Diszkrét Matematika MSc hallgatók számára
7. Előadás
Párosítási tételek

Előadó: Hajnal Péter
Jegyzetelő: Kovácsházi Anna
2010. 10. 18.

7. Előadás

Emlékeztető: Javító út, Javító út kezdemény, Mohó javító út kereső algoritmus, Edmonds algoritmus

7.0.1. Definíció

*Egy P utat **javító útnak** nevezünk egy M párosításra nézve, ha az út páratlan hosszú, kezdő- és végpontjai nem párosítottak, és minden páros sokadik éle eleme az M párosításnak.*

7.0.2. Definíció

*A P: v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, ..., v_{k-2}, e_{k-1}, v_{k-1}, e_k, v_k egy (M-re vonatkozó) **javító út kezdemény**, ha v_0 párosítatlan, és minden páros indexű él eleme M-nek.*

Mohó javító út kereső algoritmus

Kiinduló lépés: M egy párosítás a G gráfban.$C_0 \subseteq V(G) \setminus V(M) = \overline{V}(M)$: kiinduló címkék, azaz a 0-hosszú javító út kezdemények halmaza (párosítatlan pontok halmaza).

Címkézés: Ha taltálunk egy a csúcsba vezető javító út kezdeményt, akkor címkézzük meg a csúcsot: „külső”-vel, ha páros hosszú az út, és „belső”-vel, ha páratlan. Az algoritumus mohósága miatt felülírás nincs, a címkehalmaz folyamatosan bővül.

Definiáljuk a következő halmazokat: $K = \{\text{„külső” címkéjű pontok}\}$, $B = \{\text{„belső” címkéjű pontok}\}$, $C = \{\text{címkézett pontok}\} = K \bigcup B$. Kezdetben $C = K = C_0$, $B = \emptyset$.

Címkebővítés: Keressünk egy k külső pontnak egy címkézetlen s szomszédját ($s \notin C$). A következő három eset lehetséges:

- $(s \notin V(M))$: s párosítatlan, tehát javító utat találtunk,
- $(s \in V(M))$: Legyen s M menti párja s', ekkor s belső, s' külső címkét kap, bővítjük C-t és folytatjuk a keresést,
- elakadás: sikertelen keresés.

Edmonds algoritmus

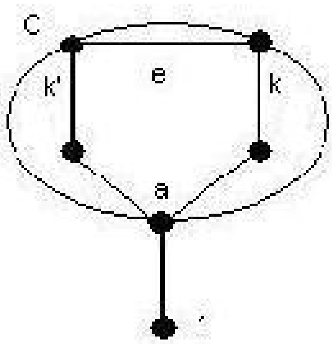
Kiinduló lépés: M egy párosítás a G gráfban.$C_0 = V(G) \setminus V(M) = \overline{V}(M)$: kiinduló címkék, azaz a 0-hosszú javító út kezdemények halmaza (párosítatlan pontok halmaza).

Mohó javító út keresés: Címkenövelés elakadásig, mely szükségszerűen bekövetkezik, mert a keresés az összes párosítatlan pontból indul, és az elért pontokat mindig megcímkézzük, és címkét nem írhatunk át.

A kérdés a következő: (∗) Vajon létezik-e olyan *kk'* él, amelyre $k, k' \in K$? Három lehetőség van:

- *Összeolvasztó lépés:* k -t és k'-t különböző C_0-beli csúcsokból érte el a keresés, és mivel létezik $k\,k'$ él, így találtunk javító utat.
- *Zsugorító lépés:* Olyan k és k' között halad él, melyeket azonos $r \in C_0$-ból induló keresés ért el (7.1 ábra). Ebben a lépésben egy kör ponthalmazát egyetlen pontba húzzuk össze, majd a kapott új gráfra folytatjuk az algoritmust.
- *Feladó lépés:* Nincs ilyen, tehát sikertelen a keresés.

7.1. ábra



Keletkezik egy C kör,
mivel létezik olyan *a* csúcs,
ahol a keresés kettéválik.

7.0.3. Definíció

Egy G gráfban egy C_e ***kör zsugorításán*** *a következő* $\tilde{G}$ *gráfot értjük:*

- $V(\tilde{G}) = (V(G) \setminus V(C_e)) \cup \{c_e\}$, *ahol* $c_e \notin V(G)$ *egy új pont*
- $E(\tilde{G}) = E(G) \setminus \{ uv \in E(G) : u,v \in V(C_e) \}$, *azaz a* C_e*-n belüli éleket elhagyjuk a gráf élhalmazából*
- $I(\tilde{G}) = I(G)\,|_{\left(V(\tilde{G})\setminus\{c\}\right)\times E(\tilde{G})} \cup \{ (c,e) : e = xy \in E(\tilde{G}),\ x \in V(C_e) \}$

Minden G-beli pontnak van egy képe $V(\tilde{G})$-ben. Ezt formálisan a következő leképezéssel írhatjuk le: $\rho : V(G) \to V(\tilde{G})$: $\rho(v) = \begin{cases} v, & \text{ha } v \in V(G)\setminus V(C_e), \\ c, & \text{ha } v \in V(C_e). \end{cases}$

7.1. Az Edmonds algoritmus hiányzó részei

Az Edmonds algoritmus kétféleképpen állhat le: vagy találunk javító utat, vagy sem. A probléma az, hogy a leállás többszörösen zsugorított gráfokban történhet.

Az első lemma megmondja, hogyan kell egy többszörösen zsugorított gráfban talált javító utat visszavezetni az eredeti gráfra.

1. Lemma: *Ha egy $\tilde{G}$ zsugorított gráfban van $\tilde{M}$ párosításra vonatkozó $\tilde{P}$ javító út, akkor az eredeti G-ben is van M-re vonatkozó P javító út. ($\tilde{G}$ a G gráfban található C páratlan kör összezsugorításával nyert gráf, $\tilde{M}$ az össze nem húzott M-beli élek.)*

Bizonyítás

Három esetet különböztethetünk meg:

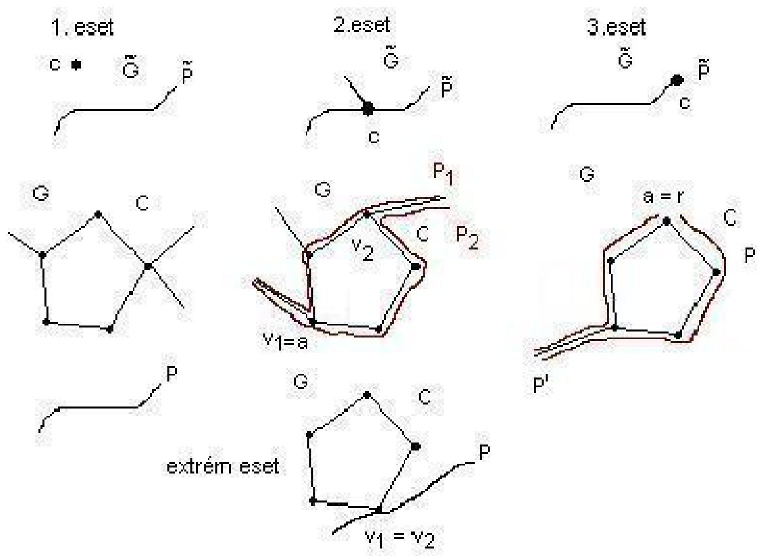
1. *eset:* Ha $\tilde{P}$-nek c nem pontja, akkor P választható $\tilde{P}$ -nek.

2. *eset:* Ha a c a $\tilde{P}$ út belső pontja, ekkor a $\tilde{P}$ G-beli őse a (7.2) ábrán látható. A $v_1$és v_2, melyek extrém esetben egybe is eshetnek (7.2) ábra a zsugorítás során $\tilde{P}$ c pontjába esnek. Ezen a ponton áthalad a $\tilde{P}$ javító út, ezért $\tilde{P}$ egyik rá illeszkedő éle párosított lesz. Ekkor $\tilde{P}$ ősében ez a párosított él v_1-re vagy v_2-re illeszkedik. Tegyük fel, hogy v_1-re illeszkedik. Ez csak úgy lehet, ha $v_1 = a$. Így könnyű v_1-et v_2-őt a C kör egyik ívével összekötni úgy, hogy P javító utat kapjunk.

3. *eset:* Ha a c a $\tilde{P}$ út kezdőpontja, akkor $\tilde{P}$ őse egy P' út lesz. Egyik végpontja egy párosítatlan csúcs, másik végpontja pedig a C kör egy csúcsa, nem feltétlenül párosítatlan. Így P' nem szükségszerűen javító út. P'-őt meghosszabbítjuk C egyik a-ba vezető ívével, úgy, hogy egy P javító úthoz jussunk. Az $a \notin V(M)$ ($\tilde{P}$ ekkor nem indult volna le nem fedett csúcsból). Így P az M-re vonatkozó javító út.

■

7.2. ábra



A páros gráfokra kidolgozott tételeket kiterjeszthetjük tetszőleges gráfokra. Ennek érdekében szükséges a következő definíciók ismerete:

7.1.4. Definíció

*$\epsilon(R) = C_1(H-R) - |R|$, ahol $R \subseteq V(H)$, ahol $C_1(\circ)$ a **gráf páratlan pontszámú komponenseinek száma**, ($C_1(H-R)$ a páratlan pontszámú komponensek száma R elhagyása után).*

7.1.5. Definíció

*$\delta(P) = |V(H)| - 2|P| =$ **párosítatlan pontok száma**, ahol $P \subseteq E(H)$ párosítás.*

Észrevétel: $\epsilon(R) = C_1(H-R) - |R| \preceq \delta(P)$, ahol $R \subseteq V(H)$, és $P \subseteq E(H)$ párosítás.

A $(H-R)$ páratlan pontszámú komponensein belül legalább egy-egy pontot kihagy a párosítás. Ezek a pontok R pontjaival párosíthatók (maximum $|R|$ darab, a többi párosítatlan). A pontok összesen legalább $C_1(H-R)$ sokan vannak. Tehát a párosítatlan pontok száma legalább $C_1(H-R)$, azaz $\delta(P) \le \epsilon(R)$.

Következmény: Ha $\delta(P) = C_1(H-R) - |R|$, akkor P optimális. Ekkor R elnevezése: bizonyító halmaz (P optimalitására).

7.1.6. Definíció - Észrevétel

*Ha a H gráfban van olyan $R \subseteq V(H)$, melyre $C_1(H-R) - |R| > 0$, akkor nincs benne teljes párosítás. Ekkor az R halmazt **Tutte-akadály**nak nevezzük.*

2.Lemma: *Legyen G_k egy sikertelen javítóút-keresés végén kapott k-szorosan zsugorított gráf, M_k pedig a hozzá tartozó párosítás. Formálisan: $G = G_0 \rightarrow G_1 \rightarrow \ldots \rightarrow G_k$, $M = M_0 \rightarrow M_1 \rightarrow \ldots \rightarrow M_k$ (B_2, $K_2 \rightarrow \ldots \rightarrow B_k$, K_k). Mivel a keresés sikertelen G_k után (∗) szerint K_k-en belül nem halad él. $\Longrightarrow$ Nincs javító út M_k-ra G_k-ban. $\Longrightarrow \ldots \Longrightarrow$ Nincs javító út M-re G-ben.*

7.1. Megjegyzés

$B_k \subseteq V(G_k)$. A B_k halmaz elemei eredeti csúcsok, nem reprezentálhatnak zsugorított kört, mert azok csak külső pontok lehetnek.

A következő állítás akkor, és csakis akkor teljesül, ha a 2. Lemma is:

7.1. Állítás

M_i egy maximális elemszámú (optimális) párosítás G_i-ben, és B_k bizonyító halmaz erre. ($i = 0, 1, \ldots, k$)

Bizonyítás

Vegyük észre a következőket:

– Mivel az algoritmus sikertelen kereséssel áll le $\Longrightarrow$ a külső pontok között (K_k) nem halad él G_k-ban.

– A leállás előtt volt egy címkenövelés $\Longrightarrow$ a külső pontoknak nincs címkézetlen szomszédja.

A fenti két észrevételből az következik, hogy $(G_k - B_k)$ -ban K_k elemei izolált csúcsok.

Ekkor $\epsilon(B_k)$=C_1 $(G_k - B_k) - |B_k| \geq |K_k| - |B_k| =$

$= |C_0^{(k)}| = |\{\textit{párosítatlan pontok}\}| = \ \delta(M_k)$.

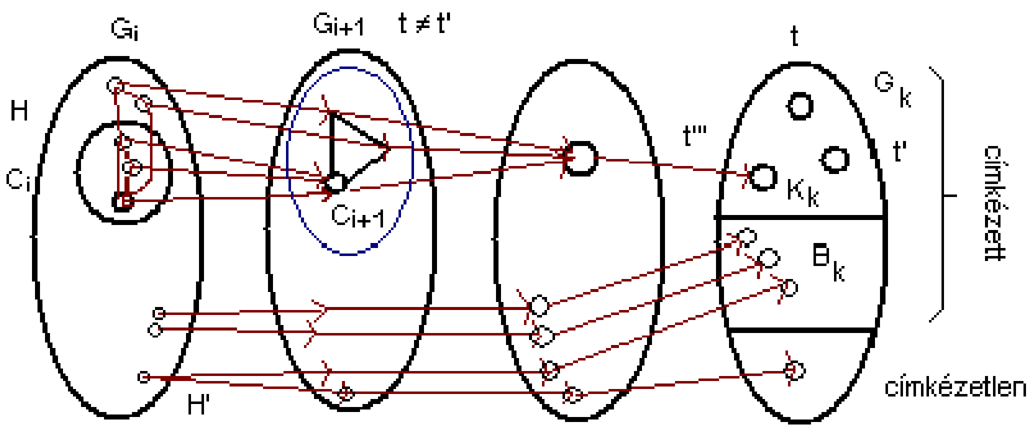
Az $\leq$ irányt tudjuk az észrevételből $\Longrightarrow$ " = " $\Longrightarrow$ Következmény miatt ekkor a párosítás optimális G_k-ban B_k bizonyító halmaz. Ezzel a következő **Állítás (i)** sorozat $i = k$ elemét beláttuk:

7.2. Állítás (i)

$(G_i - B_k)$-ban $H_t := \{v \in V(G_i)$: zsugorítások sorozata v-t $t \in K_k$-ba képzi$\}$ $(t,\ t' \in K_k,\ H_t \cap H_{t'} = \emptyset)$. $(G_i - B_k)$-ban $\{H_t\}_{t \in K_k}$ mindegyike páratlan pontszámú, és egy-egy komponens alaphalmaza (7.3) ábra.

■

7.3. ábra



Bizonyítás

A 7.2. Állítás (i) egy i-re vonatkozó visszafele haladó indukcióvalbizonyítható. Csak az indukciós lépés van hátra: $i+1 \to i$.

Egy pontnak vagy 1 őse van, vagy ősei a zsugorított páratlan kör pontjai $(G_{i+1} \to G_i$ egy zsugorítás).

$(G_i - B_k)$ komponenseitúgy kapjuk, hogy $G_{i+1} - B_k$ mindegyik S komponensére megnézzük csúcsainak őseit: Az ősök között nem változik semmi és kifelé csak B_k-hoz fut él (ha S mindegyik csúcsának egy őse volt) vagy benne az egyik pont "felfújódik", azaz belül történik valami, de a kimenő élek ugyanoda (B_k-hoz) vezetnek (ha S tartalmaz a zsugorított kört reprezentáló pontot).Tehát $(G_i - B_k)$ komponensei párokba állítható $(G_{i+1} - B_k)$

komponenseivel. Továbbá az egy párba állítottkomponensek csúcsainak száma uganolyan paritású. Ebből adódik az indukciós lépés.

■

Tehát a 7.2. Állitás (i) alapján:

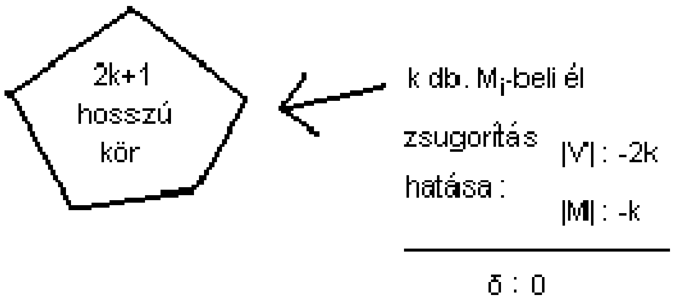
$C_1(G_k - B_k) - |B_k| \geq |K_k| - |B_k| = |C_0^{(k)}| = \delta(M_k)$ .A bizonyítás befejezése az, hogy észrevesszük, hogy $\delta(M_k) = \delta(M_i)$. Azaz B_k bizonyítja M_i optimalitását G_i-ben. Ezt az észrevételt a 2. Lemmában összegezzük.

Bizonyítás (2. Lemma)

$\delta(M_k) = \delta(M)$

Indukcióval bizonyítjuk, hogy a $G_i \to G_{i+1}$, $(i = k, k-1, \ldots, 0)$ zsugorítás során δ nem változik.

Valóban, ha $2k+1$ hosszú kört zsugorítunk, akkor a csúcsok száma $2k$-val, a párosítás mértéke k-val csökken, így δ értéke marad.



■

7.2. Következmények

Először páros G gráfokra vonatkozó párosítási tételeket bizonyítunk a Magyar módszer alapján.

1.Következmény (Kőnig-tétel): Legyen G egy páros gráf. Ekkor teljesül a következő egyenlőség: $\max\{|K| - |N(K)| : K \subseteq A\} = \min\{\delta_A(P) : P \text{ párosítás}\}$.

Bizonyítás

Legyen M optimális párosítás, $\delta_A(M) = \min\{\delta_A(P) : P$ párosítás$\}$. Alkalmazzuk G-re és M-re a Magyar módszert. Az algoritmus sikertelen kereséssel ér véget. Az előző órán a Magyar módszerhez leírt 1. észrevétel (sikertelen keresés) értelmében K összes szomszédja címkézett és felső, illetve $N(K) = B$. Azt is tudjuk, hogy $|K| - |N(K)| = \delta_A(M)$. Így $\max\{|K| - |N(K)| : K \subseteq A\} \geq \min \delta_A(P)$.

$\leq$ triviális.

■

2.Következmény (Kőnig-tétel): Legyen G egy páros gráf. Ekkor $\nu(G) = \tau(G)$.

Bizonyítás

M párosítás optimális $\Longleftrightarrow$ $|M| = \nu(\mathrm{G})$. Alkalmazzuk G-re és M-re a Magyar módszert. Az algoritmus sikertelen kereséssel ér véget. A Magyar módszer 2. bizonyítása értelmében $|M| = |L|$, ahol L egy lefogó ponthalmaz $\Longrightarrow \nu(G) \geq \tau(G)$.

$\nu(G) \leq \tau(G)$ nyilvánvaló.

■

7.2.7. Definíció

Egy G páros gráfban az alsó pontok egy K halmazát ***Kőnig-akadály****nak nevezzük, ha K szomszédsága kisebb elemszámú, mint maga a K halmaz. Formálisan: $K \subseteq A$, $|K| - |N(K)| > 0$ esetén K Kőnig-akadály.*

3. Következmény (Kőnig-Hall tétel): Egy $\{A, F\}$ színosztályokkal rendelkező páros gráfban, akkor és csakis akkor van A-t lefogó párosítás, ha nincs benne Kőnig-akadály.

Bizonyítás

Tegyük fel, hogy létezik M teljes párosítás, azaz $\delta_A(M) = 0 \Longleftrightarrow$ Ekkor az 1. Következmény értelmében a $\max\{|K| - |N(K)| : K \subseteq A\}$ nem vehet fel pozitív értéket, $|K| - |N(K)| \leq 0$, tehát nincs benne Kőnig-akadály.

■

4. Következmény (Hall tétele): Legyen H egy halmazrendszer V felett ($H \subseteq \mathcal{P}(V)$). Legyen r reprezentáns rendszer: $r : H \to V$, $E(\in H) \mapsto r(E) \in E \subseteq V$. H-nak van egy-egy értelmű reprezentáns rendszere $\Longleftrightarrow$ H-ban nem létezik Hall-akadály. (Lásd a következő definíciót.)

7.2.8. Definíció

Az $A \subseteq H$ ***Hall-akadály,*** *ha $|\bigcup A| < |A|$.*

Az egy-egy értelmű reprezentáns rendszer létezésének problémáját a következő "mesével" világíthatjuk meg:

Legyenek V elemei városlakók, H elemei pedig civil társulatok (bélyeggyűjtők, kutyabarátok,...stb.). Minden társulatnak ki kell nevezni egy r titkárt, aki az érdekeit képviseli. Egy ember peszre lehet tagja több klubnak is, de maximum csak egy klubot képviselhet ezek közül. (Nagy átfedés esetén ez nem mindig oldható meg).

Tehát a Hall-akadály tulajdonképpen a H-ra vonatkozó Kőnig-akadály.

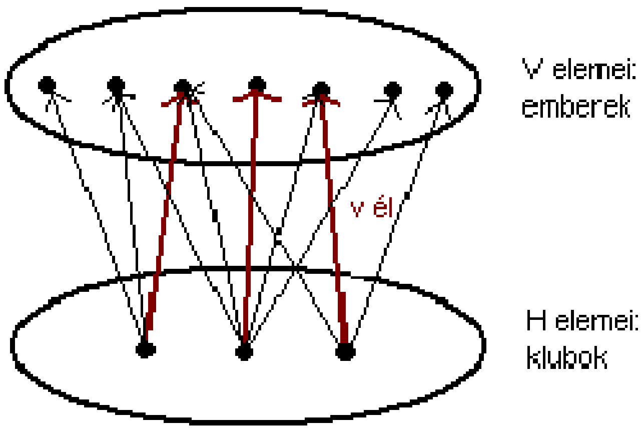
Bizonyítás

$\Longrightarrow$Ha a klubjaink között van l darab úgy, hogy ezekbe l-nél kevesebben járnak, akkor nem tudunk titkárt választani.

$\Longleftarrow$Vegyünk egy páros gráfot (7.4) ábra. Az egyik osztályban legyenek a klubok (H elemei), a másikban pedig klubjaink elemei, azaz az emberek. Minden "klub-csúcsot" kössünk össze a tagjaival. A kapott G gráf egyszerű lesz. H egy-egy értelmű reprezentáns rendszere ($R \subseteq E$ élhalmaz) egyben a H-t lefedő párosítás is G-ben. Ilyen pontosan akkor van, amikor nincs G-ben Kőnig-akadály, azaz nincs H-ban Hall-akadály.

■

7.4. ábra



5. Következmény (Frobenius tétel): Legyen G egy páros gráf. Ekkor G-re a következő állítások ekvivalensek:
(i) G-nek létezik teljes párosítása,
(ii) $|A|=|F|$ (az alsó és felső pontok száma megegyezik), és G-ben nincs Kőnig akadály,
(iii) A-ban és F-ben sincs Kőnig akadály (ha valamelyik osztályban lenne, akkor nem lenne az A és az F pontjait párosító teljes párosítás).

A továbbiakban már nem szükségszerűen páros G gráfokat vizsgálunk.

6. Következmény (Berge formula): $\min\{\delta(P):\ P \text{ párosítás}\} = \max\{C_1(G-R) - |R|:\ R \subseteq V\}$.

A Berge formula bizonyítása az 1. Következmény bizonyítását követi, de az általános maximális párosítástkereső algoritmust (Edmonds-algoritmus) használja.

Bizonyítás

M optimális párosítás: δ(M)=min $\{\delta$(P) : P párosítás$\}$.

Az Edmonds algoritmust alkalmazva G-re és M-re $\Longrightarrow$ sikertelen keresés $\Longrightarrow$ (alk. 2. Lemma) M egy maximális elemszámú (optimális) párosítás G-ben, és R bizonyító halmaz erre. $\Longrightarrow$ $\delta(M) = \min\{\delta(P) : P\,\text{párosítás}\} = C_1(G - R) - |R|$, $R \subseteq V \Longrightarrow$ Észrevétel, 1., 2. Következmény $\Longrightarrow$ 6. Következmény.

■

7. Következmény (Tutte tétele): Egy G gráfban akkor és csakis akkor létezik teljes párosítás, ha nincs benne Tutte-akadály, azaz ha minden R $\subseteq V(G)$ ponthalmazra $C_1(G - R) - |R| \leq 0$.

Bizonyítás

A feltétel szükségessége a 7.1.6 észrevételből adódik.

Indirekt módon tegyük fel, hogy egy G gráfra teljesül a feltétel, de nincs benne teljes párosítás. Az Edmonds algoritmussal keressük meg az optimális M-et. Az indirekt feltevés miatt $\{\text{párosítatlan csúcsok}\} \neq \emptyset$. Az algoritmus M optimalitását bizonyító halmazt is megad, ami egy Tutte-akadály. Ez ellentmondás.

■

7.9. Tétel (Petersen tétel)

Egy kétszeresen élösszefüggő és 3-reguláris G gráfban mindig van teljes párosítás.