d_\pi^{\text{hátra}}(v) < \frac{\overline{d}}{2}$, azaz a kiürítési sorrendre vonatkozólag minden csúcs „hátrafoka” kevesebb mint $\frac{\overline{d}}{2}$.

Észrevétel: $\sum d_\pi^{\text{hátra}}(v) = |E|$, azaz a hátrafokok összege pontosan kiadja az élszámot. Ez az összeg a kiürítési sorozat esetén határozottan kisebb, mint $n\frac{\overline{d}}{2}$. Viszont az élek száma pontosan $n\frac{\overline{d}}{2}$. Ez ellentmondás, ami a lemmát bizonyítja. ■

Ezek után már egyszerű a bizonyítás vége.

Bizonyítás. (A tételé.) Továbbra is azt akarjuk bebizonyítani, hogy az extremális érték $< \beta_T n$. Pontosan megadjuk β_T-t: Legyen T egy tetszőleges erdő. Legyen $G \in \mathcal{G}_n$, amelyre $|E(G)| \geq |V(T)|n$ (azaz G-ben az átlag fok: $\frac{\sum d_i}{n} \geq \frac{2|V(T)|n}{n} = 2|V(T)|$). Ekkor G biztos tartalmaz T-vel izomorf részgráfot.

Valóban, a lemma alapján G-ben van olyan R részgráf, amelyre $\delta(R) \geq |V(T)|$. T-t építsük fel egy üres gráfból ághajtások alkalmazásával. Ez könnyen megtehető: annyi ponttal indulunk ahány komponense van T-nek, mondjuk c. T_0 legyen a c pontú üres gráf. Mindegyik komponens egy fa, ami egyetlen csúcsból ághajtásokkal felépíthető. A komponensek egyenkénti felépítésével egy $\{T_i\}_{i=0}^{|E(T)|}$ gráfsorozatot kapunk, amelyben T_i-nek i éle van, továbbá $T_{|E(T)|} = T$. Indukcióval igazoljuk, hogy mindegyik T_i már megtalálható R-ben is (így G-ben is).



Ha T_i-t megtaláltuk, akkor mohó módon ezt a részgráfot terjesztjük ki egy T_{i+1}-gyel izomorf részgráffá. Legyen x az a csúcs, amiből induló ághajtás adja T_{i+1}-et. x minden olyan szomszédja, ami nem reprezentál eddigi csúcsot (és az ehhez vezető él) megteszi az indukciós lépést. Ilyen szomszéd viszont könnyen található, hiszen legalább $|V(T)|$ szomszéd van, míg T_i csúcsait kevesebb mint $|V(T)|$ csúcs reprezentálja. ■

A fáknál jóval bonyolultabb gráfokra is tudunk valamit.

Észrevétel. Ha T olyan, hogy $\chi(T) = k$ akkor $ext(T, n) \geq |E(T_{n,k-1})|$.

A fenti észrevételnél jóval mélyebb az alábbi tétel.

10. Tétel (Erdős—Stone, Erdős—Simonovits). *Ha T olyan, hogy $\chi(T) = k$, akkor $ext(T, n) = |E(T_{n,k-1})| + o(n^2)$.*

Ugyanez a tétel részletesebben:

11. Tétel (Erdős—Stone, Erdős—Simonovits). *(i) Legyen T olyan, hogy $\chi(T) = k \geq 3$ (azaz $k-1$ — a T-hez tartozó Turán-gráf osztályszáma — legalább 2). Ekkor $ext(T, n) = |E(t_{n,k-1})| + o(n^2)$ (azaz a $o(n^2)$ tag egy maradéktag).*

(ii) Legyen T olyan, hogy $\chi(T) = 2$. Ekkor $ext(T, n) = o(n^2)$ (a korábbi maradéktag főtaggá vált).

A fentiek alapján azonosítani tudjuk az érdekes eseteket: Ha T páros, kört tartalmaz, akkor a fentiek nem sokat mondanak. Minden más esetben $ext(T;n)$ nagyságrendje kiolvasható az ismertetett eredményekből.

Az érdekes esetben nagyon kevés pontos eredmény ismert. Ha a tiltott részgráf C_4, C_6, C_{10} vagy $K_{2,k}$, $K_{3,k}$, akkor $ext(T;n)$ nagyságrendje ismert. C_8, C_{12}, C_{14}, $\ldots$, $K_{4,4}$, $K_{4,5}$, $\ldots$, továbbá a kocka esete nem ismert.

Csak egy eredményt emelünk ki. Amihez előkészületek szükségesek.

Legyen $\mathbb{F}$ egy véges test. (Gondolhatunk $\mathbb{F}_p$-re, ahol p egy prím. Azaz $\mathbb{F}_p$ a $\{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ halmaz a modulo p aritmetikával.)

A valós projektív sík koordináta geometriája a valós számokon alapul. Ahogy az Euklideszi sík koordináta geometriája is a valós számok aritmetikáján alapulva egy geometriai struktúrát hoz létre. A konstrukciók véges tesetekre is végrehajthatók. Így kapjuk a $PG(2,\mathbb{F})$ projektív síkot (a 2-es a dimenzióra utal), amely koordináta geometriája az $\mathbb{F}$ testen alapul. (PG a projektív geometria két szavának kezdőbetűiből ered.) Ebben a geometriai struktúrában a pontok, egyenesek száma véges. A véges projektív geometriák alappéldáját az alábbiakban írjuk le.

Definíció. $\mathbb{F}^3 = \{(a, b, c) : a, b, c \in \mathbb{F}\}$. Ezen a halmazon definiálunk egy relációt: $(a, b, c) \sim (a', b', c')$ akkor és csak akkor, ha található olyan nem-nulla $\lambda \in \mathbb{F}$, hogy $(a, b, c) = \lambda(a', b', c')$. Ez egy ekvivalenciareláció. $(0, 0, 0)$ egy egyelemű ekvivalenciaosztályt alkot. Minden más ekvivalenciaosztály $|\mathbb{F}| - 1$ elemű. Ezen ekvivalenciaosztályok halmaza alkotja a geometriánk $\mathcal{P}$ ponthalmazát. Azaz $\mathbb{F}^3 - \{(0, 0, 0)\}|_\sim$, ennek elemeit $[a, b, c]$-vel, vagy $(a : b : c)$-vel szokás jelölni. Mi az első jelölést használjuk. Az egyenesek $\mathcal{E}$ halmazát ugyanezen ekvivalenciaosztályokkal azonosítjük. $[a, b, c]^*$ az (a, b, c) vektor ekvivalenciaosztályának neve, ha egyenest reprezentál. $[a, b, c]$ és $[a', b', c']^*$ akkor és csak akkor illeszkedik, ha $a \cdot a' + b \cdot b' + c \cdot c' = 0$.

Az így kapott geometriai struktúra minden illeszkedési tulajdonságot teljesít, amit a valós projektív síkon megszoktunk (például bármely két különböző egyenes pontosan egy pontban metszi egymást). Ezek ellenőrzése az $\mathbb{F}$ feletti lineáris algebra ismerősei számára egyszerű gyakorlatok.

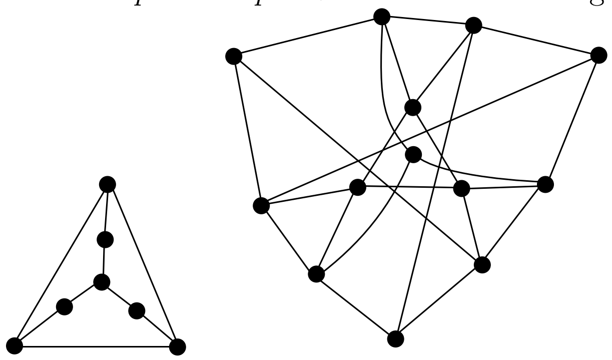
Megjegyzés. A fentiekben egy algebrai struktúrából konstruáltunk egy geometriait, amely szép geometrai tulajdonságokkal rendelkezik. A fordított logika is természetes. Elvárjuk a szép geometriai tulajdonságokat (axiómák) és keresünk ezt teljesítő modelleket. Esetünkben (az axiómák leírását itt nem részletezzük) ezek a véges projektív síkok. $PG(2,\mathbb{F})$ csak egy modell (igazábol egy modell-sorozat) a sok lehetőség közül.

A fentiek alapján nyilvánvaló, hogy $PG(2,\mathbb{F})$-ben $|\mathcal{P}| = |\mathcal{E}| = (|\mathbb{F}|^3 - 1)/(|\mathbb{F}| - 1) = |\mathbb{F}^2| + |\mathbb{F}| + 1$. Az is könnyen számolható, hogy minden egyenesre $|\mathbb{F}| + 1$ pont illeszkedik.

Konstrukció (Sok élt tartalmazó gráf C_4 nélkül). Legyen p egy prímszám. Definiálunk egy G_p egyszerű gráfot.

G_p csúcsait $PG(2,\mathbb{F}_p)$ pontjai alkotják. Két csúcs, $[a, b, c]$ és $[a', b', c']$ akkor és csak akkor szomszédos ha $a \cdot a' + b \cdot b' + c \cdot c' = 0$. (Azaz az egyik csúcs koordinátáit pontként, a másikét egyenesként olvasva illeszkedő párt kapunk.)

Példa. A következő ábrán a $p = 2$ és $p = 3$ esetből adódó két gráfot láthatjuk.



Észrevétel. (i) *G_p-ben nincs négy hosszú kör.* Valóban, ha ilyen elnne, akkor felvátva pontnak, egyenesnek értelmezve a négy hosszú kör csúcsait két olyan egyenest kapnánk, ami két különböző pontban metszenék egymást. Ez pedig nem lehetséges.

(ii) $|V(G_p)| = p^2 + p + 1 =: n$.

(iii) Az $v = [a, b, c]$ csúcs szomszédai az $v^* = [a, b, c]^*$ egyenesre illeszkedő v-től különböző pontok. Azaz, ha a v pont nem illeszkedik v^* egyenesre, akkor $p+1$ szomszédja van, különben p szomszédja van. Azon v pontok, amelyek illeszkednek a v^* egyenesre olyanok, hogy koordinátáik teljesítik az $x^2+y^2+z^2 = 0$ egyenletet (modulo p aritmetikában dolgozunk!). Ez az egyenlet geometriailag egy kúpszeletet ír le. Ismert, hogy pontainak száma $p + 1$. Azaz $p + 1$ darap csúcs foka p és így p^2 csúcs foka $p + 1$.

(iv) $2|E(G_p)| = p^2(p+1)+(p+1)p = p^3+2p^2+p$, azaz $|E(G_p)| = (p^3+2p^2+p)/2$.

Az észrevételből az élek pontszámtól való függésének nagyságrendjét emeljük ki: $|E| \sim \frac{1}{2}n^{3/2}$. Ez az extremális élszám helyes nagyságrendje.

12. Tétel.

$$ext(C_4; n) \sim \frac{1}{2}n^{\frac{3}{2}}.$$