Diszkrét Matematika MSc hallgatók számára

9. Előadás

Előadó: Hajnal Péter
Jegyzetelő: Bogya Norbert 2010. november 15.

1. (Csúcs)színezések

Ebben a fejezetben egyszerű gráfokkal dolgozunk, tehát itt minden gráfon egyszerű gráfot fogunk érteni. Emlékeztetőként idézzünk fel néhány korábban tanult definíciót és tételt.

Definíció. Egy $c : V(G) \to \mathbb{N}^+$ leképezést a G gráf egy (csúcs)színezésének nevezzük. A $c(v)$ számok a csúcs színei.

Definíció. A G gráf egy színezése jó színezés, ha minden $e \in E(G)$ élre $e = uv$ esetén $c(u) \neq c(v)$.

Definíció. A G gráf egy színezése k-színezés, ha a felhasznált színek száma k.

Definíció. Egy G gráf kromatikus száma

$$\chi(G) = \min \{k : \ G\text{-nek létezik jó } k\text{-színezése}\}.$$

Definíció. A G gráf esetén egy $F \subset V(G)$ csúcshalmazt független ponthalmaznak nevezünk, ha bármely két F-beli pont között sincs él.

Definíció. $\alpha(G) = \max \{|F| : F \text{ független ponthalmaz } G\text{-ben}\}$.

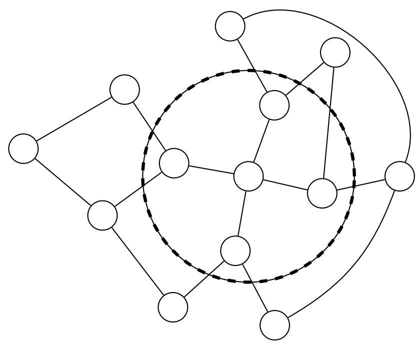
Definíció. A G gráf esetén egy $K \subset V(G)$ csúcshalmazt klikknek nevezünk, ha bármely két K-beli pont között van él.

Definíció. $\omega(G) = \max \{|K| : K \text{ klikk } G\text{-ben}\}$.

Észrevétel. Tetszőleges G gráfra $\chi(G) \geq \omega(G)$. Ez következik abból, hogy egy klikkben minden csúcsnak más-más színt kell adnunk jó színezésnél.

1.1. A kromatikus szám és a derékbőség paraméter

Tétel (BSc)**.** *Létezik olyan $\{G_n\}$ gráfsorozat, melyre teljesül, hogy $\omega(G_n) = 2$ (azaz G háromszögmentes), illetve $\chi(G_n) \to \infty$, ha $n \to \infty$.*



Vegyünk egy olyan gráfot, amelyben nincs háromszög. Tegyük fel, hogy ennek a gráfnak egy pontjában állunk. Ez a pont a szomszédaival együtt egy csillagot feszít ki, ami az eredeti gráf részgráfja. Egy ilyen helyzet látható a fenti ábrán. Ezen lokális részeket látva semmilyen nehézséget nem érzékelünk. A gráf globális színezéséhez szükséges színszám tetszőlegesen nagy lehet. A kromatikus szám vizsgálata nehéz probléma (szerepel Richard Karp 1972-ben összegyűjtött 21 NP-teljes problémája között).

Definíció. Tetszőleges G gráf esetén rögzítsünk egy $o \in V(G)$ csúcsot, és tetszőleges $r \in \mathbb{N}^+$ esetén definiáljuk a következő részgráfot:

$$B(o, r) = G \mid_{\{v \in V : d(o,v) \leq r\}},$$

ahol $d(o, v)$ a legrövidebb ov út hosszát jelöli.

Az előző példánál erősebb feltétel is adható. Az előző példában $B(o, 1)$ esetén láttuk, hogy a kromatikus szám tetszőlegesen nagy lehet, de nem kell az r-et 1-nek választani, tetszőleges sugár esetén is igaz, hogy a kromatikus szám tetszőlegesen nagy lehet. Az, hogy a G gráfban nincs háromszög, ekvivalens azzal, hogy $\omega(G) \leq 2$, azaz $B(o, 1)$ csillag, azaz $B(o, 1)$ páros gráf. Hasonlóan $B(o, r)$ is páros gráf, és ez azzal ekvivalens, hogy G-ben nem létezik $2r + 1$ hosszú, vagy rövidebb páratlan kör. Ha tovább erősítjük a feltételt, és azt mondjuk, hogy G-ben legyen minden kör legalább $2r+2$, akkor minden rögzített o középpontra $B(o, r)$ egy fa, és még így sem tudjuk elérni, hogy a globális kromatikus szám ne legyen tetszőlegesen nagy.

Definíció. A G gráf derékbőségének (girth) nevezzük azt a $g(G)$ számot, amelyre

$$g(G) = \min \{l : G\text{-ben létezik } l \text{ hosszú kör}\}.$$

A következőkben arra keressük a választ, hogy, ha adott egy γ és egy τ pozitív egész szám, akkor létezik-e olyan G gráf, melyre $\gamma \leq g(G)$ és $\chi(G) \geq \tau$.

1. Tétel (Erdős Pál). *Bármely $\gamma, \tau \in \mathbb{N}^+$ számokhoz létezik olyan G gráf, amelyre $g(G) \geq \gamma$ és $\chi(G) \geq \tau$.*

Bizonyítás. Nem konstruktív bizonyítást adunk a tételre. (Konstruktív bizonyítások is léteznek, de azok nehezebbek.) A következőkben egy valószínűségszámítási módszeren alapuló bizonyítást mutatunk meg.

Legyen V egy n elemű csúcshalmaz. **Most csak annyit kell tudnunk n-ről, hogy elég nagy.** A továbbiakban is fogunk ilyen előre kijelentett „ígéreteket” tenni, és ezeket vastag betűtípussal fogjuk jelölni. Majd a bizonyítás végén megmutatjuk, hogy ezek az ígéretek valóban teljesülhetnek. Bármely V-beli pontpárra behúzzuk a közöttük lévő élt, de csak p valószínűséggel. Nyilván ebből következik, hogy $1 - p$ valószínűségel nem húzzuk be közöttük az élt. **A p értékét később adjuk meg, most elég annyi, hogy $0 \leq p \leq 1$.** Ezzel a módszerrel felépíthetünk egy gráfot, ez az Erdős-Rényi véletlen gráfmodell ($G_{n,p}$).

Bevezetünk egy új paramétert, legyen ez t, és jelölje $\mathcal{A}_t$ azt az eseményt, hogy $\alpha(G) \leq t$. Ez azt jelenti, hogy G-ben nincs $t+1$ elemű független ponthalmaz. Jelölje $\mathcal{F}_R$ pedig azt az eseményt, hogy R független ponthalmaz G-ben. Ekkor a modellből azonnal következik, hogy

$$\mathbb{P}(\mathcal{F}_R) = (1 - p)^{\binom{|R|}{2}}.$$

Érvényes továbbá az alábbi összefüggés:

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}_t) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{\substack{R\subseteq V\\ |R|=t+1}} \mathcal{F}_R\right). \tag{1}$$

Ez a bonyolultnak tűnő kifejezés máris egyértelművé válik, ha szavakba öntjük, hogy mit jelent. Annak a valószínűsége, hogy $\alpha(G) \leq t$, megegyezik annak a valószínűségével, hogy nem létezik $t+1$ elemű független csúcshalmaz, ami pedig 1 mínusz annak a valószínűsége, hogy létezik $t+1$ elemű független csúcshalmaz, és pontosan ezt jelenti az (1) egyenlőség jobb oldala.

Felhasználva azt a mértékelméleti tényt, hogy

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(E_i), \tag{2}$$

azt kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}_t) \geq 1 - \tbinom{n}{t+1}(1-p)^{\binom{t+1}{2}}. \tag{3}$$

Felhasználtuk azt is, hogy $\binom{n}{t+1}$ tag unióját kell nézni, illetve az unió mögött álló $\mathcal{F}_R$-re igaz a $\mathbb{P}(\mathcal{F}_R) = (1-p)^{\binom{t+1}{2}}$ összefüggés. Tovább alakítva a (3) egyenlőtlenséget, azt kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}_t) \geq 1 - n^{t+1}(1-p)^{\binom{t+1}{2}} = 1 - n^{t+1}(1-p)^{\frac{t(t+1)}{2}} = 1 - \left[n(1-p)^{\frac{t}{2}}\right]^{t+1}. \tag{4}$$

A t paramétert a következőkben úgy választjuk majd meg, hogy a (4) egyenlet jobb oldala nagyobb legyen mint $\frac{1}{2}$, illetve az n „sokkal nagyobb" legyen, mint a t.

Áttérünk egy új gondolatmenetre, amely a derékbőség nagyságának garantálásához vezet. Jelöljük ξ_γ-val azt a valószínűségi változót, amely megadja a γ-nál nemhosszabb körök számát G-ben. Keressük ennek a várható értékét. Ehhez vezessük be a

$$\xi_C = \begin{cases} 1, & \text{ha } C \subseteq G_{n,p} \\ 0, & \text{különben} \end{cases}.$$

valószínűségi változót, ahol C egy lehetséges kör. Ekkor

$$\mathbb{E}(\xi_\gamma) = \mathbb{E}\left(\sum_{C \text{ hossza } \leq\gamma} \xi_C\right) = \sum_{l=3}^{\gamma}\left(\sum_{C \text{ hossza } =l} \mathbb{E}(\xi_C)\right). \tag{5}$$

Ha a C hossza l, akkor $\mathbb{E}(\xi_C) = p^l$. Hány darab l hosszú kör van? A válasz $\binom{n}{l}\frac{(l-1)!}{2}$, ugyanis a csúcsokat $\binom{n}{l}$-féleképpen választhatjuk ki, és ezeket a kiválasztott l pontokat $\frac{(l-1)!}{2}$-féleképpen rendezhetjük körbe. Felhasználva az

$$\binom{n}{l}\frac{(l-1)!}{2} = \frac{n(n-1)\dots(n-l+1)}{2l} \leq \frac{n^l}{2l} \leq \frac{n^l}{6}$$

egyenlőtlenséget, felírhatunk $\mathbb{E}(\xi_\gamma)$-ra egy felső becslést:

$$(5) = \mathbb{E}(\xi_\gamma) \leq \sum_{l=3}^{\gamma} \frac{n^l}{6} p^l = \sum_{l=3}^{\gamma} \frac{n^l p^l}{6} \overset{(!)}{\leq} \sum_{l=3}^{\gamma} \frac{(np)^\gamma}{6} \leq \gamma \frac{(np)^\gamma}{6}.$$

A (!) becslésnél feltesszük, hogy $np \geq 1$. Továbbá p-t úgy fogjuk megválasztani, hogy

$$\gamma \frac{(np)^\gamma}{6} < \frac{n}{4}$$

teljesüljön. Ha ez teljesül, akkor a Markov-egyenlőtlenségből adódik, hogy

$$\mathbb{P}\left(\xi_\gamma < \frac{n}{2}\right) > \frac{1}{2}.$$

Ezek után felírhatjuk a $\mathbb{P}\left(\mathcal{A}_t \wedge \left(\xi_\gamma < \frac{n}{2}\right)\right) > 0$ megállapítást, mivel a $\wedge$ két oldalán álló események valószínűsége külön-külön legalább $\frac{1}{2}$.

Ebből következik, hogy létezik olyan G gráf, amelynek n csúcsa van, és amelyre teljesül a következő két állítás:

- A G-ben lévő γ-nál nem hosszabb körök száma $\frac{n}{2}$-nél kevesebb.
- $\alpha(G) \leq t$.

Vegyük ezt a G gráfot, és minden γ-nál nem hosszabb körből hagyjunk el egy-egy pontot, jelölje az így kapott gráfot G_0. Ekkor G_0-ban nincs legfeljebb γ hosszúságú kör ($g(G_0) \geq \gamma$), csúcsszáma legalább $\frac{n}{2}$, azaz $|V(G_0)| \geq \frac{n}{2}$, és $\alpha(G_0) \leq t$. Továbbá igaz a

$$\chi(G_0) \geq \frac{n/2}{t} = \frac{n}{2t} \geq \tau$$

becslés is, **feltéve, hogy $n \gg t$, azaz, ahogy azt a bizonyítás elején is írtuk, n elég nagy**. Abból, hogy

$$\gamma \frac{(np)^\gamma}{6} < \frac{n}{4},$$

adja magát a p választása. Ugyanis keressük p-t úgy, hogy $\gamma(np)^\gamma = n$, azaz $p = \frac{1}{n}\left(\frac{n}{r}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$. A p-re ebből már következik, hogy mindig 0 és 1 között van, illetve az is $np > 1$. Bevezető analízisből ismeretes, hogy $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \nearrow e^{-1}$, sőt $(1-p)^{\frac{1}{p}} < \frac{1}{e}$. Ekkor

$$\left[n(1-p)^{\frac{t}{2}}\right]^{t+1} = \left[n\left((1-p)^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{pt}{2}}\right]^{t+1},$$

és t értékét úgy akarjuk megadni, hogy $\left((1-p)^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{pt}{2}} < \frac{1}{n^2}$ teljesüljön. A t paramétert ezek alapján könnyen meghatározhatjuk:

$$\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{pt}{2}} = \frac{1}{n^2} \iff e^{\frac{pt}{2}} = n^2 \iff \frac{pt}{2} = 2\ln n \iff t = \frac{4\ln n}{p}.$$

Az esetleg hiányzó ígéretek ellenőrzése egyszerű aritmetikai számolás. Azokat elvégezve a tétel bizonyítása itt véget ér. □

Észrevétel. A fenti bizonyítás „egyszerűsége” azon alapul, hogy mindenhol könnyen találtunk nekünk megfelelő becslést.

1.2. Nem k-színezhető gráfok

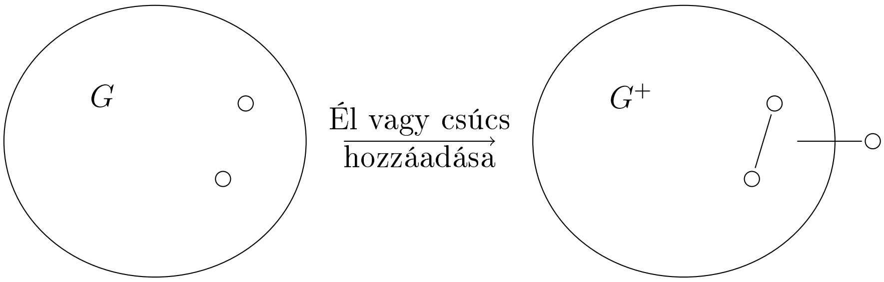
Emlékeztetőül megint idézzünk fel két állítást:

- G nem 2-színezhető $\Longleftrightarrow$ G-ben létezik páratlan hosszú kör.
- G nem 3-színezhető $\Longleftarrow$ G-nek részgráfja a K_4 ($K_4 = 4$ csúcsú teljes gráf).

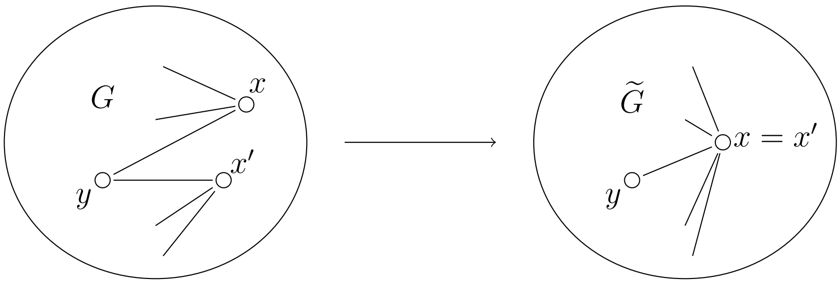
Észrevétel. A második állításában a $\Longrightarrow$ irány nem teljesül, és nem is tudunk jó jellemzést adni arra a problémára.

A következőkben Hajós György módszereivel próbálunk arra következtetni, hogy mit mondhatunk akkor, ha egy gráf nem k-színezhető.

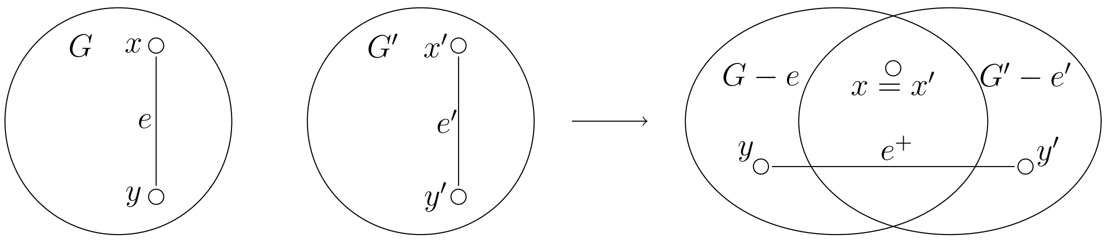
Definíció. A következőkben definiálunk három gráfokon elvégezhető operációt.
(Op1): Él vagy csúcs hozzáadása a gráfhoz. (Bővítés.)



(Op2): Két nem szomszédos csúcs (x, x') azonosítása. Ha x csúcs szomszédságát $N(x)$-szel jelöljük, akkor az összevonással keletkezett pont szomszédsága megegyezik $N(x) \cup N(x')$-vel.



(Op3): Hajós-operáció $\big(\text{Hajós}_{e,e'}(G, G')\big)$. A formális definíció szerint inkább ábrával szemléltetjük az operációt:



2. Lemma. *Ha G és G' nem k-színezhető, akkor G^+, $\widetilde{G}$ és* Hajós(G, G') *sem k-színezhető.*

A 2. Lemma nyilvánvalóan ekvivalens a következővel:

3. Lemma. *Ha G^+ és $\widetilde{G}$ k-színezhető, akkor G is az. Ha* Hajós(G, G') *k-színezhető, akkor G vagy G' is az.*

Észrevétel. G^+és $\widetilde{G}$ esetén a 3. Lemma nyilvánvaló, ugyanis több objektum esetén nehezebbé válik a színezés. Hajós(G, G') esetén is egyszerű az állítás.

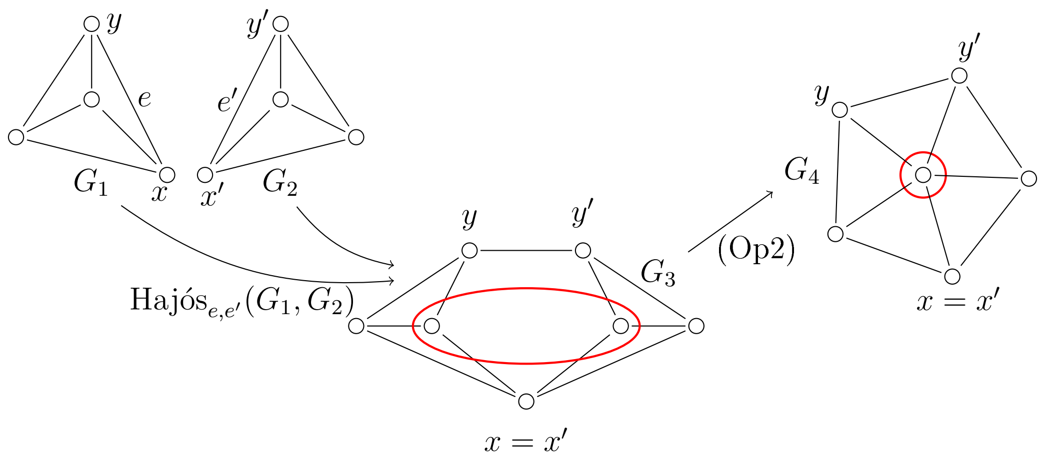
Definíció. A G gráf Hajós-konstruálható K_{k+1}-ekből, ha létezik olyan $G_1, G_2, \ldots G_l$ sorozat, hogy mindegyik G_i vagy K_{k+1}, vagy a korábbi gráfokból a fent leírt három operáció valamelyikével nyerhető.

Következmény. Ha G Hajós-konstruálható, akkor G nem k-színezhető.

A következmény bizonyítása teljes indukcióval történhet.

Észrevétel. Nyilván G_1 mindig csak K_{k+1} lehet, G_2 pedig csak K_{k+1} vagy egy olyan gráf, ami K_{k+1}-ből (Op1) operációval kapható ((Op2) nem alkalmazható teljes gráfokra).

Példa. Bizonyítsuk be, hogy az 5-kerék nem 3-színezhető.



Először a G_1 és G_2 gráfokon hajtjuk végre az (Op3) operációt, ezért az így kapott G_3 gráf nem 3-színezhető. A G_3 gráfon pedig az (Op2) operációt hajtjuk végre, és az eredmény a szintén nem 3-színezhető G_4 gráf lesz, amit 5-keréknek nevezünk.

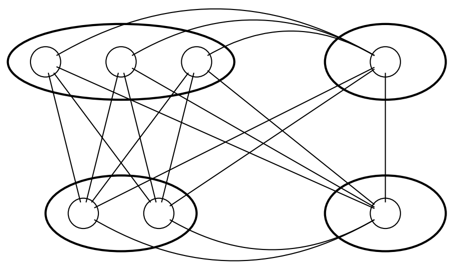
4. Tétel (Hajós György)**.** *G nem k-színezhető $\Longleftrightarrow$ G Hajós-konstruálható K_{k+1}-ből.*

Bizonyítás. A $\Longleftarrow$ irány nyilvánvaló, a $\Longrightarrow$ irányt pedig indirekt módon bizonyítjuk.

Tegyük fel, hogy létezik ellenpélda, azaz létezik olyan G nem k-színezhető gráf, ami nem Hajós-konstruálható. Tegyük a G gráfot telítetté, azaz adjunk hozzá éleket mindaddig, amíg az ellenpéldára vonatkozó két tulajdonság teljesül. Így kapjuk a G^{tel} gráfot. A bizonyítás folytatása előtt szükségünk van néhány definícióra, illetve egy nagyon fontos lemmára. A 4. Tétel bizonyítását a lemma bizonyítása után folytatjuk.

Definíció. Egy G gráf teljes r-részes gráf, ha a $V(G)$ csúcshalmaz r darab osztály uniója, és az $E(G)$ élhalmaz pedig az összes keresztél az osztályok között.

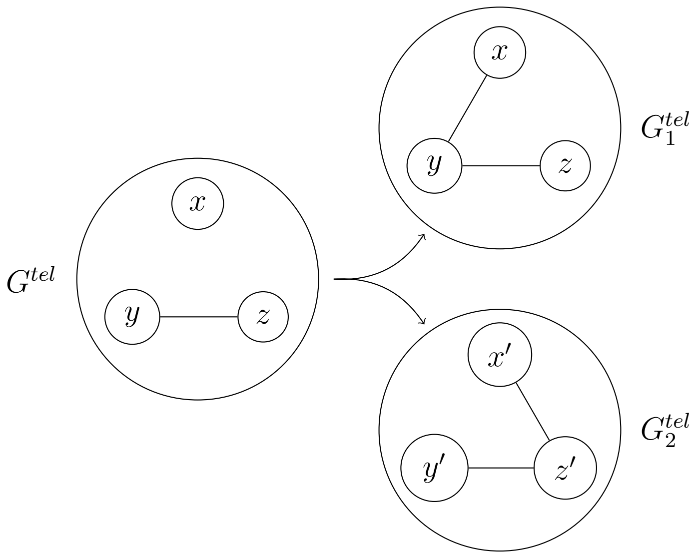
Példa. 4-részes teljes gráf például a következő:



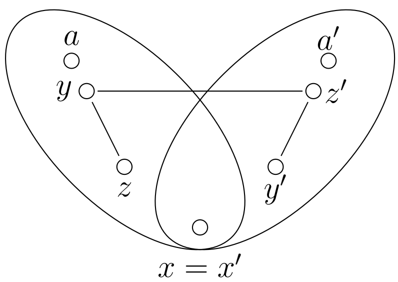
Definíció. A teljes r-részes gráf ekvivalens definíciója a következő: az „egyenlőnek vagy nem összekötöttnek lenni” reláció ekvivalenciareláció, továbbá az ekvivalecia-reláció osztályainak száma r.

5. Lemma. *G^{tel} teljes r-részes gráf.*

Bizonyítás. A bizonyítás indirekt módon történik. Tegyük fel, hogy G^{tel} nem teljes r-részes gráf, azaz az „egyenlőnek vagy nem összekötöttnek lenni” reláció nem ekvivalencia. Ekkor nyilván csak a tranzitivitás sérülhet, azaz léteznek olyan $x, y, z \in V(G^{tel})$ különböző pontok, hogy $xy, xz \notin E(G^{tel})$, de $yz \in E(G^{tel})$. Ekkor elvégezhetjük az (Op2) bővítés operációt kétféleképpen:



Ha erre két gráfra végrehajtjuk a Hajós$_{xy,x'z'}(G_1^{tel}, G_2^{tel})$ operációt, akkor a következő gráfot kapjuk:



A kapott gráfban minden G_1^{tel}-beli a pont azonosítható a neki megfelelő G_2^{tel}-beli a' ponttal ((Op2)). Így megkapjuk a G^{tel} gráfot. Ez azt mutatja, hogy G^{tel} Hajós-konstruálható, és ez ellentmodás. $\square$

Hajós-tétel bizonyításának folytatása. Emlékezzünk, hogy a tételt indirekt módon kezdtük bizonyítani, azaz feltettük, hogy létezik olyan G nem k-színezhető gráf, ami nem Hajós-konstruálható. Telítettük a G gráfot, és az így kapott G^{tel} gráfról beláttuk, hogy teljes r-részes gráf. Folytatva a bizonyítást két eset lehetséges.

1. eset: Ha $r \geq k+1$, akkor G^{tel} gráfnak létezik egy $k+1$ pontú teljes részgráfja, ugyanis minden osztályból egy tetszőleges csúcsot kiválasztva egy ilyen részgráfot kapunk. A részgráfság miatt G^{tel} megkapható K_{k+1}-ből egyszerű bővítésekkel, azaz az (Op1) operáció többszöri alkalmazásával. Ez viszont ellentmond annak, hogy G^{tel} nem Hajós-konstruálható.

2. eset: Ha pedig $r \leq k$, akkor nyilvánvaló, hogy G^{tel} gráf k-színezhető, ami szintén ellentmondás.

Mindkét esetben ellentmondásra jutottunk, így ezzel a Hajós-tétel bizonyítása véget ért. $\square$