Diszkrét Matematika MSc hallgatók számára

5. Előadás

Előadó: Hajnal Péter
Jegyzetelő: Balázs István 2010. október 4.

1. A folyamok elméletének következményei (folytatás)

1. Tétel. *Legyen G gráf, k pozitív egész.*

(i) G akkor és csak akkor k-szorosan élösszefüggő, ha bármely $x, y \in V(G)$-re létezik k darab páronként éldiszjunkt xy út G-ben.

(ii) G akkor és csak akkor k-szorosan összefüggő, ha $|V(G)| > k+1$, és bármely x, y csúcsra létezik k darab páronként pontfüggetlen xy út G-ben, azaz utak, amelyek belső pontjainak halmazai páronként diszjunktak.

Bizonyítás. Legyen G, x, y és k adott.

(i) Ha létezik tetszőleges x és y csúcsra létezik k darab éldiszjunkt xy út G-ben, akkor $k-1$ él elhagyásával még el lehet jutni x-ből y-ba, ezért G k-szorosan élösszefüggő.

Tegyük fel, hogy G k-szorosan élösszefüggő, és alkalmazzuk a Menger-tételt.

$$\begin{aligned} k \leq & \min\{|L| : \ L \subseteq E(G), G - L\text{-ben nincs } xy \text{ út}\} = \\ = & \max\{l : P_1, \ldots, P_l \text{ éldiszjunkt } xy \text{ utak}\} \end{aligned}$$

Ezért létezik k darab éldiszjunkt xy út G-ben.

(ii) Először tegyük fel, hogy tetszőleges x és y csúcsra létezik k darab pontfüggetlen xy út G-ben. Hagyjunk el k-nál kevesebb pontot G-ből. A maradékban levő tetszőleges u és v csúcsok közt eredetileg meglévő k pontfüggetlen utak valamelyike megmaradt, ezért G k-szorosan összefüggő.

Fordítva tegyük fel, hogy G k-szorosan összefüggő. Legyen az xy élek halmaza P, P elemszáma p. A P-beli élek pontfüggetlen xy utak. Ha $p \geq k$, akkor teljesül az állítás. Ha $p \leq k-1$, akkor $G - P$ $k-p$-szeresen összefüggő, azt kell belátni, hogy létezik $k-p$ pontfüggetlen xy út $G-P$-ben. Alkalmazzuk a Menger-tételének irányítatlan csúcs változatát ($G-P$-ben x és y nem szomszédos):

$$\begin{aligned} k - p \leq & \min\{|U| : \ U \subseteq V(G) \setminus \{x, y\}, \ G - P - U\text{-ban nincs } xy \text{ út}\} = \\ = & \max\{l : \ P_1, ...P_l \text{ pontfüggetlen } xy \text{ utak } G-P\text{-ben}\} \end{aligned}$$

Ezért létezik $k-p$ darab pontfüggetlen xy út $G-P$-ben, így k darab G-ben. ■

Definíció. A G gráf összefüggőségi paraméterei:

$$\kappa_e(G) = \begin{cases} \max\{k : \ G \ k\text{-szorosan élösszefüggő}\}, & \text{ha } G \text{ összefüggő} \\ 0, & \text{ha } G \text{ nem összefüggő} \end{cases}$$

$$\kappa(G) = \begin{cases} \max\{k:\ G\ k\text{-szorosan összefüggő}\}, & \text{ha } G \text{ összefüggő} \\ 0, & \text{ha } G \text{ nem összefüggő} \end{cases}$$

Észrevétel. Minden G gráfra teljesülnek a következők:

$$\begin{aligned} \kappa_e(G) &= \min_{x,y\in E(G)} \max\{k:\ P_1, ...P_k \text{ éldiszjunkt } xy \text{ utak}\} = \\ &= \min_{x,y\in E(G)} \min_{\mathcal{V}\ xy \text{ vágás}} |E(\mathcal{V})| = \min_{\mathcal{V} \text{ vágás}} |E(\mathcal{V})|, \end{aligned}$$

ahol $\mathcal{V} = \{S, T\}$, $S \cup T = V(G)$, $S \cap T = \emptyset$, $S, T \neq \emptyset$.

2. Lemma. *$\kappa_e(G)$ és $\kappa(G)$ is hatékonyan kiszámolható.*

Bizonyítás. Csak κ_e kiszámítására vázolunk egy algoritmust. Legyen $\kappa_e(G; x, y) = \max\{k:\ P_1, ...P_k$ éldiszjunkt xy utak$\}$. Ez minden x, y csúcsra folyam-algoritmussal kiszámolható. Így $\kappa_e(G) = \min_{x,y\in V} \kappa_e(G; x, y)$ is számolható. ■

Megjegyzés. $\max\limits_{\mathcal{V} \text{ vágás}} |E(\mathcal{V})|$ kiszámítása nehéz, $\mathcal{NP}$-teljes probléma.

2. Minimálisan k-szorosan élösszefüggő gráfok

Definíció. Legyen G gráf, k pozitív egész. G-t minimálisan k-szorosan élösszefüggőnek nevezzük, ha

(i) k-szorosan élösszefüggő, továbbá

(ii) bármely e élre $G - e$ már nem k-szorosan élösszefüggő.

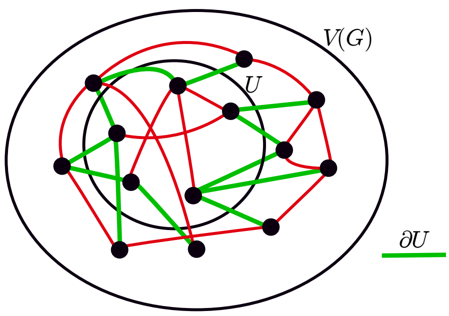
Megjegyzés. $k = 1$-re a minimálisan k-szorosan élösszefüggő gráfok a fák.

Ha G minimálisan k-szorosan élössszefüggő, akkor nincs benne hurokél.

Ha G k-szorosan élösszefüggő és legalább két csúcsa van, akkor minden csúcs foka legalább k.

Jelölés. $U \subseteq V(G)$ határa:

$$\partial U = \{xy \in E(G):\ x \in U \text{ és } y \notin U,\ \text{vagy } x \notin U \text{ és } y \in U\}$$



Példa. Az ábrán a zöld élek ∂U elemei.

Megjegyzés. $\partial U = \partial\overline{U}$, ahol $\overline{U} = V(G) \setminus U$.

Ha G-ben nincs hurokél, akkor bármely $x \in V(G)$-re $d(x) = |\partial\{x\}|$.

G akkor és csak akkor k-szorosan élösszefüggő, ha $V(G)$ bármely valódi, nem-üres részhalmazának határa legalább k darab élt tartalmaz.

3. Tétel. *Legyen k pozitív egész, G minimálisan k-szorosan élösszefüggő gráf, $|V(G)| \geq 2$. Ekkor a következők teljesülnek:*

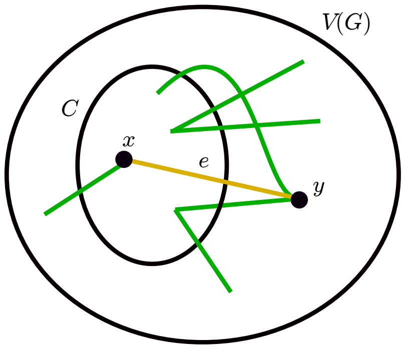
(i) Van G-ben k-fokú csúcs.

(i)$^+$ G-ben legalább két darab k-fokú csúcs van.

Definíció. k pozitív egész, G minimálisan k-szorosan élösszefüggő gráf. A $P \subseteq V(G)$ halmazt pontos halmaznak nevezzük, ha a határa k elemű.

Észrevétel. A tétel i) állítása ekvivalens azzal, hogy G-ben van egyelemű pontos halmaz.

Ha tetszőleges $e = xy \in E(G)$-re $G - e$ nem k-szorosan élösszefüggő, akkor létezik olyan $C \subset V(G)$ cáfoló halmaz, amelyre $|\partial_{G-e}C| < k$. Ekkor C pontos G-ben és elválasztja x-t és y-t:



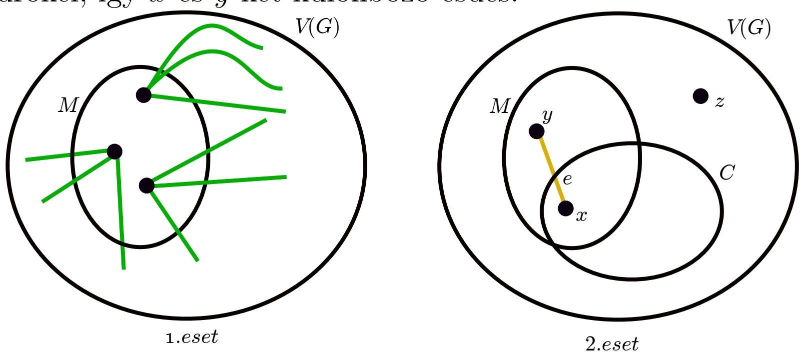
Bizonyítás. i) Legyen M minimális pontos halmaz G-ben, azaz olyan pontos halmaz, amelynek semelyik valódi részhalmaza sem pontos. Azt állítjuk, hogy M egyelemű. Két eset van:

1. eset: *M-en belül nem halad él.* Ekkor a következő egyenlőség teljesül:

$$k = |\partial M| = \sum_{m \in M} |\partial\{m\}| = \sum_{m \in M} d(m)$$

Tudjuk, hogy G-ben minden csúcs foka legalább k, ezért M csak egyelemű lehet.

2. eset: *M-en belül halad legalább egy él.* Legyen ez az él xy. Tudjuk, hogy G-ben nem lehet hurokél, így x és y két különböző csúcs.



M pontos, tehát $M \neq V(G)$. Legyen $z \in V(G) \setminus M$. Az észrevételek miatt van olyan $C \subseteq V(G)$ pontos halmaz, ami elválasztja x-t és y-t. Feltehető, hogy $z \notin C$; ha eleme lenne akkor C helyett vehetnénk $\overline{C}$-t.

4. Lemma (Szubmoduláris egyenlőtlenség). *Ha H gráf és $A, B \subseteq V(H)$, akkor teljesül a következő egyenlőtlenség:*

$$|\partial(A \cap B)| + |\partial(A \cup B)| \leq |\partial A| + |\partial B|$$

A lemma bizonyítása egyszerű: minden élre megnézzük, hogy hányszor számolja a bal, illetve jobb oldal. Azt tapasztaljuk, hogy a jobb oldal mindig legalább annyiszor megszámolja, mint a bal oldal. A részleteket az érdeklődő hallgatóra bízzuk.

Alkalmazzuk a lemmát M-re és C-re. Választásaink alapján $M \cap C \neq \emptyset$, $M \cup C \neq V(G)$:

$$k + k \leq |\partial(M \cap C)| + |\partial(M \cup C)| \leq |\partial M| + |\partial C| = 2k$$

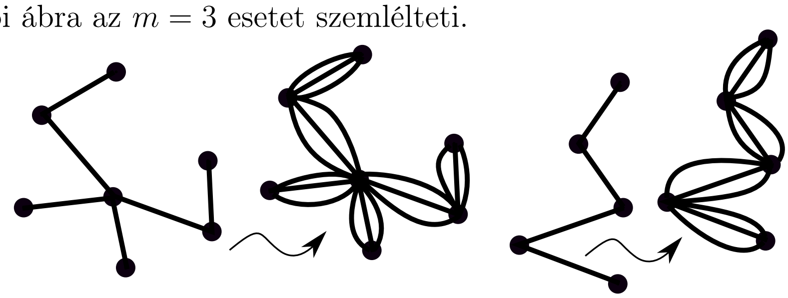
Az egyenlőtlenség első és utolsó tagja egyenlő, ezért összes becslésünk éles, speciálisan $|\partial(M \cap C)| = k$. Az x és y csúcsok közül valamelyik nem eleme C-nek, ezért $M \cap C$ valódi pontos részhalmaza M-nek. Ez ellentmond M minimalitásának, a második eset nem lehetséges.

ii) Legyen P pontos halmaz G-ben. Ekkor $\overline{P}$ is pontos. P-nek és $\overline{P}$-nek van egy-egy tartalmazásra nézve minimális pontos részhalmza, legyenek ezek M_1 és M_2. Ez két különböző egyelemű pontos halmaz G-ben. ■

Példa. Legyen $m \geq 2$ egész. Ha egy T fában minden él helyére m darab párhuzamos élt teszünk, akkor egy minimálisan m-szeresen élösszefüggő gráfot kapunk.

Speciálisan, ha T egy legalább egy hosszú út, akkor pontosan két olyan csúcsunk lesz, amelynek foka m.

Az alábbi ábra az $m = 3$ esetet szemlélteti.



3. Lovász leemelési lemmája és következményei

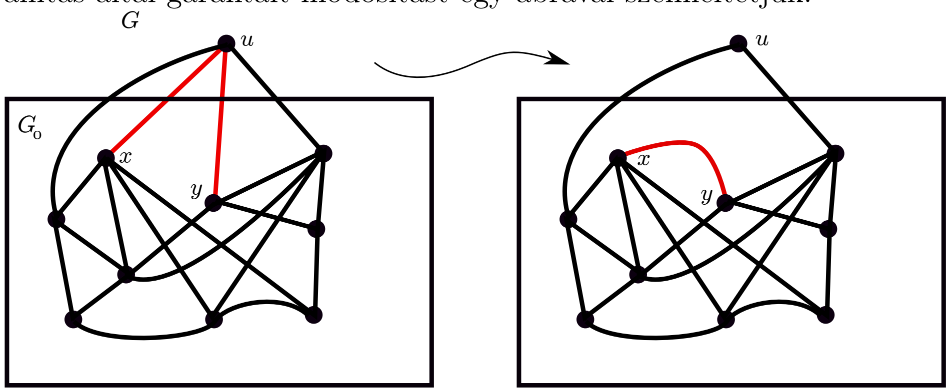
3.1. A lemma

5. Tétel (Lovász László leemelési lemmája). *Legyen G gráf, $u \in V(G)$, $G_0 = G - u$, $k \geq 2$ egész. Tegyük fel az u és G_0 közötti élek száma páros és pozitív, valamint u-ra teljesül a következő feltétel:*

(L) Ha U nemtriviális részhalmaza $V(G_0)$-nek, akkor $|\partial_G U| \geq k$.

Ekkor az u-ra illeszkedő élek között található olyan $e = ux$ és $f = uy$ él, hogy a $\widetilde{G} = G - e - f \dot{+} xy$ gráf is rendelkezzen az (L) tulajdonsággal.

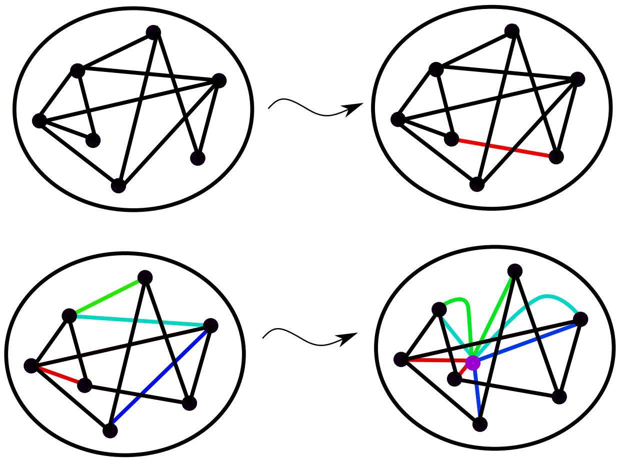
Az állítás által garantált módosítást egy ábrával szemléltetjük.



Az ábrán a piros éleket cseréljük. Ha x és y között már halad él, akkor egy új, a már meglévő xy élekkel párhuzamos élt veszünk fel.

3.2. Alkalmazás: 2ℓ-szeresen élösszefüggő gráfok növekedése

Legyen G gráf, k páros pozitív egész szám. Definiáljuk a következő két operációt:
Élhozzáadás: A G két tetszőleges pontja közé egy új élt teszünk, ezzel a G^+ gráfot kapjuk.



Példa az élhozzáadás és összecsípés ($k = 8$) operációkra

$k/2$ darab él összecsípése: A G gráfban törlünk $k/2$ darab élt és felveszünk egy új pontot. A törölt éleket olyan 2 hosszúságú utakkal helyettesítjük, amelyek két végpontja a törölt él két végpontja és középső pontja az új csúcs. Így egy új, $\widetilde{G}$ gráfot kapunk.

Észrevétel. Ha G k-szorosan élösszefüggő, akkor G^+ és $\widetilde{G}$ is az. G^+ esetén ez nyilvánvaló. $\widetilde{G}$ esetén azt kell ellenőrizni, hogy $V(G)$ tetszőleges valódi, nem-üres részhalmazának határa legalább k elemű. Ezt elég az új pontot nem tartalmazó halmazokra megnézni. Ez egyszerű feladat.

Ez előző észrevétel iterálható: Legyen G_0, az a gráf, aminek egy pontja van és nincs éle. Tegyük fel, hogy G felépíthető az alábbi módon:

$$G_0 \to G_1 \to \ldots \to G_l = G,$$

ahol minden $i = 0, \ldots, l-1$-re a $G_i \to G_{i+1}$ művelet vagy élhozzáadás, vagy $k/2$ darab él összecsípése. Ekkor G k-szorosan élösszefüggő.

Célunk a fenti észrevétel megfordításának igazolása.

6. Tétel. *Ha k pozitív páros szám, és G k-szorosan élösszefüggő gráf, akkor G felépíthető G_0-ból (lásd fent) az előző két operáció segítségével.*

Bizonyítás. Legyen G és k adott. Az élszám szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk az állítást. G_0 és az összes egypontú gráf triviálisan felépíthető. Legyen G egy legalább két csúcsot tartalmazó k-szorosan összefüggő gráf. Tegyük fel, hogy $|E(G)|-1$ élszámú gráfok felépíthetőek.

Két eset lehetséges:

1. eset: G nem minimálisan k-szorosan élösszefüggő. Ekkor G-nek van olyan e éle, hogy $G-e$ k-szorosan élösszefüggő. $|E(G-e)| = |E(G)| - 1$ és az indukciós

feltevés miatt $G - e$ felépíthető. Így az e él hozzá/vissza-adásával kapott G gráfot is felépíthetjük G_0-ból.

2. eset: G minimálisan k-szorosan élösszefüggő, $|V(G)| \geq 2$.

Ebben az esetben a G-nek van egy u csúcsa, aminek a fokszáma k. Erről a csúcsról a Lovász-lemma $\frac{k}{2}$-szörös alkalmazásával emeljük le az éleket, majd töröljük u-t. Így a lemma miatt egy H k-szorosan élösszefüggő gráfot kapunk, aminek kevesebb éle van, mint G-nek. Ha a H gráf $E(H) \setminus E(G)$ halmazbeli éleit egy u pontba összecsípjük, akkor a G gráfot kapjuk. Az 1. esethez hasonlóan adódik, hogy G felépíthető G_0-ból a két operáció alkalmazásával. ■

3.3. A lemma bizonyítása

A Lovász-lemma következő, az eredetinél kissé erősebb változatát bizonyítjuk:

7. Lemma $^+$**.** *Legyen G gráf, $u \in V(G)$, $G_0 = G - u$, $k \geq 2$ egész. Tegyük fel az u és G_0 közötti élek száma páros és pozitív, valamint G_0-ra teljesül az (L) feltétel. Ekkor bármely $e = ux$ élhez van olyan $f = uy$ él, hogy a $\widetilde{G} = G - e - f \dot{+} xy$ gráf is rendelkezzen az (L) tulajdonsággal.*

Bizonyítás. Legyen G, u, k és $e = ux$ adott. Próbáljuk az $f = uy$ élt. Legyen $\widetilde{G} = G - e - f \dot{+} xy$. Tegyük fel, hogy $\widetilde{G}$ nem (L) tulajdonságú. Ekkor létezik $C_f \subseteq V(G_0)$ cáfoló halmaz, amelyre $|\partial_{\widetilde{G}} C_f| < k$.

Ha C_f elvágja x-t és y-t, akkor $|\partial_{\widetilde{G}} C_f| = |\partial_G C_f| \geq k$, ami ellentmondás.

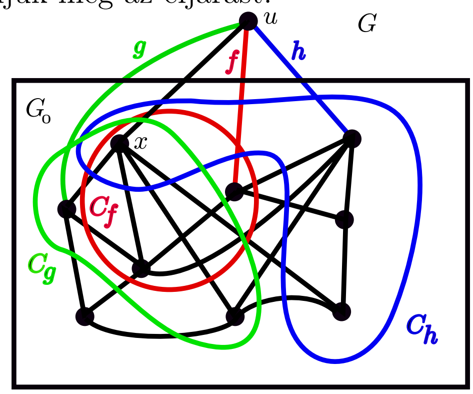
C_f nem vágja el x-t és y-t. Feltehető, hogy $x, y \in C$; ellenkező esetben C helyett vehetnénk $V(G_0) \setminus C$-t.

Ekkor $k > |\partial_{\widetilde{G}} C_f| = |\partial_G C_f| - 2$, ezért $|\partial_G C_f| \leq k + 1$. Jelöljük $V(G_0) \setminus C_f$-t $\overline{C_f}$-rel. Legyen az $u - G_0$ élek száma d, az $u - C_f$ élek száma d_1, az $u - \overline{C_f}$ élek száma d_2 és a $C_f - \overline{C_f}$ élek száma d_3. A G gráf (L) tulajdonságú, ezért $d_2 + d_3 = |\partial_G \overline{C_f}| \geq k$, valamint $d_1 + d_3 = |\partial_G C_f| \leq k + 1$. $d_1 + d_2 = d$ páros, azaz $d_1 \equiv d_2 \mod 2$, ezért

$$d_1 \leq d_2. \tag{1}$$

Azaz az u-ból induló éleknek maximum fele haladhat a C_e cáfoló halmazhoz.

Más élekre is ismételjük meg az eljárást.



Vagy találunk megfelelő uy élt, vagy kapunk cáfoló halmazok egy $\mathcal{C}$ halmazát, amelyre $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$ tartalmazza u szomszédságát. Ritkítsuk ki a $\mathcal{C}$ halmazrendszert úgy, hogy ezen tulajdonság teljesüljön, de benne minimális számú cáfoló halmaz legyen. Legyen $\mathcal{C}_0$ az így kapott rendszer. (1) alapján nem lehet, hogy $\mathcal{C}_0$ csak két cáfoló halmazból álljon: Ekkor u-ból induló éleknek maximálisan a fele haladhatna a két halmaz mindegyikéhez úgy, hogy az ux él mindkettőben szerepel és a két halmaz mégis lefedé u szomszédságát. Ez pedig nyilván nem lehet.

A továbbiakhoz szükségünk van egy lemmára.

8. Lemma. *Ha H gráf, és $A, B, C \subseteq V(H)$, akkor teljesül a következő egyenlőtlenség:*

$$|\partial(A\cap B\cap C)|+|\partial(A\cap \overline{B}\cap \overline{C})|+|\partial(\overline{A}\cap B\cap \overline{C})|+|\partial(\overline{A}\cap \overline{B}\cap C)| \le |\partial A|+|\partial B|+|\partial C|$$

A lemma bizonyítása (mint a szubmoduláris egyenlőtlenség bizonyítása) egyszerű számolás. Minden élre ellenőrizni kell, hogy a bal, illetve jobb oldal hányszor számolja meg. A jobb oldalhoz minden él legalább annyi hozzájárulást ad mint bal oldalhoz.

Legyen $C_1, C_2, C_3 \in \mathcal{C}_0$. Alkalmazzuk a lemmát ezekre, azzal a plusz észrevétellel, hogy az ux él a bal oldalon egyszer, míg a jobb oldalon háromszor van számolva:

$$\begin{aligned}&|\partial(C_1 \cap C_2 \cap C_3)| + |\partial(C_1 \cap \overline{C_2} \cap \overline{C_3})| + |\partial(\overline{C_1} \cap C_2 \cap \overline{C_3})| + |\partial(\overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap C_3)| \le \\ &\le |\partial C_1| + |\partial C_2| + |\partial C_3| \le (k+1) + (k+1) + (k+1) - 2\end{aligned}$$

A kiinduló négy tagú összegben szereplő háromtagú metszethalmazok mindegyike nem üres (az elsőnek eleme x, a többi üressége abból ered, hogy $\mathcal{C}_0$ egyik elemét sem lehet elhagyni úgy, hogy lefedjék u szomszédságát, például C_3 szükségszerűen metszi $\overline{C_1}\cap\overline{C_2}$-t). Így az (L) tulajdonság miatt a négy tagú összeg mindegyik tagja legalább k. Összefoglalva $4k \le 3k+1$, azaz rendezés után $k \le 1$.

Ez ellentmondás, mert feltettük, hogy $k \ge 2$. Azaz valamelyik uy él kielégíti a lemma állítását. ■