Diszkrét Matematika MSc hallgatók számára

12. Előadás

Előadó: Hajnal Péter
Jegyzetelő: Sallai Gyöngyi 2010. december 6.

Most a kombinatorikus számelmélet Ramsey-tétellel kapcsolatos részét vizsgáljuk meg közelebbről. Először azonban idézzük fel a Bsc-n megtanult Ramsey-tételt.

Emlékeztető. Legyen $f : E(K_n) \to \{\text{piros, kék}\}$ az n pontú teljes gráf éleinek tetszőleges 2-színezése. Egy $S \subseteq V(K_n)$ halmazt monokromatikus piros halmaznak nevezünk, ha tetszőleges $x \neq y \in S$ esetén $f(xy) = piros$. Hasonlóan értelmezhető a monokromatikus kék halmaz fogalma. Egy halmaz monokromatikus, ha monokromatikus kék vagy monokromatikus piros halmaz.

Emlékeztető (Ramsey-tétel, 1930). Ramsey-tétele azt mondja ki, ha k-hoz képest n elég nagy, akkor K_n éleit bárhogyan színezzük piros-kékkel, lesz monokromatikus k elemű csúcshalmaz. Ez az állítás 2-színezésre vonatkozik, de általánosítható c-színezésre is.

Az a határ, ahonnan kezdve „n elég nagy" az $R(k)$ Ramsey szám (illetve $R_c(k)$, ha c elemű a palettánk).

1. Aritmetikai Ramsey tételek

A következőkben olyan problémákkal foglalkozunk, ahol adott egy számhalmaz, melynek elemeit kiszíneztük. Majd veszünk egy egyenletet/egyenletrendszert, és azt vizsgáljuk, hogy megoldható-e úgy, hogy a megoldás monokromatikus halmaz legyen.

Az első ilyen tételünk az alábbiakban egy lemma lesz. Ehhez a Fermat-sejtés vizsgálata vezetett el. Eszerint az $x^n + y^n = z^n$ Diophantikus egyenletnek nincs nem triviális megoldása 2-nél nagyobb egész n esetén. (Ezt a sejtést Wiles 1994-ben bizonyította.)

Megállapodás. Következőkben az alatt, hogy egy állítás elég nagy s számra teljesül, azt értjük, hogy

Van olyan s_0 küszöbszám , hogy minden $s \geq p_0$ esetén az állítás igaz.

A nyelvezetet értelemszerűen használjuk prímekre, illetve használhatnánk négyzetszámokra, vagy $\mathbb{N}$ egy tetszőleges végtelen részhalmazából vett értékekre.

1. Tétel (Schur-tétel). *Legyen adott $n \in \mathbb{N}^+$. Elég nagy p prímre az*

$$x^n + y^n \equiv_p z^n$$

egyenletnek létezik nem triviális megoldása, ahol $x \equiv_p y$ jelentése: $x \equiv y \mod p$, továbbá egy x, y, z megoldás akkor nem trivialis, ha $x, y, z \not\equiv_p 0$.

Természetesen a p-re vonatkozó küszöbszám függ n-től. Mielőtt még a tételt bizonyítanánk, szükségünk van a következő számunkra központi lemmára.

2. Lemma (Schur-lemma, 1916). *Legyen ν elég nagy, és $c \in \mathbb{N}^+$ tetszőleges palettaméret. Vegyünk egy tetszőleges $\varphi : \{1, 2, \ldots, \nu\} = [\nu] \to \{1, 2, \ldots, c\}$ színezést. Ekkor az*

$$x + y = z \text{ , ahol } x, y, z \in [\nu],$$

egyenletnek van monokromatikus megoldása.

Bizonyítás. (Lemma bizonyítása) Definiáljuk az $\{0, 1, 2, \ldots, \nu\}$ halmazon értelmezett teljes gráf éleinek egy színezését. Az ij él színe legyen $\varphi(|i-j|)$. Ekkor Ramsey-tételéből adódóan, ha ν elég nagy, lesz monokromatikus hármas (azaz egy háromszög, melynek minden éle ugyanolyan színű). Igazából $\nu = R_c(3)$ egy jó határ. Legyen h, i, j egy monokromatikus háromszög csúcsai. Feltehető, hogy $h < i < j$. Tudjuk, hogy

$$\varphi(i - h) = \varphi(j - i) = \varphi(j - h).$$

Ekkor az $x = i - h$, $y = j - i$, $z = j - h$ egy megfelelő megoldása az egyenletünknek. ■

A teljesség kedvéért lássuk a tétel bizonyítását is.

Bizonyítás. (Tétel bizonyítása) Legyen p elég nagy prím, és tekintsük a p elemű test multiplikatív csoportjának ($\mathbb{F}_p^*$-nek) a következő

$$H = \{x^n | x \in \mathbb{F}_p^*\} = \{g^n, g^{2n}, \ldots\}$$

részcsoportját, azaz az n-edik hatványok által alkotott részcsoportját (g a $\mathbb{F}_p^*$ ciklikus csoport egy generátora). Látható, hogy ennek a részcsoportnak az elemszáma, $|H| \geq \frac{p-1}{n}$. Ekkor $\mathbb{F}_p^*$ felbomlik H szerinti mellékosztályokra.

$$\mathbb{F}_p^* = m_1 H \dot{\cup} m_2 H \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} m_\ell H$$

A mellékosztályok ℓ száma $\ell = \frac{|\mathbb{F}_p^*|}{|H|} = \frac{p-1}{|H|} \leq n$.

Tekintsük $\mathbb{F}_p^* \equiv [p-1] = \{1, 2, \ldots, p-1\}$-nek, azt az n színezését, ahol $m_i H$ elemei az i-edik színt kapják. Ekkor a Schur-lemmát alkalmazva $\nu = p - 1$, és $c = n$ paraméterekkel adódik, hogy alkalmas színre/mellékosztálya ($m_i H$) és ilyen színben/ezen mellékosztályban alkalmas x, y és z elemre ($x, y, z \in m_i H$) teljesül, hogy $x + y = z$. Azaz $x = m_i {x_0}^n$, $y = m_i {y_0}^n$, $z = m_i {z_0}^n$ és

$$m_i {x_0}^n + m_i {y_0}^n \equiv_p \; m_i {z_0}^n.$$

m_i-vel leosztva ($m_i \neq 0$), adódik hogy

$${x_0}^n + {y_0}^n \equiv_p \; {z_0}^n,$$

ahol ${x_0}^n$, ${y_0}^n$, ${z_0}^n \in H$, speciálisan ${x_0}^n$, ${y_0}^n$, ${z_0}^n \not\equiv_p \; 0$.

Ezzel a keresett nem triviális megoldásokat megtaláltuk. ■

Ahogy Ramsey-tétele elvezet a Ramsey-számok definíciójához a Schur-lemmán is alapul egy fontos definíció.

Definíció. Legyen $c \in \mathbb{N}^+$ tetszőleges, ekkor az $Sch(c)$ legyen az a minimális ν szám, amire $[\nu]$ tetszőleges c színezésében lesz monokromatikus $\{x, y, z\}$, amelyre $x + y = z$, azaz a fenti lemmában az „elég nagy ν” pontos határa. $Sch(c)$ a c paraméterű Schur-szám.

A Schur-lemma — ami továbbiakban számunkra az igazi Schur-tétel lesz — további kutatásokat indított el. Az elért eredmények közül kiemelkedik az alábbi.

3. Tétel (van der Waerden tétele, 1927). *Elég nagy n-re, $[n]$-nek tetszőleges c színezésére lesz monokromatikus k hosszú, nem konstans számtani sorozat.*

Ismét fontos megemlítenünk a tétellel kapcsolatos számsorozatot, ami leírja a tételben szereplő „elég nagy” fogalmat.

Definíció. Azt a legkisebb n számot, amelyre a fenti tétel igaz $W_c(k)$-val jelöljük.

A tétel bizonyítását a következő részben vázoljuk.

2. Ramsey-féle tételek pozícióhalmazokra

A pozíciós játékoknak sokféle válatozata van, általában kétszemélyes játék, ahol a két játékos felváltva foglal el még szabad pozíciókat egy tábláról, azzal a céllal, hogy elérjen valamilyen (nyerő) alakzatot.

Az egyik legismertebb változat az amőba. Itt a tábla (a pozíciók halmaza egy végtelen sík négyzetrács. A nyerőalakzatok sorban, oszlopban vagy valamelyik átlós irányban szomszédos öt mező. Egy másik játék a Tic-Tac-Toe, ahol a tábla egy 3×3-as táblázat, a nyerő alakzatok a sorok, oszlopok és a két áltó pozícióhármasai.

A továbbiakban a Tic-Tac-Toe egy általánosítását vizsgáljuk. Táblának a következő lesz.

Definíció. $U_k^d = \{\text{pozíciók halmaza}\} = \{1, 2, \ldots, k\}^d$.

Azaz két paraméterünk is van: k a tábla „szélessége”, d a tábla dimenziója. Tehát egy pozíciót egy d dimenziós vektorral tudunk leírni, melynek koordinátái 1-től, k-ig terjedő számok lehetnek.

Ez a megállapodás természetes. Például az eredeti Tic-tac-Toe játék pozíciói azonosíthatók a

$$(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)$$

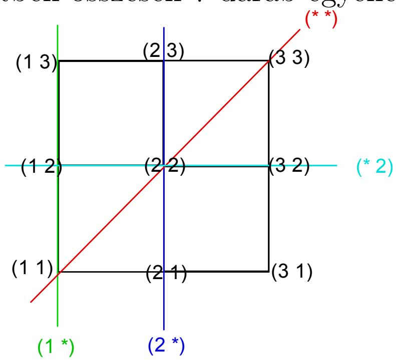
elemekkel. A sakktábla pozícióinál a szokás az $a1, a2, \ldots, h7, h8$ elemekkel való azonosítás, habár használhatnánk itt is az $11, 12, 13, \ldots, 86, 87, 88$ számjegypárokat.

Most lássuk az általános játékunk nyerő pozícióit.

Definíció. Legyen $e \in \{*, 1, \ldots, k\}^d \backslash \{1, 2, \ldots, k\}^d$, melyhez hozzárendelünk egy $\mathcal{L}_e = \{P_1, P_2, \ldots, P_k\}$ egyenest, ahol P_i azt a pozíciót jelöli, amelyet úgy kapunk, hogy e-ben a csillagokat i-vel helyettesítjük.

Azaz egyenesen pozíciók olyan halmazát értjük, melyhez van indexeknek olyan nemüres S halmaza, hogy az S-en kívüli koordinátái fixek, belül pedig minden koordinátája ugyanazt az értéket veszi fel. U_k^d minden egyenese k darab pozíciót tartalmaz.

Példa. A következő ábrán $k = 3$, és $d = 2$ esetre láthatunk példát. Az $(1\ *)$ egyenesen (zöld színű), olyan pontok vannak melyek első koordinátája 1, és $S = \{2\}$, ugyanis a második koordináta mindig annyi ahanyadik pontot vesszük, vagyis az $(1\ *)$ egyenesen az $(1\ 1)$, $(1\ 2)$ és $(1\ 3)$ pontok helyezkednek el. A $(*\ *)$ egyenesen (piros színű) az $(1\ 1)$, $(2\ 2)$ és $(3\ 3)$ pontok vannak. Nyílván a másik átló nem lesz már egyenes. Ebben az esetben összesen 7 darab egyenes van.



Megjegyzés. Az U_k^d táblán $(k+1)^d - k^d$ darab egyenes van.

Mielőtt kimondanánk fő tételünket általánosítsuk az egyenes fogalmát.

Definíció. Az U_k^d táblán egy e-dimenziós alteret egy $a \in \{*_1, *_2, \ldots, *_e, 1, 2, \ldots, k\}^d$ vektorral írhatunk le, amelyben minden indexelt csillag legalább egyszer szerepel. Az ezzel leírt $\mathcal{A}_a$ altér elemeit úgy kapjuk, hogy a $*_i$-ket ugyanazzal az $\{1, 2, \ldots, k\}$-beli elemmel helyettesítjük (különböző i-kre egymástól függetlenül). Azaz egy e-dimenziós altér k^e darab pozíciót foglal el. Az $e = 1$ esetén az 1-dimenziós altér egy egyenes.

Lássuk a fejezet fő eerdményét.

4. Tétel (Hales—Jewett-tétel, 1963). *Minden k-ra (minden táblaszélességre), minden c-re (minden paletta méretre) elég nagy d esetén az U_k^d tábla pozícióit tetszőlegesen c-színezve lesz monokromatikus egyenes.*

Ezt úgy is értelmezhetjük, hogy a fenti táblán elég nagy dimenzió esetén, ha c játékos osztozik a pozíciókon, akkor nem lehet döntetlen, azaz valamelyik játékos elér/színosztály tartalmaz egyenest/nyerő pozícióhalmazt.

Megjegyzés. Hales—Jewett-tételből következik a van der Waerden-tétel:

k legyen a van der Waerden tételben keresett számtani sorozat hossza. A Hales—Jewett-tételben ehhez (mint táblaszélességhez) tartozik egy d dimenzió. Legyen $n = k^d$. Tekintsük a $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ halmazt és elemeit írjuk k-as számrendszerbe. Ha átíráskor a számjegysorozatokat 0-kal előlről kiegyészítjük d hosszúvá, akkor

$$\{0, 1, \ldots, n-1\} \longleftrightarrow \{0, 1, \ldots, k-1\}^d$$

bijekciót kapunk. Azaz a van der Waerden tételében szereplő számainkat azonosítjuk egy tábla pozícióival. A van der Waerden tételének színezése megfelel táblánk egy Hales—Jewett-féle színezésének, amiben a Hales—Jewett-tétel garantál egy monokromatikus egyenest. Ennek pozícióit visszakódolva számokká kapunk egy monokromatikus k hosszú számtani sorozatot, ahogy Van der Waerden tétel állítja.

Definíció. Azt a minimális dimenziót, amelyre a fenti tétel igaz $HJ_c(k)$-val jelöljük. Ezek a k, c paraméterű Hales–Jewett-számok.

Bizonyítás. (Bizonyítás vázlat) A bizonyítás k-ra, azaz a táblaszélességre vonatkozó teljes indukcióval történik.

$k = 2$ esetben vegyük észre, hogy a $00\ldots000$, $00\ldots001$,$00\ldots011$, $\ldots$, $01\ldots111$, $11\ldots111$ azaz monoton sorozattal leírt pozíciók ($d+1$ elemű) halmaza olyan, hogy bármely kettő egy egyenest alkot. Ha $d \geq c$, akkor a skatulya-elv garantál két egyszínű elemet, azaz monokromatikus egyenest.

Az indukciós lépés: Tegyük fel, hogy k-ra teljesül a tétel (HJ-Állítás(k)) és $k+1$-re kell belátni (HJ-Állítás($k+1$)). Ez a nehéz rész. Két részre bontjuk. Bevezetünk egy köztes állítást, jelölése: Állítás($k+\frac{1}{2}$). A bizonyítás menete HJ-Állítás(k) $\Rightarrow$ Állítás($k+\frac{1}{2}$) $\Rightarrow$ HJ-Állítás(k) lesz.

A közbülső állítás megfogalmazásához (bizonyításunk érdemi részéhez) előkészületek kellenek.

Táblánk U^d_{k+1} lesz. Azaz megtesszük a „szélesítés" lépését. Egy e paraméterünk lesz, ami egy altér dimenziója. Azaz ismét nehezítünk, egyenes helyett egy előírt nagyságú alteret keresünk. A színezettségnél viszont könnyítünk. Monokromatikusság helyett beérjük az alábbi szépen színezettséggel.

Alterünket elemeit azonosítjuk U^e_{k+1} pozícióival. Ebből kiválasztjuk az alábbi részhalmazt

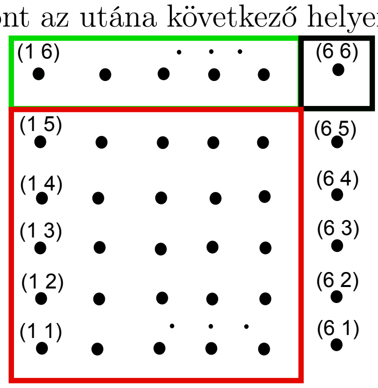
$$U^e_{k+1} \supseteq \{(a_1, a_2, \ldots, a_e) : \text{ ha } a_i = k+1 \text{ , akkor } \forall j > i\text{-re } a_j = k+1\} \overset{jel}{=} S^e_{k+1}.$$

Azaz S^e_{k+1}-t megkaphatjuk a következő módon

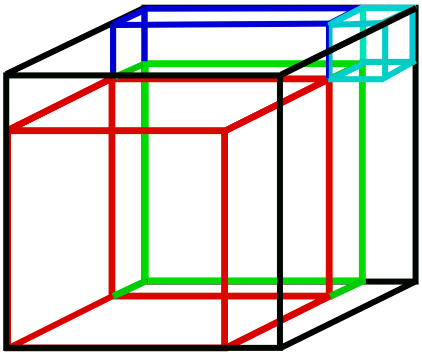
$$S^e_{k+1} = \bigcup_{i=0}^{e} S^e_{k+1}(i),$$

ahol $S^e_{k+1}(i)$-ben azok a szám e-sek vannak, amelyben az első $e-i$ darab legfeljebb k, majd i darab $k+1$-es következik.

Példa. $k = 6$ és $e = 2$. Az $S^2_6(2)$-nek a fekete négyzet felel meg, mivel ekkor már a_1-től 6-os számjegynek kell állnia mindenhol. A zöld téglalap az $S^2_6(1)$-et, a piros négyzet az $S^2_6(0)$-át jelöli. A nem bekeretezett rész nem felel meg a feltételnek, mert az első helyen 6-os áll, viszont az utána következő helyen már 6-nál kisebb szám áll.



Példa. Az alábbi ábrán $e = 3$ eset látható. A „piros kocka"$= S^3_k(0)$, „zöld téglatest"$= S^2_6(1)$, „kék téglatest"$= S^2_6(2)$ és „világoskék kocka"$= S^2_6(3)$.



Egy altér *szépen színezett*, ha mindegyik $S_{k+1}^e(i)$ halmaz monokromatikus.

Megjegyezzük, hogy az $S_{k+1}^e(i)$ halmazok ($i = 0, 1, 2, \ldots, e$) nem fedik le a táblát. A le nem fedett részre semmilyen színezési feltételünk nincs. A különböző i-k által kijelölt részek függetlenek. Mindegyikükön monokromatikusnak kell a színezésnek lennei, de a különböző részek lehetnek különböző színűek (ahogy azonos színűek is).

Ezekután kimondhatjuk a közbülső állításunkat:

5. Állítás (Állítás($k + \frac{1}{2}$)). *Tetszőleges e és c esetén, elég nagy d dimenzióban U_{k+1}^d pozícióinak tetszőleges c színezésére garantáltan található olyan e-dimenziós altér, ami szépen színezett.*

Állítás($k + \frac{1}{2}$) $\Rightarrow$ HJ-Állítás(k): Válasszuk e-t HJ-Állítás(k) állítás palettaméretének és a közbülső állítás elég nagy dimenziójában dolgozzunk. A közbülső állítás $e + 1$ halmaz monokromatikusságát írja elő. A skatulya-elv alapján lesz kettő, ami azonos színű. A Hales—Jewett-állítás igazolása onnan adódik, hogy az $S_{k+1}^e(i)$ halmazok közül bármely kettő uniója tartalmaz egyenest. (A példák tanulmányozása után egyszerűen ellenőrizhető.)

HJ-Állítás(k) $\Rightarrow$ Állítás($k+\frac{1}{2}$): e-re vonatkozó indukcióval igazoljuk az Állítás($k+\frac{1}{2}$)-t.

$e = 1$ könnyen adódik: U_{k+1}^d pozíciói tartalmazzák a keskenyebb U_k^d táblát, amiben feltevésünk garantál monokromatikus egyenest. Ez a nagyobb táblában egy egyenes része lesz (a $*$ most már a $k + 1$ értéket is felveheti). Azaz a nagyobb táblán a megfelelő egyenes a keskeny, de monokromatikus egyenes egy pozícióval való bővítése. A monokromatikusság elveszhet, de mindenképpen szépen színezett egyenest/1-dimenziós alteret kapunk.

e-ről $e + 1$-re való ugrás: Az elég nagy d dimenziót $d' + d''$ alakban keressük, ahol mindkét tag megfelelően nagy lesz. Vegyünk egy tetszőleges színezést. Meg kell találnunk a szépen színezett $e + 1$-dimenziós alteret. Minden pozíciónak lesz egy első d' koordinátája, ez a pozíció *eleje* és lesz utolsó d'' koordinátája, a pozíció *vége*. (A táblánk két kisebb dimenziós tábla szorzata.) A pozíció elejét rögzítsük. A rögzítésre a lehetőségeket $U_{k+1}^{d'}$ pozícióival azonosíthatjuk. Egy rögzítéshez a lehetséges végek $U_{k+1}^{d''}$ pozícióival azonosíthatók. Ebben mindegyik vég (a rögzített elejével) leír egy színezett pozíciót a teljes táblában. Azaz a rögzítéshez tartozik egy színezett $U_{k+1}^{d''}$. Erre $c^{(k+1)^{d''}}$ darab lehetőség van. Mindegyiket felfoghatjuk egy „szuper-színnek”. Azaz $U_{k+1}^{d'}$ táblának van egy szuper-színezése. Erre tudjuk a HJ-Állítás(k)-t, és így található benne egy szépen színezett egyenes (lásd $e = 1$ esete). Az egyenes kijelölése: első d' koordinátát „csillagozzuk $*$-gal, illetve rögzítjük”.

A szépen színezett egyenes $S_0^1(0)$ részhalmaza monokromatikus, azaz mindegyik eleméhez — pozíció előhöz — ugyanaz a szuper-szín, azaz ugyanaz a színezett $U_{k+1}^{d''}$

tábla tartozik. d'' legyen olyan nagy, hogy ebben legyen e-dimenziós szépen színezett altér. Ezen altér kijelölése: az utolsó d'' koordinátát „csillagozzuk $*_1, *_2, \ldots, *_e$-vel, illetve rögzítjük".

Az egyenes és az altér kijelölése a teljes tábla egy $e+1$-dimenziós alteréhez vezet (a csillagok sorrendje: $*, *_1, *_2, \ldots, *_e$). Azt álítjuk, hogy ez szépen színezett. Ez könnyen ellenőrizhető, ami a bizonyítást befejezi. ∎