

## 1. Síkgráfok

**Definíció.** Egy gráf síkba rajzolható, ha lerajzolható úgy, az élgörbéknek a végpontokon kívül nincs más közös pontja.

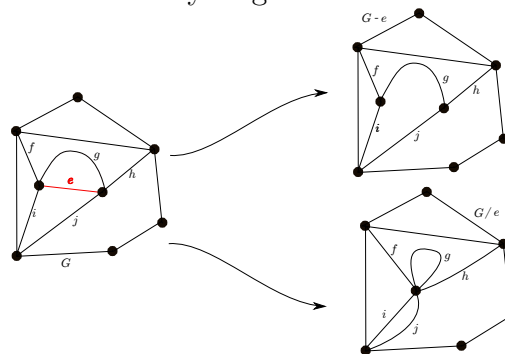
**Definíció.** Legyen  $G$  egy gráf,  $e = xy \in E$  egy éle.

Ekkor  $G - e$  (vagy más jelöléssel  $G \setminus e$ ) azt a gráfot jelöli, amit  $G$ -ből az  $e$  él elhagyásával kapunk.

Továbbá jelölje  $G/e$  az  $e$  él összehúzásával/kontrakciójával nyert gráfot, mely az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:

- $V(G/e) = (V(G) - \{x, y\}) \cup \{[e]\}$ ,
- $E(G/e) = E(G) \setminus \{e\}$ ,
- $I(G/e)$  természetesen adódik: Amely él eddig  $x$ -re vagy  $y$ -ra illeszkedett, az most az  $x$  és  $y$  csúcsokat reprezentáló új  $[e]$  csúcsra illeszkedik. A többi illeszkedés marad.

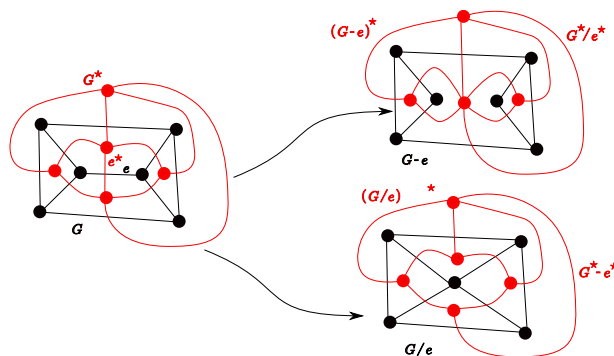
**Példa.** Az alábbi ábrán egy  $G$  gráfbeli  $e$  (piros) élt emelünk ki, majd megmutatjuk az  $e$  elhagyása és  $e$  összehúzásával nyert gráfokat.



**Megjegyzés.** Ha a fent említett  $e$  él hurokél, akkor  $G/e = G - e$ .

**Emlékeztető.** Legyen  $G$  egy síkrarajzolt gráf. Ekkor a  $G$  gráf duálisán azt a  $G^*$  gráfot értjük, melynek csúcsai  $G$  tartományai, élei pedig megfelelnek  $G$  éleinek úgy, hogy az  $e$  él  $e^*$  párja azon két tartományt reprezentáló csúcsokat köti össze, melyek  $e$  két oldalán szerepelnek (így speciálisan szomszédosak).

**Példa.** A következő két ábra a fent ismertetett két operációt, az élelanyagást, illetve az élösszehúzást illusztrálja a  $G$  gráfon, illetve annak  $G^*$  duálisán.



Az ábra azt sugallja, hogy  $(G - e)^* = G^*/e^*$  és  $(G/e)^* = G^* - e^*$ .

1. **Állítás.** (i)  $(G - e)^* = G^*/e^*$ ,

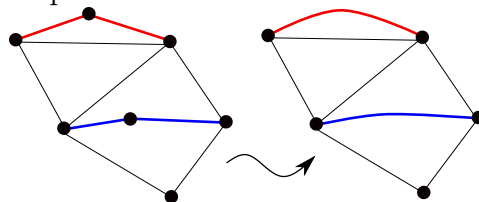
(ii)  $(G/e)^* = G^* - e^*$ .

Az érdeklődő hallgató számára a fenti állítás bizonyítása egy lehetséges feladat.

**Definíció.** Legyen  $G$  egy gráf.

- Ha a  $G$  gráfból az  $R$  gráf él- illetve csúcselhagyásoperációk segítségével megkapható, akkor  $R$ -et a  $G$  gráf részgráfjának nevezzük. Jelölésben:  $R \subseteq G$ .
- Ha a  $G$  gráfból az  $M$  gráf él- illetve csúcselhagyás és élösszehúzás operációk alkalmazásával megkapható, akkor a  $G$  gráfban  $H$  minorként szerepel ( $H$  a  $G$  minorja). Jelölésben:  $M \preceq G$ .
- Ha a  $G$  gráfból a  $T$  gráf egy másodfokú csúcsba futó két él összevonásával (lásd alább) és él- illetve csúcselhagyás operációkkal nyerhető, akkor  $T$  a  $G$  gráf topologikus részgráfja. Jelölés:  $T \leq G$ .

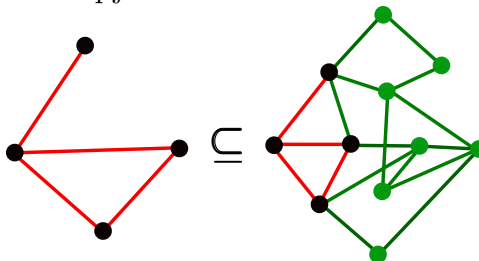
**Példa.** Az alábbi ábra két piros él és két kék él összevonását mutatja:



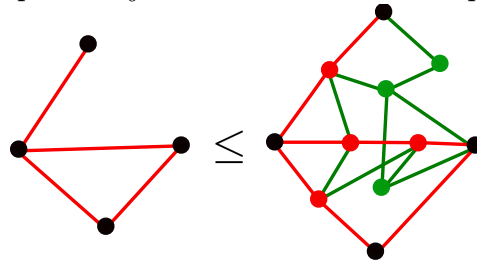
Az  $e$  és  $f$  élek összevonásával kapott gráf jelölése legyen  $G(e \wr f)$ .

**Megjegyzés.**  $G(e \wr e') \simeq G/e \simeq G/e'$ .

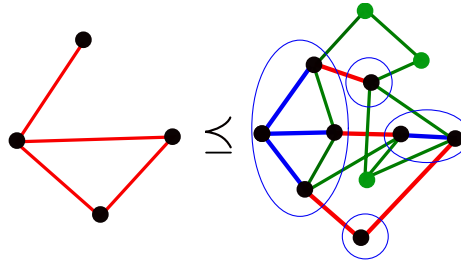
**Példa.** A  $R$  piros gráf a  $G$  gráf részgráfja, hiszen a zölddel jelölt éleket és csúcsokat elhagyva éppen az  $R$  gráfot kapjuk.



**Példa.** A  $T$  piros gráf a  $G$  gráf topologikus részgráfja, hiszen a zölddel jelölt éleket és csúcsokat elhagyva, a pirossal jelölt éleket összevonva éppen a  $T$  gráfot kapjuk.

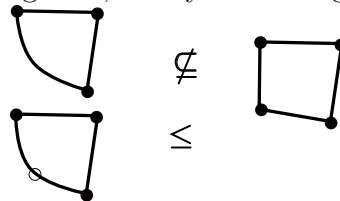


**Példa.** Az  $M$  piros gráf a  $G$  gráf minorja, hiszen ha a zölddel jelölt éleket elhagyjuk, a kijelölt klaszterekben szereplő kék feszítőfa éleit összevonzuk, akkor éppen az  $M$  gráfhoz jutunk. (A klaszterek zsugorodnak össze  $M$  csúcsaivá.)



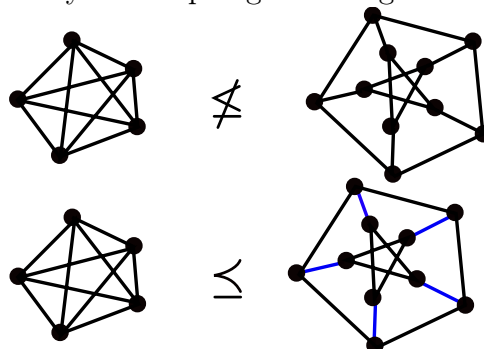
**Észrevétel.** Egy részgráf topologikus részgráf is egyben. Egy topologikus részgráf minor is egyben. Formálisan, ha  $G, R$  gráfok, akkor  $G \supseteq R \Rightarrow G \geq R \Rightarrow G \succeq R$ . Visszafelé viszont egyik állítás sem érvényes (lásd alábbi példák).

**Példa.** Példa topologikus részgráfra, amely nem részgráf:



$C_4$ -ből  $C_3$  bármely két összefüggő  $e$  és  $e'$  élek összevonásával megkapható, vagyis  $C_3$   $C_4$  topologikus részgráfja.  $C_4$ -nek több csúcsa van mint  $C_3$ -nak. Részgráfság esetén alkalmazni kellene a csúcshagyás operációt, ami bármilyen végrehajtás esetén egy kétélű gráfhoz vezetne. Tehát  $C_3$  nem részgráfja  $C_4$ -nek.

**Példa.** Példa minorra, amely nem topologikus részgráf.



A Petersen-gráfból  $K_5$  a kék színnel jelölt élek összehúzásával adódik, tehát  $K_5$  a Petersen-gráfban minor.  $K_5$  nem topologikus részgráfja a Petersen-gráfnak, hiszen a Petersen-gráf minden csúcsának fokszáma 3,  $K_5$  csúcsainak fokszáma viszont 4.

Két másodfokú csúcsba futó él összevonásával, csúcs- illetve élelhogyas-operációval viszont nem lehet fokszámot növelni.

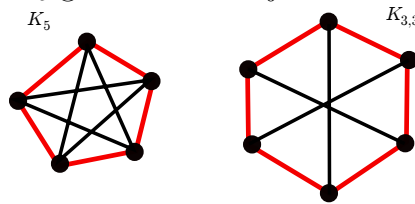
**Észrevétel.** Ha  $G$  síkgráf,  $R \subseteq G; T \preceq G; M \preceq G$  teljesül, akkor  $R, T, M$  is síkgráf.

**2. Tétel (Euler tétele).** *A  $K_5$  és  $K_{3,3}$  gráfok nem síkgráfok.*

**Megjegyzés.** A  $K_{3,3}$  gráf egy másik neve a három-ház-három-kút gráf. Ez onnan ered, hogy a tétel állítása megfogalmazható úgy is, hogy nem tervezhető kilenc út három ház és három kút között (mindegyik háztól mindegyik kúthoz) úgy, hogy az utaknak a közös végpontokon (amennyiben van ilyen) ne legyen közös pontja.

**Bizonyítás.** A tétel fontos. Két bizonyítást is megemlítünk

**1. Bizonyítás:** A  $K_{3,3}$  és  $K_5$  gráf alábbi lerajzolásából indulunk ki.



Mindkét lerajzolás kiemel egy-egy gráfelméleti kört (piros színű élek). A bizonyítás alapmegjegyzése: Egy körgráfot lényegében egyféleképpen lehet szépen lerajzolni. Egy lerajzolt kör a síkot belső (korlátos) és külső (nem korlátos) részre osztja. (Lásd Jordan-féle görbetétel, illetve Schönflies-tétel.)

Az ábrákon a kör mellett további élek szerepelnek (ezekre mint hidak hivatkozunk). Ezeket viszonyíthatjuk a kör lerajzolásához: lehetnek külsők és belsők. A két szerep (külső/belső) szimmetrikus. Így feltehető, hogy többségük belül halad.

Tegyük fel, hogy a kör szép lerajzolása a két gráf teljes szép lerajzolásává terjeszthető ki. Ezek után a két gráfot külön kezeljük:

$K_{3,3}$ : Feltevésünk szerint belül (ami topologikusan azonos egy körvonal belsejével) legalább két híd van, amik keresztezik egymást és átmetszés nélkül lerajzolhatók. Ez lehetetlen.

$K_5$ : Feltevésünk szerint belül legalább három híd van. Bárhogy választjuk is ki a belülrre kerülő három élt, lesz közöttük kettő, ami az előző esethez hasonlóan nem fut össze és keresztezi egymást. Ez lehetetlen.

**2. Bizonyítás:** (Euler tételére hivatkozó bizonyítás.) Néhány BSc-s előadásban szereplő tételt idézünk fel.

**Észrevétel (Euler tétele).** Legyen  $G$  összefüggő, síkrarajzolt gráf. Ekkor  $t(G) + |E(G)| + |V(G)| = 2$ , ahol  $t(G)$  a tartományok/országok száma.

**3. Következmény.** *Legyen  $G$  egyszerű síkgráf, továbbá  $|V(G)| \geq 3$ . Ekkor*

(i)  $|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6$ ,

(ii) *ha  $G$  ráadásul páros gráf, akkor  $|E(G)| \leq 2|V(G)| - 4$ .*

A következmény (i) része adja, hogy  $K_5$  nem síkgráf. Valóban  $K_5$  nem teljesíti a  $|E| \leq 3|V| - 6$  feltételt ( $|E| = 10$  és  $3|V| - 6 = 3 \cdot 5 - 6 = 9$ ).

A következmény (ii) része adja, hogy  $K_{3,3}$  nem síkgráf. Valóban  $K_{3,3}$  páros gráf és nem teljesíti a  $|E| \leq 2|V| - 4$  feltételt ( $|E| = 9$  és  $2|V| - 4 = 2 \cdot 6 - 4 = 8$ ). ■

**4. Következmény.** Ha  $G$  síkgráf, akkor  $K_5$  és  $K_{3,3}$  nem lehet részgráf  $G$ -ben,  $K_5$  és  $K_{3,3}$  nem lehet topologikus részgráf  $G$ -ben, illetve  $K_5$  és  $K_{3,3}$  nem lehet minor  $G$ -ben.

Ha  $K_5$  vagy  $K_{3,3}$  minden élére egy új csúcsot helyezünk, akkor ugyancsak nem síkgráfhoz jutunk, de részgráfként már nem találjuk a  $K_5$ ,  $K_{3,3}$  gráfokat. Azok csak topologikus részgráfként, illetve minorként lesznek  $G$ -ben. Azaz az első állítás nem megfordítható. Az utolsó két állítás viszont megfordítható.

**5. Tétel.** A következő három állítás ekvivalens:

- (i)  $A$   $G$  gráf síkgráf.
- (ii)  $A$   $G$  gráfnak nem topologikus részgráfja a  $K_5$  és  $K_{3,3}$  gráf ( $G \not\supseteq K_5; K_{3,3}$ ).
- (iii)  $A$   $G$  gráfban nincs  $K_5$  és  $K_{3,3}$  minor ( $G \not\supseteq K_5; K_{3,3}$ ).

A fenti hármas ekvivalencia két független eredmény összegzése: (i)  $\Leftrightarrow$  (ii) a Kuratowski-tétel, míg (i)  $\Leftrightarrow$  (iii) a Wagner-tétel.

## 2. A Wagner-tétel bizonyítása háromszorosan összefüggő gráfokra

Az alacsony összefüggőségű gráfok bizonyos részgráfjaik egyszerű összeragasztásával kaphatók. Ha ezek a részek szépen lerajzolhatók, akkor ezek a lerajzolások is összeragaszthatók  $G$  szép lerajzolásává. Ezek technikai részletek, a következő szekcióra hagyjuk. Mi itt a lényegi résszel foglalkozunk.

**Főeset:**  $A$   $G$  gráf 3-szorosan összefüggő.

A továbbiakban ebben az esetben a Wagner-tétel nem triviális irányának bizonyításával foglalkozunk, vagyis azt szeretnénk belátni, hogy ha a háromszorosan összefüggő  $G$  gráf nem tartalmaz  $K_5$  és  $K_{3,3}$  minort, akkor szépen lerajzolható a síkra.

Kezdeti észrevétel: Feltehető, hogy a  $G$  gráf egyszerű, hiszen hurokél és párhuzamos él behúzása nem rontja el a síkra rajzolhatóságot.

A Wagner-tétel  $|V| \leq 4$  esetén egyszerűen látható. A továbbiakban feltesszük, hogy  $|V| \geq 5$ .

A bizonyítás  $|V|$ -re vonatkozó indukcióként is felfogható, de egy rekurzív síkra rajzoló algoritmus is kiolvasható belőle.

A bizonyítás további részéhez szükségünk lesz a következő lemmára és annak következményére.

**6. Lemma.** Legyen  $G$  egyszerű, háromszorosan összefüggő gráf, melynek csúcsszáma legalább 5. Ekkor található olyan  $e \in E(G)$  él, melyre a  $G/e$  gráf 3-szorosan összefüggő.

A lemma bizonyítása is csak egy kitérő a Wagner-tétel indoklásában. A következő fejezetre hagyjuk.

**7. Következmény.** Legyen  $G$  egyszerű, háromszorosan összefüggő gráf, melynek csúcsszáma legalább 5. Ekkor található olyan  $xy \in E(G)$  él, melyre a  $G - \{x, y\}$  gráf kétszeresen összefüggő.

**Következmény bizonyítása:** A lemmában szereplő  $e$  él megfelelő, hiszen  $G - \{x, y\} = (G/e) - [e]$  kétszeresen összefüggő lesz. Q.e.d.

Legyen  $e$  a Lemma és a Következmény közös éle.  $G/e$  nem tartalmaz  $K_5$ , illetve  $K_{3,3}$  minort (minorjaik  $G$ -nek is minorjai), háromszorosan összefüggő, így az indukciós feltevés alapján  $G/e$  szépen lerajzolható. Ebben a lerajzolásban ott van a  $G - \{x, y\}$  gráf lerajzolása és a kontrahált élt reprezentáló  $[e]$  csúcs is. A  $G - \{x, y\}$  gráf kétszeresen összefüggő, így lerajzolásának minden tartományát egy kör határolja. Azt is amely belsejében ott van az  $[e]$  csúcs. Legyen  $C$  ezen tartomány határoló körgráf.

Legyen  $P = N(x) \cap V(C)$ ,  $K = N(y) \cap V(C)$ , ahol  $N(x)/N(y)$  az  $x/y$  csúcs szomszédainak halmaza.  $P$  elemeire mint piros,  $K$  elemeire mint kék csúcsok hivatkozunk. Fontos látni, hogy  $P \cap K \neq \emptyset$  eset is előfordulhat, azaz a két szín nem két kizáró kategória.

A következő két fogalom és egy főlemma segítségével juthatunk el a bizonyítás befejezéséhez.

**Definíció.** Egy kört  $C$  kört  $u$  és  $v$  csúcsa ( $u, v \in V(C)$ ) két zárt ívre bontja, mégpedig az  $[u, v]^\frown$  és  $[v, u]^\frown$  ívre. A két ív a két  $uv$  út csúcshalmaza. Körünk szépen lerajzolt a síkra, így az ívek megkülönböztethetők: a jelölésben az első csúcsból indulva, óramutató járása szerint haladva jutunk el a második csúcsához. A két ív (csúcshalmaz) metszete az  $\{u, v\}$  csúcsok.  $(u, v)^\frown$  legyen  $[u, v]^\frown - \{u, v\}$ .

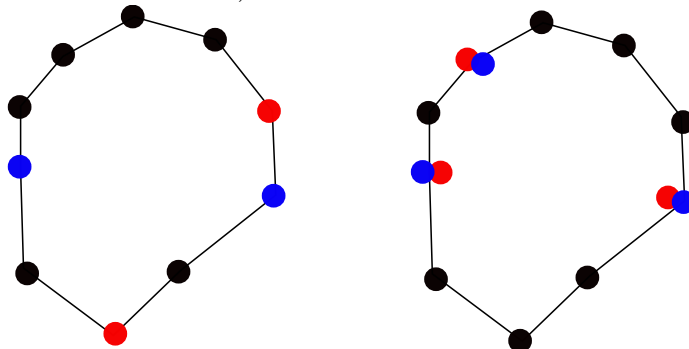
**Definíció.** Legyen  $A$  és  $B$  a  $C$  kör csúcshalmazának két részhalmaza. Azt mondjuk, hogy  $A$  és  $B$  szeparálható, ha megadhatóak olyan  $u, v \in V(C)$  csúcsok, melyekre  $A \subseteq [u, v]^\frown$  és  $B \subseteq [v, u]^\frown$ , vagyis létezik olyan felbontása a körnek, hogy  $A$  az egyik ív,  $B$  a másik ív csúcsainak részhalmaza.

Megjegyezzük, hogy a két ív zárt, így végpontjaik közösek. A definíció megengedi, hogy nem-diszjunkt pontthalmazok is szeparálhatók legyenek. A következő kombinatorikus lemma a szeparálhatóság akadályait írja le.

**8. Tétel (Főlemma).** Legyen  $C$  egy kör és  $A$  és  $B$  a kör két véges részhalmaza.  $A$  és  $B$  pontosan akkor nem szeparálható, ha a következő két lehetőség valamelyike teljesül.

- (i) Létezik olyan  $a, a' \in A$  és  $b, b' \in B$  négy különböző csúcs, melyek a körön felváltva helyezkednek el, azaz az  $(a, a')^\frown$  ív  $b$  és  $b'$  közül pontosan egyet tartalmazzon.
- (ii)  $A = B$  és  $|A| = |B| = 3$ .

A szeparálhatóságot megakadályozó konfigurációk a következő ábrán láthatók ( $A$  és  $B$  a piros/kék színekkel kódolt).

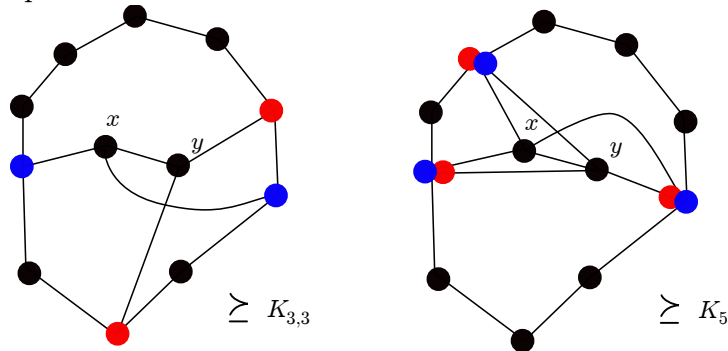


A lemma egyszerű eset analízissel ellenőrizhető. Ezt az érdeklődő hallgatóra bízunk.

A Wagner-tétel bizonyítása már egyszerűen adódik.

**9. Következmény.**  $P$  és  $K$  szeparálhatóak a  $C$  kör mentén.

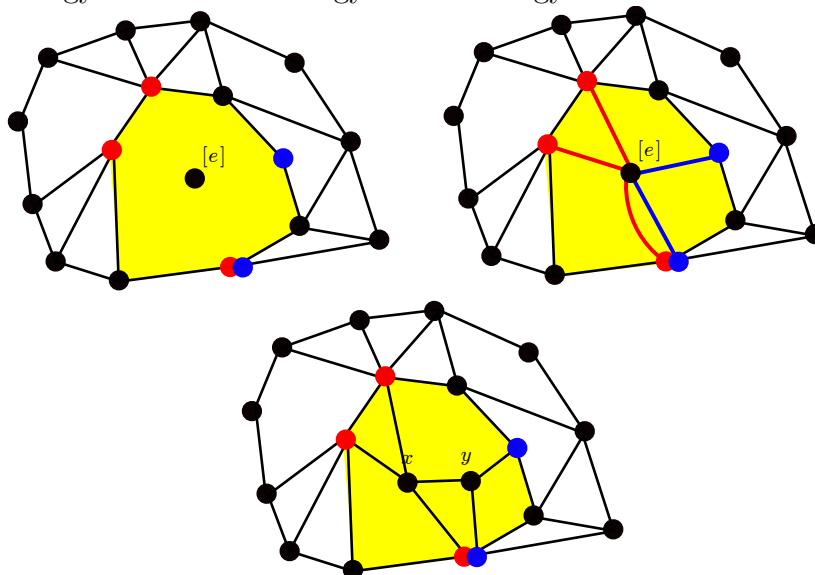
**Következmény bizonyítása:** Indirekt tegyük fel, hogy (i) vagy (ii) akadályok valamelyike fellép.



Látható, hogy az (i) esetben  $K_{3,3}$ , az (ii) esetben  $K_5$  jelenik meg minorként, ami ellentmondás, hiszen  $G$ -ről feltettük, hogy nincs benne  $K_5$  illetve  $K_{3,3}$  minor. Q.e.d.

A  $P$  halmaz és a  $K$  halmaz pontjai ott vannak a  $C$  kör éleinek görbésén (amely élgörbék egy Jordan-görbévé olvadnak össze). Ábrázoljuk a  $G - \{x, y\}$  megfelelő tartományát és az  $[e]$  csúcsot, ahol  $[e]$  az összehúzott  $e$  élt reprezentáló csúcs pontja.

Az  $[e]$  csúcsból kiinduló élek egy része eredetileg  $x$ -ből indult és  $P$  valamelyik eleméhez ment, másik részük eredetileg  $y$ -ből indult és  $K$  valamelyik eleméhez ment. Mivel  $P$  és  $K$  szeparált, ezért ezen éleknek megfelelő élgörbék megrajzolhatók átmetszés nélkül úgy, hogy az  $[e]$ -t reprezentáló csúcs körül a kiinduló görbék között egy blokkban legyenek a  $P$ -hez és egy blokkban legyenek a  $K$ -hez menő görbék.



$G/e$  ezen lerajzolásából  $G$  egy szép lerajzolás már könnyedén előállítható, ha a kontrakciót „visszavonjuk”. ■

### 3. A Wagner-tétel bizonyításának technikai részletei

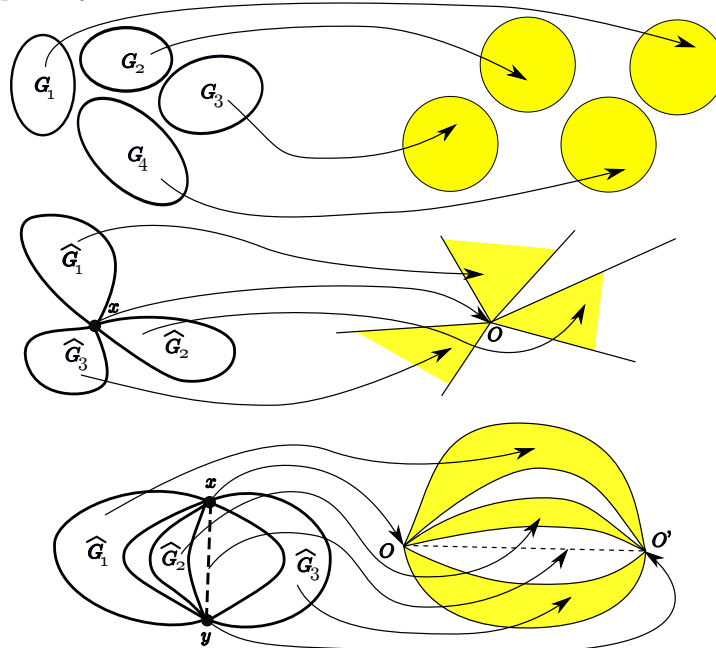
**10. Lemma.** *Ha Wagner-tételt tudjuk háromszorosan összefüggő gráfokra, akkor a tétel igaz.*

**Bizonyítás.**  $|V|$ -re vonatkozó teljes indukcióval igazoljuk a Wagner-tételt.  $|V| \leq 4$  esetben minden gráf szépen lerajzolható a síkra. Az indukciós lépéshez eseteket különböztetünk meg az összefüggőség foka szerint.

**1. eset:** *A  $G$  gráf nem összefüggő.* Ha  $G$  nem összefüggő, akkor jelölje  $G_1, G_2, \dots$  a gráfunk komponenseit. Egyik komponens sem tartalmazhat  $K_5$  és  $K_{3,3}$  minort, mindegyik komponens csúcsszáma kisebb mint  $G$ -é. Így az indukciós feltevés alapján mindegyik komponens szépen síkra rajzolható. Vegyünk fel komponensszámnyi diszjunkt egységkörlapot. Az egyes komponensek lerajzolásai lekicsinyíthetők (amennyiben szükséges) úgy, hogy az egyes körlapokba berajzolható legyen. Így  $G$  egy lerajzolásához jutunk.

**2. eset:** *A  $G$  gráf összefüggő, de nem 2-szeresen összefüggő.* Ekkor létezik  $x \in V(G)$  elvágó csúcs, melyre  $G - \{x\}$  több komponensre esik szét:  $G_1, G_2, G_3, \dots$ . Mindegyik komponenshez adjuk hozzá az  $x$  csúcsot (a komponenshez vezető élekkel). Az így kapott gráfok legyenek  $\widehat{G}_1, \widehat{G}_2, \dots$ . Ezek mind  $G$  részgráfjai. Ezért egyik sem tartalmazhat  $K_5$  és  $K_{3,3}$  minort, mindegyik csúcsszáma kisebb mint  $G$ -é. Így az indukciós feltevés alapján mindegyik  $\widehat{G}_i$  szépen síkra rajzolható.  $\widehat{G}_i$  szép lerajzolása módosítható úgy, hogy az  $x$  csúcsot realizáló  $P_x$  pont a nem korlátos tartomány határán legyen (például gömbre vetítéssel, majd a gömbrerajzolás alkalmas  $P_x$  környéki felvágásával). Ez a lerajzolás deformálható úgy, hogy egy szögtartományban legyen, ahol  $P_x$  a szögtartomány  $O$  csúcsába kerül.

Legyen  $\ell$  a  $\widehat{G}_i$  gráfok száma. Vegyünk fel  $\ell$  szögtartományt, amelyek diszjunktak kivéve közös csúcsukat,  $O$ -t. A fenti lerajzolásokat külön szögtartományba illesztve ezek  $G$  egy szép lerajzolásává állnak össze.



**3. eset:** *A  $G$  gráf 2-szeresen összefüggő, de nem 3-szorosan összefüggő.* Ekkor létezik  $x, y \in V(G)$  elvágó csúcspár, melyre  $G - \{x, y\}$  több komponensre esik szét:  $G_1, G_2, \dots$ . Mindegyik komponenshez adjuk hozzá az  $x$  és  $y$  csúcsot a komponenshez vezető élekkel. Az így kapott gráfok legyenek  $\widehat{G}_1, \widehat{G}_2, \dots$ . Ezek mind  $G$  részgráfjai.



Definíciójuk miatt egyikben sem lesz  $x$  és  $y$  szomszédos. ( $G_i$  bővítésénél csak az  $x$ ,  $y$ -ből a komponenshez vezető éleket adtuk hozzá.)

Legyen  $\widehat{G}_1^+, \widehat{G}_2^+, \dots$  azok a gráfok, amiket  $\widehat{G}_i$ -ből úgy kapunk, hogy  $x$ -et és  $y$ -t összekötjük. Ezek már nem szükségszerűen részgráfok  $G$ -ben. DE minorok! Ezért egyik sem tartalmazhat  $K_5$  és  $K_{3,3}$  minort, mindegyik csúcsszáma kisebb mint  $G$ -é. Így az indukciós feltevés alapján mindegyik  $\widehat{G}_i^+$  szépen síkra rajzolható.  $\widehat{G}_i^+$  szép lerajzolása módosítható úgy, hogy az  $e = xy$  élt realizáló  $\mathcal{G}_e$  élgörbe a nem korlátos tartomány határán legyen (például gömbre vetítéssel, majd a gömbrerajzolás alkalmas  $\mathcal{G}_e$  felezőpontjának környékén történő felvágásával). Ez a lerajzolás deformálható úgy, hogy  $\mathcal{G}_e$  egyenes  $OO'$ szakasz legyen ( $O$  reprezentálja az  $x$  és  $O'$  az  $y$  csúcsot), míg a lerajzolás többi része egy  $OO'$  feletti „holdacskába” essen.

Legyen  $\ell$  a  $\widehat{G}_i$  gráfok száma. Vegyünk fel  $\ell$  holdacskát, amelyek diszjunktak kivéve közös csúcsaikat,  $O, O'$ -t és elkerülik az  $OO'$  szakaszt. A  $\widehat{G}_i^+$  fenti lerajzolásában ott van  $\widehat{G}_i$  lerajzolása is, amit az  $i$ -edik holdacskában elhelyezhetünk ( $x$ -et  $O$ ,  $y$ -t  $O'$  reprezentálja). Ha szükséges, akkor az összeragasztott lerajzolásokhoz hozzávesszük az  $OO'$  szakaszt is az  $xy$  él reprezentálására. Így  $G$  egy szép lerajzolásához jutunk. ■

**11. Lemma.** *Legyen  $G$  egyszerű, háromszorosan összefüggő gráf, melynek csúcsszáma legalább 5. Ekkor található olyan  $e \in E(G)$  él, melyre a  $G/e$  gráf 3-szorosan összefüggő.*

**Bizonyítás.** A lemma bizonyítását nem végeztük el. ■

## 4. További kapcsolódó tételek

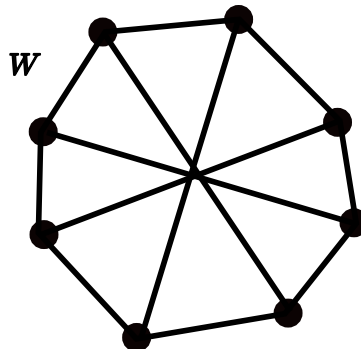
Végezetül néhány tétel kimondása következik bizonyítás nélkül.

**12. Tétel (Tutte-tétel).** *Ha  $G$  egyszerű, 3-szorosan összefüggő síkgráf, akkor lerajzolható úgy, hogy minden élgörbe egyenes szakasz, továbbá minden tartománya konvex sokszög.*

**13. Tétel (Fáry-tétel).** *Ha  $G$  egyszerű síkgráf, akkor lerajzolható úgy, hogy minden élgörbéje szakasz legyen.*

**14. Tétel (Steinitz-tétel).** *Egy  $G$  gráf pontosan akkor egy poliéder élgráfja, ha 3-szorosan összefüggő egyszerű gráf.*

**15. Tétel (Wagner struktúratétele).** *A  $G$  gráf pontosan akkor nem tartalmaz  $K_5$  minort, ha felépíthető síkgráfokból és  $W$  Wagner-gráfból (lásd alább) legfeljebb három pontú klikk menti összeragasztásokkal és csúcs- illetve élelhagyásokkal.*



**16. Következmény (Wagner színezési tétele).** *Ha a  $G$  gráf tartalmaz  $K_5$  minort, akkor a kromatikus száma legfeljebb 4.*

A Wagner-tétel alapján átírhatjuk a négy-szín-tételt: Ha a  $G$  gráf nem tartalmaz  $K_5$ , illetve  $K_{3,3}$  minort, akkor  $G$  kromatikus száma legfeljebb 4. Wagner színezési tétele azt mondja, hogy a négy-szín-tétel ezen alakjában elég csak  $K_5$ -t minorként kizárni. Ez az élesítés nagyon fontos.

Bizonyítása a struktúratétel után, a négy-szín-tételre vonatkozó hivatkozással egyszerű: A síkgráfok és a Wagner-gráf 4-színezhető, a klikkek menti ragasztás nem növeli meg a kromatikus számot. Azaz az élsítés nem sokkal nehezebb mint a négy-szín-tétel.

**17. Sejtés (Hadwiger-sejtés).** *Ha a  $G$  gráf nem tartalmaz  $K_{k+1}$  minort, akkor  $G$  kromatikus száma legfeljebb  $k$ .*

Illetve egy ekvivalens megfogalmazása:

**18. Sejtés (Hadwiger-sejtés).** *Ha a  $G$  gráf nem  $k$ -színezhető, akkor tartalmaz  $K_{k+1}$  minort.*

BSc-s tanulmányainkból tudjuk, hogy a minorság helyett részgráfsággal dolgozva a megfelelő állítás „nagyon hamis”. Nem annyira nyilvánvaló, hogy topologikus részgráfsággal dolgozva is (nagyon) hamis állításhoz jutunk (ezt láthatjuk, ha az interneten a ‘Hajós-conjecture’-re keresünk).

A minorokat használó Hadwiger-sejtés  $k = 2$  esetet triviális. A  $k = 3$  esete egyszerű. A  $k = 4$  eset igaz (Wagner színezési tétele), a négy-szín-tétellel ekvivalens (ahogy vázoltuk). Ahogy  $k$  nő a sejtés nehezedik (miért?). Ennek ellenére a  $k = 5$  eset (a négy-szín-tétel élesítése) bizonyított. A bizonyítása a négy-szín-tételre hivatkozik, de így is nagyon bonyolult.