Diszkrét Matematika MSc hallgatók számára

4. Előadás

Előadó: Hajnal Péter
Jegyzetelő: Csenkei Anita 2010. szeptember 27.

Emlékeztető. $H = (\vec{G}, s, t, c)$ egy hálózat, ahol $\vec{G}$ egy irányított gráf $s \neq t$ kijelölt csúcsok (s: forrás, t: nyelő), $c : E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ egy kapacitásfüggvény.

Egy f folyam egy hálózatban az élekhez úgy rendel anyagmennyiséget (való számot), hogy minden e élhez rendelt szám $[0, c(e)]$-be essen, továbbá a forrástól, nyelőtől különböző csúcsokra teljesüljön az anyagmegmaradás törvénye. Egy $\mathcal{V}$ st-vágás egy hálózatban a csúcsok $V(G) = S\dot{\cup}T$ felosztása két részre, amelyre teljesül, hogy $s \in S$ és $t \in T$.

Vegyük egy tetszőleges f folyamot és $\mathcal{V}$ st-vágást. A folyam értéke, illetve a vágás kapacitása, illetve a köztük lévő viszony:

$$\text{é}(f) \stackrel{\text{def}}{:=} \sum_{\substack{e:\vec{xy}\in E\\ x\in S\\ y\in T}} -f(e) - \sum_{\substack{e:\vec{xy}\in E\\ y\in S\\ x\in T}} f(e) \leq \sum_{\substack{e:\vec{xy}\in E\\ x\in S\\ y\in T}} c(e) \stackrel{\text{def}}{:=} c(\mathcal{V})$$

A folyamok főtétele: A következők ekvivalensek:

(i) f optimális folyam,

(ii) nem létezik javító-út f-re,

(iii) van olyan $\mathcal{V}$ vágás, hogy $c(\mathcal{V}) = \text{é}(f)$.

1. Folyamok főtételének következményei

1. Következmény (Maximális folyam-minimális vágás tétel, $MFMC$ tétel). *Legyen $(G; s, t, c)$ egy hálózat. Ekkor*

$$\max\{\text{é}(f) : f \text{ egy megengedett folyam a } H \text{ hálózatban}\} = \\ = \min\{c(\mathcal{V}) : \mathcal{V} \text{ egy } st\text{-vágás a } H \text{ hálózatban}\}$$

Bizonyítás. $\leq$: Tetszőleges f folyamra és tetszőleges $\mathcal{V}$ st-vágásra $\text{é}(f) \leq c(\mathcal{V})$. Ezt az optimális folyamra és minimális kapacitású vágásra alkalmazva kapjuk, hogy a bal oldal nem nagyobb a jobb oldalnál.

$\geq$: Vegyünk egy maximális értékű folyamot, legyen ez $f_{\max}$. Tehát $\text{é}(f_{\max}) := \max\{\text{é}(f) : f \text{ folyam}\}$. A főtétel alapján van olyan $\mathcal{V}$ vágás, amelyre $\text{é}(f_{\max}) = c(\mathcal{V})$ teljesül. Ebből adódik a hiányzó egyenlőtlenség ■

2. Következmény. *Adott hálózatban egy maximális értékű folyam algoritmikusan megtalálható.*

Bizonyítás. A bizonyítás egy konkrét algoritmus leírása. Az algoritmust Ford és Fulkerson 1956-ban publikálta.

Ford—Fulkerson-algoritmus:

(Inicializálás) Legyen f az azonosan 0 folyam (minden élen 0
   anyagmennyiség folyik).
   // A hálózat üres.
(Címke-inicializálás) s-et címkézzük meg.
   // A forrást tartalmazó 0 hosszú út javító-út-kezdemény.
(Címkekiterjesztés I) Keressünk olyan $\vec{xy}$ élt, amelyre x címkézett,
   y nem címkézett és a rajta folyó anyagmennyiség nem éri el
   a kapacitást.
   Címkézzük meg y-t.
(Címkekiterjesztés II) Keressünk olyan $\vec{yx}$ élt, amelyre x címkézett,
   y nem címkézett és a rajta folyó anyagmennyiség pozitív.
   Címkézzük meg y-t.
   // Megtalált javító-út-kezdeményeket mohón hosszabítunk.
(Sikeres keresés) t címkét kap.
   // t megcímkézésének okát visszakeresve egy forrás-nyelő utat
   // kapunk, amely javító út lesz.
   f-et javítsuk a megtalált javító út alapján. Töröljük a címkéket.
   Térjünk vissza a (Címke-inicializálás) lépéshez.
(Sikertelen keresés) t nem kap címkét és a címkekiterjesztések
   kifulladnak. Leállunk, az aktuális f az eljárás outputja.
   // Ekkor f optimális, a címkézett/nem címkézett csúcsok
   // egy ezt bizonyító vágást adnak.

Az algoritmus címkekiterjesztési lépéseiben rejlő keresés nincs részletesen leírva. Általában több lehetőség is van. Az implementációtól függ, hogy az algoritmus melyiket találja meg. Így a Ford—Fulkerson-algoritmus igazából egy eljárás osztály (ahogy például a szimplex algoritmus is).

Egy konkrét megvalósítását említjük meg. Ekkor a címkekiosztások fázisokban történnek. Egy fázisban az előző fázisban címkét kapott pontok töltik be az x csúcs szerepét. Az összes lehetséges címkekiterjesztések elvégzése zárja be a fázist.

A címkézés a szélességi keresés filozófiája alapján működik. Könnyen látható, hogy sikeres keresés esetén a lehető legrövidebb javító utat találja meg ez az algoritmus. Ez az eljárás a Ford—Fulkerson-algoritmus Edmonds—Karp-változata. (Ezt Edmonds és Karp 1972-ben írta le. Egy további finomítás Dinic nevéhez fűződik.)

Az algoritmusban több ciklus is szerepel. A címkekiterjesztések ismétlése nem problémás. Mohó módon végezzük, a címkék halmaza nő. Véges ismétlés sikeres kereséshez vagy elakadáshoz vezet. A javítások ismétlése azonban problémás.

Két eredményt emelünk ki bizonyítás nélkül. Megjegyezzük, hogy feltesszük (azt a gyakorlatban irreális feltvést), hogy pontos valós-aritmetikát végzünk.

Példa. Van olyan hálózat, amelyben a Ford—Fulkerson-algoritmus javítások végtelen sorozatát végzi és a (szükségszerűen konvergáló) folyamérték nem is tart a maximális folyamértékhez.

3. Tétel (Edmonds—Karp-tétel). *A Ford—Fulkerson-algoritmus Edmonds—Karp-változata $\mathcal{O}(n^5)$ javítás után szükségszerűen leáll.*

Egy jóval reálisabb feltétel szerint az inputban (a hálózatban) szereplő számok mind racionálisak. Azaz $c : E(G) \to \mathbb{Q}_{\geq 0}$. Egyszerű skálázással (mértékegységváltással) feltehetjük, hogy $c : E(G) \to \mathbb{N}$. Ekkor nincs is szükség a Ford—Fulkerson-algoritmus ügyes implementálására. Ezt a következő következményben fejtjük ki. ∎

4. Következmény. *Legyen (G, s, t, c) egy hálózat, ahol c egy egész értékű függvény, azaz c: $E(\vec{G}) \to \mathbb{N}$. Ekkor létezik olyan optimális folyam, amely szintén egész értékű.*

Bizonyítás. Azt fogjuk belátni, hogy ha az input minden komponense egész (minden él kapacitását egy egész szám írja le), akkor a Ford—Fulkerson-algoritmust futtatva csak egész értékek fordulnak elő. Továbbá az algoritmus leáll, azaz kiszámol egy optimális folyamot, amit így egész értékű függvény ír le.

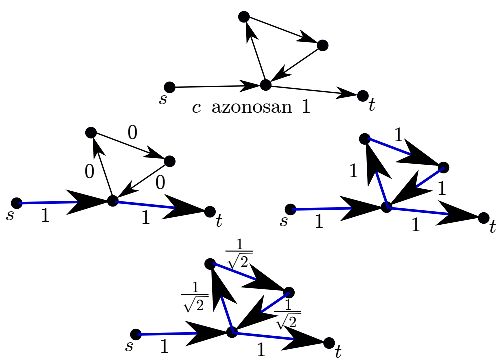
Az algoritmus az $f \equiv 0$ folyamból indul ki. Azaz az inputban rejlő értékek mellett csak 0-k jelennek meg. A további számokhoz számolás folyamán jutunk. Új számokra akkor lesz szükségünk, ha P javító-utat találtunk és f-ről áttérünk $\widehat{f}$ javítására. Emlékezzünk a szükséges „számtanra”:

Legyen $\delta_{\text{előre}} = \min\{c(e) - f(e) : e \in E_{\text{előre}}\}$, $\delta_{\text{hátra}} = \min\{f(e) : c \in E_{\text{hátra}}\}$ Ahol $E_{\text{előre}}$ az előremutató élek halmaza és $E_{\text{hátra}}$ a hátramutató élek halmaza P-n. $\delta = \min\{\delta_{\text{előre}}, \delta_{\text{hátra}}\} > 0$.

$$\widehat{f}(e) := \begin{cases} f(e), & e \notin E(P), \\ f(e) + \delta, & e \in E_{\text{előre}}(P), \\ f(e) - \delta, & e \in E_{\text{hátra}}(P). \end{cases}$$

Abból ahogyan $\widehat{f}(e)$-t definiáltuk, látható, hogy minden kiszámolt érték egész, feltéve hogy kiinduló értékeink egészek (összeadás, kivonás, minimum érték vétele egész számokon végrehajtva egész számokat eredményez). Speciálisan δ is egész, így értéke legalább 1, azaz minden növelés legalább 1-gyel növeli a folyam értékét. Ebből következik, hogy Ford—Fulkerson-algoritmus le fog állni és a kiszámolt optimális folyam bizonyítja a tételt. ∎

Példa. H hálózat $c \equiv 1$ kapacitásfüggvénnyel. Három optimális folyammal, amelyek közül kettő különböző, egész értékű és egyharmadik egyes éleken irracionális anyagmennyiséggel.



Emlékeztető. Két élt függetlennek nevezünk, ha végpontjaik négy különböző pontot adnak. Egy G gráf éleinek egy M halmazt *párosításnak* nevezünk, ha a benne lévő élek páronként függetlenek és nem hurkok.

$$\nu(G) = \max\{|M| : M \text{ párosítás } G\text{-ben}\}$$

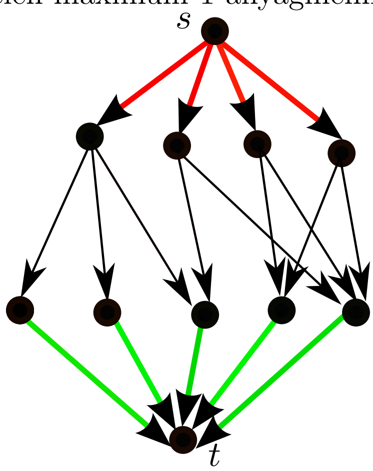
Egy $L \subset V(G)$ halmazt *lefogó halmaznak* nevezünk, ha minden $e \in E(G)$ élnek legalább az egyik végpontja L-ben van.

$$\tau(G) := \min\{|L| : S \text{ lefogó ponthalmaz } G\text{-ben}\}.$$

Minden G gráfra $\tau(G) \geq \nu(G)$ hiszen egy optimális párosításnak is minden élét le kell fogni egy ponttal és párosítás esetén ezeket a „feladatokat" mind különböző csúcsok oldhatják csak meg.

5. Következmény (Kőnig-tétel). *Legyen G páros gráf. Ekkor $\nu(G) = \tau(G)$.*

Bizonyítás. Az állítás érdemi része, hogy $\nu(G) \geq \tau(G)$. Ehhez a G páros gráfból egy H hálózatot konstruálunk: Legyen A és F a páros gráf két színosztálya. A elemei legyenek az alsó, F elemei a felső pontok. A hálózat gráfja $\widehat{G}$ lesz. Ehhez felveszünk két új pontot s (forrás) és t (nyelő). G élei mellett s-ből minden F-beli pontba vezet pontosan egy él, és minden A-beli pontból vezet pontosan egy él t-be. Minden élet lefele irányítunk, tehát F és A közt F-ből A-ba mutatnak a G gráf élei. Legyen $c \equiv 1$ azaz minden élen maximum 1 anyagmennyiség áramolhat.



1. Állítás: $\max\limits_{\substack{f \text{ folyam} \\ H\text{-ban}}} \text{é}(f) = \nu(G)$

1. Állítás bizonyítása: Legyen M egy párosítás G-ben. Ekkor definiálható egy f_M folyam, amire $\text{é}(f_M) = |M|$. Valóban, egységnyi anyagmennyiség folyjon s-ből minden felső párosított csúcshoz, M élein és minden alsó párosított pontból t-hez. A többi élen 0 anyagmennyiség folyjon. Ebből adódik, hogy $\max\limits_{\substack{f \text{ folyam} \\ H\text{-ban}}} \text{é}(f) \geq \nu(G)$.

Fordítva vegyünk egy optimális $f : E(H) \to \{0, 1\}$ folyamot (lásd előző következmény). Legyen $F_{opt} = \{e : f_{\text{opt}}(e) = 1\} \subseteq E(G)$.

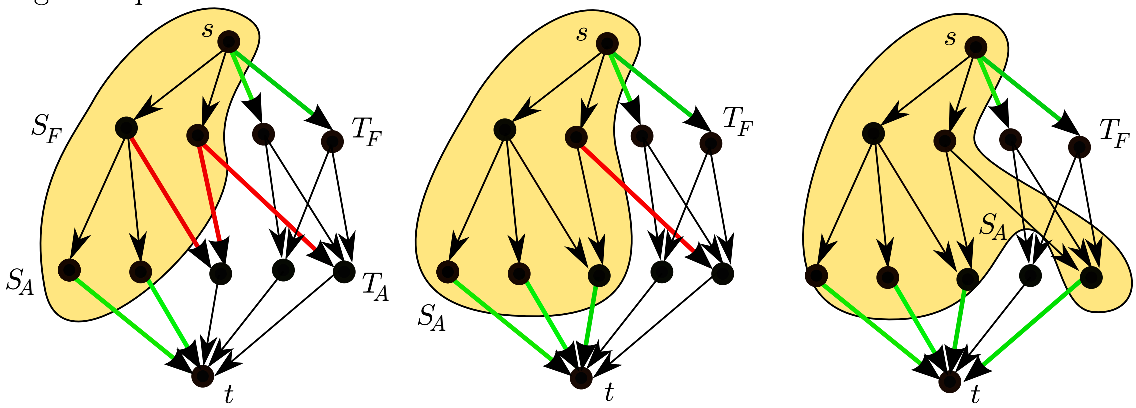
Tudjuk, hogy $f \in F$ befoka eggyel egyenlő, továbbá $a \in A$ a kifoka eggyel egyenlő. Azaz, ha az eredeti gráf egy $e = fa$ élén folyik anyagmennyiség (esetünkben ez szükségszerűen egységnyi), akkor ez az anyagmegmaradás törvényei alapján csak az sf élen keresztül jöhet (és a teljes mennyiséget elszállítja az e él), majd az at élen a teljes szállított anyagmennyiség t-be jut.

Így ha $E_{\text{opt}} \cap E(G)$ elemeit nézzük, akkor két esetet kizárhatunk: (1) Nem lehetséges „felső összefutása az éleknek" azaz hogy F egy pontjából két él induljon. (2) Nem lehetséges „alsó összefutás" sem, azaz olyan hogy egy A-beli pontból két él induljon ki. Azaz F_{opt} azon élei, amelyek az eredeti gráfunk élei egy M párosítást alkotnak G-ben. Az $(\{s\} \cup F, A \cup \{t\})$ vágás mentén mérve értékét $|M|$-et kapunk. Így kapjuk a hiányzó $\max\limits_{\substack{f \text{ folyam} \\ H\text{-ban}}} \text{é}(f) \leq \nu(G)$ egyenlőtlenséget.

2. Állítás: $\min_{\text{V vágás}} c(\mathcal{V}) = \tau(G)$

2. Állítás bizonyítása: Legyen $\mathcal{V}_{\text{opt}} = (S, T)$ optimális vágás, A két oldal elnevezését válasszuk úgy, hogy az s forrás S oldalon van, t nyelő T oldalon van.

Ha lenne $e = \vec{xy} \in E(\vec{G}) \subset E(\widehat{G})$ él a vágásban (azaz „középél") akkor tegyük a következőt. Ha $x \in S$, $y \in T$, akkor az y pontot „dobjuk át" a másik oldalra: $\widetilde{S} = S \cup \{y\}$, $\widetilde{T} = T \setminus \{y\}$. Mivel minden él kapacitása 1, ezért a változtatás (átdobás) hatása a vágás kapacitására: legalább egy G-éllel csökken és pont egy t-be vezető éllel nő a kapacitás. De az eredő kapacitás nem csökkenhet, azaz a módosított $(\widetilde{S}, \widetilde{T})$ vágás is optimális.



Ha $x \in T$, $y \in S$, akkor hasonlóan kezelhető a probléma. Ezen ötlet ismétlésével $\widetilde{\mathcal{V}}_{\text{opt}}$ vágáshoz jutunk, ami optimális, de $\vec{G}$-nak már nincs S-ből T-be menő éle. Ekkor a $\widetilde{\mathcal{V}}_{\text{opt}}$ vágáson keresztül már nem halad él.

$c(\widetilde{\mathcal{V}}_{\text{opt}}) = |S \cap A| + |T \cap F|$, ahol $(S \cap A) \cup (T \cap F)$ G-ben lefogó ponthalmaz (ezen csúcshalmazt elkerülő élek nem lehetnek gráfunkban), tehát a minimum vágáskapacitás egy lefogó ponthalmaz mérete, speciálisan legalább τ.

Tehát $c(\widetilde{\mathcal{V}}_{\text{opt}}) \geq \tau(G)$. Továbbá a gondolatmenet megfordításával található $\tau(G)$ kapacitású vágás. Így kapjuk a második állítást.

Az MFMC tétel alapján $\max_{\substack{f \text{ folyam} \\ H\text{-ban}}} \text{é}(f) = \min_{\substack{\mathcal{V} \text{ vágás} \\ H\text{-ban}}} c(v)$, ami a két bizonyított állítás alapján éppen Kőnig-tétel állítását adja. ∎

A következő következmény kimondása előtt egy fontos észrevételt emelünk ki.

Észrevétel. Legyen $\vec{G}, s, t \in V(G)$ egy hálózat, amelyben minden él kapacitása 1. Legyen $f : E(\vec{G}) \to \{0, 1\}$ egy egész értékű függvény. Ekkor f leírható egy F élhalmazzal (azon élek halmazával, ahol folyik anygmennyiség/egységnyi anyagmennyiség folyik). Ez az azonosítás ugyanaz mint az $E(\vec{G})$ részhalmazai és az $E(\vec{G})$-n értelmezett karakterisztikus függvények azonosítása.

Állítás: Legyen F egy élhalmaz G-ben. A következők ekvivalensek:

(i) F egy f folyamot ír le.

(ii) Minden nem nyelő és nem forrás csúcsra ugyanannyi F-él fut be, mint ahány kifut.

(iii) F felírható $\dot\cup_i P_i \dot\bigcup \dot\cup_i Q_i \dot\bigcup \dot\cup_i C_i$ alakban, ahol a P_i halmazok egy-egy forrás-nyelő irányított út élhalmaza, a Q_i halmazok egy-egy nyelő-forrás irányított út élhalmaza, a C_i halmazok egy-egy irányított kör élhalmaza. (A jelölésben ott van az a feltétel, hogy az unió tagjai DISZJUNKT élhalmazok.)

Az állítás bizonyítása: (i) és (ii) ekvivalenciája nyilvánvaló. Az anyagmegmaradási törvények két oldalán lévő összegek éppen bemenő, illetve kifutó F-éleket számolnak egy nem nyelő, nem forrás csúcsra.

$(iii) \Rightarrow (ii)$ könnyen ellenőrizhető.

Az ekvivalencia „lényege" $(ii) \Rightarrow (iii)$. Ezt egy algoritmussal írjuk le.

1. eset: *F-ben van irányított kör.* Legyen C egy irányított kör élhalmaza. Ekkor $F - C$-re is teljesülnek (ii) fokszám feltételei. Rekurzív módon megkereshetjük $F - C$ felbontását/dekompozícióját, amihez C-t hozzáadva kapjuk a bizonyítandó felbontást F-re.

2. eset: *F-ben nincs irányított kör és F nem üres.* e egy él F-ben. Ekkor a fokszám feltételek miatt e-t előre/hátra kiterjeszthetjük egy P maximális úttá. Ennek két végpontja csak a forrás-nyelő pár. Ekkor $F-P$-re is teljesülnek (ii) fokszám feltételei. Rekurzív módon megkereshetjük $F - P$ felbontását/dekompozícióját, amihez P-t hozzáadva kapjuk a bizonyítandó felbontást F-re.

A teljes (mohó) algoritmus F szétbontására:

```
Amíg F ≠ ∅
   Ha találunk, vegyük ki egy C irányított kör élhalmazát F-ből
   és F-et helyettesítsük F − C-vel.
      // A megtalált C egy lehetőség egy összetevőre.
      // Mohó módon az output részévé tesszük.
   Vegyük ki egy P irányított forrás-nyelő vagy nyelő-forrás út
   élhalmazát és F-et helyettesítsük F − P-vel.
      // A megtalált P egy lehetőség egy összetevőre.
      // Mohó módon az output részévé tesszük.
```

Az észrevételt egy kissé finomítjuk: Ha a fenti dekompozícióban k darab st-út, ℓ darab ts-út szerepel, akkor a megfelelő f folyamra $\text{érték}(f) = k - \ell$. Speciálisan, ha f egy optimális folyam, akkor $\ell = 0$. Sőt optimalitás esetén F dekompozíciójából elhagyhatók az irányított körök (amennyiben szerepelnek). Így egy F_0 szintén optimális folyamot kódoló élhalmazt kapunk.

Nevezzünk egy élhalmazt *egyszerűnek*, ha van olyan dekompozíciója, amelyben nem szerepelnek irányított körök és ts-utak. A fenti megállapításainkat a következőképpen összegezhetjük.

6. Lemma. *Legyen $(\vec{G}; s, t; c)$ egy hálózat, amely kapacitásfüggvénye az azonosan 1 függvény. Ekkor van olyan optimális folyam, amely egy egyszerű élhalmazzal azonosított. A maximális folyamérték éppen az egyszerű dekompozícióban az st-utak száma.*

Ezekután már könnyen kapjuk a további következményeket:

7. Tétel (Menger-tétele). *$\vec{G}$ egy irányított gráf $s, t \in V$ két ($s \neq t$) kitüntetett csúccsal. Ekkor*

$$\max\{k : P_1, \ldots, P_k \text{ éldiszjunkt } st \text{ utak}\} =$$
$$= \min\{|L| : L \subseteq E(\vec{G}), \vec{G} - L\text{-ben nincs } \vec{st} \text{ út}\}.$$

Megjegyzés. A tételt a következő „mesével" világíthatjuk meg: Tegyük fel, s lakótelep, t belváros, a rendőrök tudják, hogy bünözők a lakótelepről a belvárosba tartanak. Utak lezárásával szeretnék ellenőrizni a belvárosba bemenő forgalmat (amely a kresz betartásával történik, azaz az útszakaszok irányítása szerint halad mindenki). A bizonyítandó állítás bal oldala a bünözők független terveinek maximális száma, míg a jobb oldal a rendőrök számára lezárandó útszakaszok minimális száma.

Bizonyítás. $\leq$: Egyszerű. A fenti mesén alapuló konkrét példa jól megvilágítja az állítást. Tegyük fel, hogy a bal oldal értéke 10. Azaz a bünözők 10 éldiszjunkt tervvel állhatnak elő. Minden útlezárás legfeljebb egy tervet akadályozhat meg (itt használjuk a tervek függetlenségét/éldiszjunktságát). Azaz a rendőrök számára legalább 10 út lezárása szükséges.

$\geq$: A feladat gráfjában minden él kapacitása legyen 1. Az így kapott H hálózatban az optimális folyamok közt lesz egy, amely egy egyszerű élhalmazzal azonosítható. Ha értéke k, akkor k éldiszjunkt st útra szétszedhető. Ez megfordítva is igaz. k éldiszjunkt st útból összerakható egy k értékű folyam. Azaz

$$\max\{k : P_1, \ldots, P_k \text{ éldiszjunkt } st \text{ utak}\} = \max\{\text{é}(f) : F \text{ folyam } H\text{-ban}\}$$

A Menger-tételben szereplő élhalmazokat nevezzük szeparáló élhalmazoknak (elhagyásuk után nem lesz st út G-ben). Minden st-vágás S-T élei egy szeparáló halmazt adnak. Fordítva is igaz: Bármely L szeparáló élhalmaznak van olyan részhalmaza ami egy vágás élhalmaza: Például a

$$\mathcal{V} = (s\text{-ből } G - L\text{-ben elérhető csúcsok, } s\text{-ből } G - L\text{-ben nem elérhető csúcsok})$$

vágás S-T élei L egy részhalmazát adják. Azaz a minimális szeparáló halmazt megkapjuk, ha vesszük azt az st-vágást, amely S-T élei a legkevesebben vannak. Másrészt

$$\min_{V \text{ vágás}} c(\mathcal{V}) = \min_{V \text{ vágás}} |\{\vec{xy} : x \in S, y \in T\}|.$$

Összegezve

$$\min\{c(\mathcal{V}) : \mathcal{V} \text{ egy } st\text{-vágás}\} = \min\{|L| : L \subseteq E(\vec{G}), \vec{G} - L\text{-ben nincs } \vec{st} \text{ út}\}.$$

Az MFMC-tétel következménye a Menger-tétel. ■

A tételben az alapgráf irányítottsága nem lényeges.

8. Következmény (Menger tétele (irányítatlan gráfban élfüggetlen utakra vonatkozó változat)). *Legyen G egy irányítatlan gráf, és s, t két pont a gráfban. Ekkor*

$$\begin{aligned} \max\{k :& P_1, \ldots, P_k \text{ éldiszjunkts } st \text{ utak}\} = \\ &= \min\{|L| : L \subset E(G), G - L\text{-ben nincs } st \text{ út}\}. \end{aligned}$$

Csak vázoljuk ennek egy lehetséges igazolását: Legyen $\vec{G}$ az a gráf, amelyet G-ből úgy kapunk, hogy minden $e = xy$ élét helyettesítjük két éllel: egy $\vec{xy}$ és egy $\vec{yx}$ éllel (azaz az e él oda-vissza irányított két példányával). Írjuk fel az MFMC-tételt.

A maximális folyamérték kombinatorikus leírásánal kell egy kissé óvatosnak lennünk. Vegyünk egy $f : E(\vec{G}) \to \{0, 1\}$ optimális folyamot és az ezt leíró F élhalmazt. Ez egyszerűvé tehető egy mohó algoritmussal. Ezt úgy alkalmazzuk, hogy az oda-vissza menő élpárokat (kettő hosszú irányított köröket) dobjuk el F-ből. Ha ezek elfogytak, akkor fejezzük be az egyszerűvé tételt. Legyen F_0 a kapott élhalmaz. (ebben minden eredeti élnak maximum egy példánya szerepel). F_0 éldiszjunkt $\vec{st}$-utak élhalmazainak uniója. Ezek G-ben megfelelnek st-utak élhalmazainak. Ezek előzetes előkészületeink miatt éldiszjunkt utak lesznek G-ben. (Az előkészületek nélkül ezt nem tudnánk.) Azaz a maximális folyamérték éppen a bizonyítandó egyenlőség bal oldala.

A további része a bizonyításnak teljesen analóg az irányított esettel.

Továbbá útrendszerünk éldiszjunktsága helyettesíthető az útrendszer belső ponthalmazainak páronkénti diszjunktságára vonatkozó feltétellel.

9. Következmény (Menger tétele (pontfüggetlen utakra vonatkozó változatok)).

(i) Legyen $\vec{G}$ egy irányított gráf, és legyen s, t két pont a gráfban. Tegyük fel, hogy nincs $\vec{st}$ irányított él, a gráfban. Ekkor

$$\max\{k : P_1, \dots, P_k \text{ pontfüggetlen } \vec{st} \text{ út}\} =$$
$$= \min\{|U| : U \subseteq V(\vec{G})\backslash\{s,t\} \text{ és } G - U\text{-ban nincs } \vec{st} \text{ út}\}.$$

(ii) Legyen G egy irányítatlan gráf, és legyen s, t két pont a gráfban. Tegyük fel, hogy nincs st él a gráfban. Ekkor

$$\max\{k : P_1, \dots, P_k \text{ pontfüggetlen } st \text{ út}\} =$$
$$= \min\{|U| : U \subseteq v(\vec{G})\backslash\{s,t\} \text{ elválasztja } s\text{-et és } t\text{-t}\}.$$

Ismét csak vázoljuk mi a teendő, ha ezen változatot szeretnénk a fentiek után igazolni.

(i)-hez legyen $\vec{G}'$ az a gráf amely $\vec{G}$-ből nyerünk a következő módon: Legyen $V(\vec{G}') = \{s,t\} \cup \{x_{\mathrm{be}}, x_{\mathrm{ki}} : x \in V(\vec{G}) - \{s,t\}\}$. Minden $e = \vec{xy} \in E(\vec{G})$ élnek feleljen meg egy $e' = \overrightarrow{x_{\mathrm{ki}}, y_{\mathrm{be}}}$ él (legyen $s_{\mathrm{ki}} = s_{\mathrm{be}} = s$ és $t_{\mathrm{ki}} = t_{\mathrm{be}} = t$). $E(\vec{G}')$ élhalmazt alkossák ezek az élek és az $\{\overrightarrow{x_{\mathrm{be}} x_{\mathrm{ki}}} : x \in V(\vec{G}) - \{s,t\}\}$ élek.

Írjuk fel az MFMC-tételt $\vec{G}'$ gráfra. A kapott két egyenlőség két oldaláról lássuk be, hogy a bizonyítandó egyenlőség egy-egy oldalával egyenlők.

(ii)-hez korábbi ötleteinket kell összegezni. A részletek kidolgozását az érdeklődő hallgatókra bízzuk.