

3. Előadás

Előadó: Hajnal Péter

Jegyzetelő: London András

2010. szeptember 20.

1. Gráfok magasabb fokú összefüggése

Definíció. Legyen k egy pozitív egész. G gráf k -szorosán élösszefüggő (kélőf), ha tetszőleges k -nál kisebb elemmszámú élhalmazát elhagyva a kapott gráf összefüggő lesz. Formulával

$$\forall F \subseteq E(G) : |F| < k \Rightarrow G - F \text{ összefüggő.}$$

A feltételnek teljesülni kell $F = \emptyset$ esetén is, azaz alapgráfunk összefüggő. Az összefüggőségnek meg kell maradnia, ha valódi élelhagyás történik.

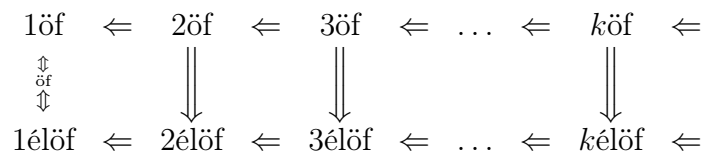
Definíció. Egy G gráf k -szorosán (pont)összefüggő (köf.), ha tetszőleges k -nál kisebb elemszámú csúcshalmazát elhagyva a kapott gráf összefüggő és $|V(S)| > k$. Formálisan

$$\forall U \subseteq V(G) \quad |U| < k \Rightarrow G - U \text{ összefüggő.}$$

A pontszámra adott technikai feltétel szerepe, hogy a gráf elegendően nagy legyen: a csúcsok elhagyása után is legalább két pont maradjon.

Példa. A fák nem kétszeresen élösszefüggőek, ha van élük. A körök kétszeresen élösszefüggőek, és így kétszeresen összefüggőek is, de nem háromszorosan összefüggőek. A $k + 1$ ponttú gráfok közül csak a teljes gráf k -összefüggő.

Megjegyzés. A következő diagram a különböző összefüggőségi fogalmak viszonyait foglalja össze. Azon gráfosztályok között, amelyek tartalmazása nem vezethető le a diagramból nincs is tartalmazás.



A vízszintes sorokban levő kapcsolatok a definíciók alapján nyilvánvalóak. A függőleges nyilakkal jelölt kapcsolatok egy kicsit nehezebbek, az alábbi lemmából következnek.

1. Lemma. *Legyen e egy G gráf tetszőleges éle és v egy tetszőleges pontja. Legyen $k \geq 2$.*

- (a) *Ha G k -szorosán élösszefüggő, akkor $G - e$ $(k - 1)$ -szeresen élösszefüggő.*
- (b) *Ha G k -szorosán összefüggő, akkor $G - v$ $(k - 1)$ -szeresen összefüggő.*

(c) Ha G k -szorosan élösszefüggő, akkor $G - v$ -nek tetszőleges számú komponense lehet.

(d) Ha G k -szorosan összefüggő, akkor $G - e$ $(k - 1)$ -szeresen összefüggő.

Célunk, hogy belássuk a többszörösen összefüggő gráfok következő jellemzését.

2. Tétel. (i) Egy G gráf akkor és csak akkor k -szorosan élösszefüggő, ha tetszőleges két pontja között létezik k darab páronként éldiszjunkt út.

(ii) Egy G gráf akkor és csak akkor k -szorosan összefüggő, ha tetszőleges két pontja között létezik k darab út, amelyek belső pontjainak halmaza páronként diszjunktak (Útjaink pontfüggetlenek), továbbá $|V(G)| > k$.

A két állítás egy-egy iránya egyszerű: a megfelelő utak létezése garantálja a megfelelő összefüggőséget. Valóban: Tegyük fel, hogy a gráfunk megfelelő ritkítása után nem összefüggő gráfot kapunk, azaz két maradék pont között — x és y — nem lesz út. A feltételt x és y -ra alkalmazva a garantált útrendszert mindegyikét megszüntette a ritkítás. Az utak függetlensége miatt ez nem lehet.

A nehéz irányok bizonyításához azonban előbb a folyamatok elméletének alapjaival kell megismerkednünk.

2. Folyamok

Legyen \vec{G} irányított gráf, $s, t \in V(G)$ két kijelölt csúcs és $c : E(G) \rightarrow \mathbb{R}^+$ függvény. Ekkor (\vec{G}, s, t, c) négyesét *hálózatnak* nevezzük, ahol s pontot *forrásnak*, t pontot *nyelőnek*, c -t pedig *kapacitásfüggvénynek* nevezzük.

Megjegyzés. Hálózatok sok gyakorlati probléma absztrakciójához hasznosak. Például egy város vízvezeték-hálózata írható így le, ahol a kapacitásfüggvény a csövek terhelhetőségét (például átmérő) adja meg. Egy úthálózat is modellezhető így. Egy él kapacitása a megfelelő útszakasz szélességével arányos.

Egy $f : E(S) \rightarrow R$ függvényt *folyamnak* hívunk, ha minden $x \notin \{s, t\}$ pont esetén teljesül.

$$\sum_{e \in E_{be}(x)} f(e) = \sum_{e \in E_{ki}(x)} f(e),$$

ahol $E_{be}(x)$ az x -be befutó élek halmaza, $E_{ki}(x)$ az x pontból kifutó élek halmaza. Ezeket az egyenlőségeket *megmaradási törvényeknek* nevezzük.

A forrásban és nyelőben nem követeljük meg megmaradási törvényt. A forrásra úgy kell gondolnunk, mint egy helyre, ahol anyagmennyiséget pumpálunk a hálózatban. A nyelőben pedig épp fordítva: ott anyagot nyerünk ki a hálózatból.

Ha tetszőleges e él esetén $0 \leq f(e) \leq c(e)$ akkor a folyamot *megyengedett folyamnak* nevezzük.

Definíció. Egy folyam értéke $\epsilon(f) = \sum_{e \in E_{be}(t)} f(e) - \sum_{e \in E_{ki}(t)} f(e)$ (t a nyelő).

Emlékeztető: \vec{G} legyen irányított gráf. $\mathcal{V}(G) = \{S, T\}$ *vágás* G -ben a ponthalmaz egy kétosztájú partíciója. S és T a vágás két *oldala* vagy *partja*. A vágás élhalmaza,

$E(\mathcal{V})$, azon élek, amelyek két végpontja a vágás különböző oldalára esik. $E(\mathcal{V})$ elemei két osztályba sorolhatók az oldalak közötti irányuk szerint.

$\mathcal{V} = (S, T)$ vágás egy st -vágás, ha $s \in S, t \in T$. Ekkor a két oldal közötti irányok könnyen azonosíthatók, az élek két osztálya leírható: forrás felől nyelő felé, illetve a nyelő felől a forrás felé vezető élek. Ezeket jelöljük $\vec{E}(\mathcal{V})$, illetve $\overleftarrow{E}(\mathcal{V})$ -vel. Formálisan

$$\vec{E}(\mathcal{V}) = \{e = \vec{xy} \in E(\vec{G}) : x \in S, s \in T\}$$

és

$$\overleftarrow{E}(\mathcal{V}) = \{e = \overleftarrow{xy} \in E(\vec{G}) : x \in T, s \in S\}$$

3. Lemma. *Legyen f folyam egy (\vec{G}, s, t, c) hálózatban, $\mathcal{V} = \{S, T\}$ egy vágás. Ekkor*

$$\acute{e}(f) = \sum_{\vec{E}(\mathcal{V})} f(e) - \sum_{\overleftarrow{E}(\mathcal{V})} f(e).$$

Megjegyzés. Az $S = V(\vec{G}) - \{t\}, t = \{t\}$ esetben a tétel állítása az eredeti definícióval ekvivalens. Ha $S = \{s\}, T = V(\vec{G}) \setminus \{s\}$, akkor egy alternatív definíciót kapunk, amely a forrás környezetéből olvassa ki a folyam értékét. A lemma állítása, hogy a folyam értéke tetszőleges vágás mentén leolvasható.

Bizonyítás. (i) definíció szerint

$$\acute{e}(f) = \sum_{e \in E_{be}(t)} f(e) - \sum_{e \in E_{ki}(t)} f(e).$$

Továbbá $T - \{t\}$ összes x pontjára

$$0 = \sum_{e \in E_{be}(x)} f(e) - \sum_{e \in E_{ki}(x)} f(e).$$

Ezeket összeadva kapjuk

$$\acute{e}(f) = \underbrace{\sum_{\substack{e = \vec{xy} \in E(\vec{G}): \\ x \in T, y \in S}} f(e)}_{(a)} - \underbrace{\sum_{\substack{e = \overleftarrow{yx} \in E(\vec{G}): \\ y \in S, x \in T}} f(e)}_{(b)} + \underbrace{\sum_{\substack{e = \vec{xy} \in E(\vec{G}): \\ x, y \in T}} (f(e) - f(e))}_{(c)},$$

ahol az (a)-(b) tagok vagy egy $x \in T - \{t\}$ -re felírt megmaradási törvényből vagy a folyam értékét definiáló egyenlőségből erednek, míg a (c)-beli tagok vagy két megmaradási törvényből vagy a folyam értéket definiáló egyenlőségből és egy megmaradási törvényből erednek. A (c)-beli tagok hozzájárulása a jobb oldalhoz 0, így kapjuk a bizonyítandó egyenlőséget. ■

A folyamérték új kifejezései mind lehetőséget adnak egy-egy rájuk vonatkozó felső becslésre.

4. Lemma. *Legyen f egy megengedett folyam egy (\vec{G}, s, t, c) hálózatban, \mathcal{V} egy vágás. Ekkor*

$$\acute{e}(f) \leq \sum_{e \in \vec{E}(\mathcal{V})} c(e) := c(\mathcal{V}).$$

Bizonyítás. Írjuk fel $\acute{e}(f)$ értékét az előző lemma alapján a \mathcal{V} vágásra alapulva. Az így kapott kifejezés -1 együtthatós tagjait elhagyva és a maradék tagokat a megfelelő élek kapacitásaival becsülve adatik az állítás. (Az elhagyott tagok nem pozitívak, a megmaradt tagok nem haladhatják meg a megfelelő él kapacitását, hiszen folyamunk megengedett.) ■

A lemma kimondásában bevezetett, $c(\mathcal{V})$ -vel jelölt kifejezést a \mathcal{V} vágás kapacitásának nevezzük. Ez az irányított vágásban a forrás felől a nyelő oldala felé haladó élek kapacitásainak összege. Ez a paraméter csak a hálózattól függ.

A lemma állítása szerint tetszőleges vágás kapacitása felső becslést ad a hálózatban megvalósítható folyamok értékére.

Legyen $\mathcal{H} = (\vec{G}, s, t, c)$ egy hálózat, f folyam, P pedig egy st -út G (irányítatlan!) gráfban. Soroljuk P út éleit (pontosabban P éleinek G -beli megfelelőit) két osztályba, aszerint, hogy s -től t felé vagy fordítva vannak irányítva. A két élosztályt jelölése rendre legyen $E_{\text{előre}}$ és $E_{\text{hátra}}$.

Definíció. \vec{G} -ben P egy javító út (\mathcal{H} -ban, f -re nézve), ha

- (i) minden $e \in E_{\text{előre}}(P)$ esetén $f(e) < c(e)$,
- (ii) minden $e \in E_{\text{hátra}}(P)$ esetén $f(e) > 0$.

Lemma. Legyen f folyam és P javító út f -re. Ekkor létezik \tilde{f} folyam, amelyre $\acute{e}(\tilde{f}) > \acute{e}(f)$, azaz f javítható (vagyis található f -nél nagyobb értékű folyam).

Bizonyítás. Legyen $\delta_{\text{előre}} := \min\{c(e) - f(e) : e \in E_{\text{előre}}(P)\}$, $\delta_{\text{hátra}} = \min\{f(e) : e \in E_{\text{hátra}}(P)\}$ és legyen $\delta = \min\{\delta_{\text{előre}}, \delta_{\text{hátra}}\} > 0$.

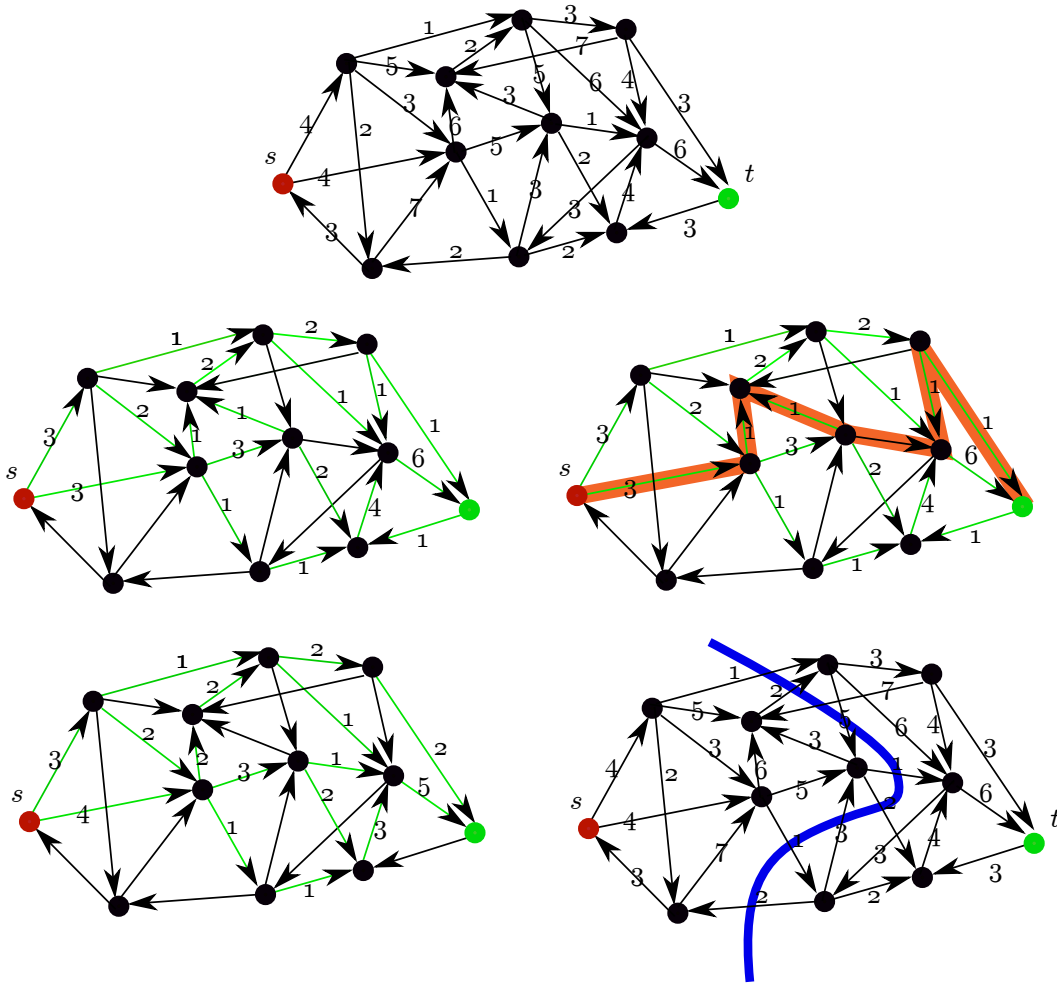
Ekkor $\delta_{\text{előre}}$ -vel bármely előre mutató élen folyó anyagmennyiség növelhető (uniform növelésre van szükségünk $E_{\text{előre}}(P)$ elemein a megmaradási törvényekre gondolva). $\delta_{\text{hátra}}$ -val tudunk csökkenteni a hátraéleken (ismét uniform csökkentésre van szükségünk). Definiáljuk a következőképpen \tilde{f} -et:

$$\tilde{f} = \begin{cases} f(e), & \text{ha } e \notin E(P) \\ f(e) + \delta, & \text{ha } e \in E_{\text{előre}}(P) \\ f(e) - \delta, & \text{ha } e \in E_{\text{hátra}}(P) \end{cases}$$

Ekkor \tilde{f} maga is egy folyam (ugyanis egyik élen sem megyünk $c(e)$ fölé, illetve 0 alá és a megmaradási törvényeket se rontottuk el), továbbá $\acute{e}(\tilde{f}) = \acute{e}(f) + \delta > \acute{e}(f)$. ■

Folyamprobléma: Adott egy \mathcal{H} hálózat, keressünk minél nagyobb/maximális értékű folyamatot.

A megengedett folyamok értékei egy felőlről korlátos halmazát adják a valós számoknak. Ezen halmaz szuprémuma minden további nélkül vehető. A maximum értékének vétele azonban magyarázatra szorul. Egy folyam tekinthető $\mathbb{R}^{E(G)} \equiv \mathbb{R}^m$ egy pontjának ($m = |E(G)|$), a megengedett folyamok \mathcal{F} halmaza $\mathbb{R}^{|E(G)|}$ egy kompakt részhalmaza, továbbá $\acute{e} : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ egy folytonos függvény. Ez a folytonos függvény felveszi maximumát $\mathbb{R}^{|E(G)|}$ egy kompakt részhalmazán.



Egy hálózat
 egy folyam, egy rá vonatkozó javító út
 a javított út, ennek optimalitását mutató vágás

Ezek után kimondjuk a *folyamok főtétele*.

5. Tétel (Folyamok főtétele). Legyen $\mathcal{H} = (\vec{G}, s, t, c)$ egy hálózat és f egy folyam. A következők ekvivalensek:

- (i) f optimális folyam (maximális értékű),
- (ii) nem létezik javító út f -re vonatkozóan,
- (iii) létezik egy \mathcal{V} vágás, amelyre teljesül $c(\mathcal{V}) = \epsilon(f)$.

Bizonyítás. Az, hogy (i)-ből következik (ii) adódik az előzőleg bizonyított lemmából. A harmadik állításból következik az első, ugyanis bármely f folyamra és \mathcal{V} vágásra $\epsilon(f) \leq c(\mathcal{V})$, vagyis a $c(\mathcal{V})$ értékű folyamok optimálisak.

(ii) \Rightarrow (iii) bizonyítása. Egy s -ből induló utat nevezzünk javító út-kezdeménynek, ha a javító út definíciójának összes feltételét kielégíti, kivéve azt, hogy t -ben ér véget. (Azaz elképzelhető, hogy folytatható úgy, hogy javító úthoz jussunk.) A csak az s pontból álló út javító út-kezdemény. Legyen S_{biz} azon x pontok halmaza, amelyre létezik sx javító út-kezdemény, azaz

$S_{biz} = \{x \in v : \exists s\vec{x} \text{ út } \vec{G}\text{-ben, amelyre teljesül, hogy } e \in E_{\text{előre}}(P) \text{ esetén } f(e) < c(e),$
 $\text{és } e \in E_{\text{hátra}}(P) \text{ esetén } f(e) > 0\}$

Ekkor $s \in S_{biz}$, és t nem eleme S_{biz} halmaznak ($t \in \bar{S}_{biz} =: T_{biz}$). Legyen $\mathcal{V}_{biz} = \{S_{biz}, T_{biz}\}$ egy st -vágás. Ekkor minden $e \in \vec{E}(\mathcal{V}_{biz})$ élre teljesül, hogy $f(e) = c(e)$, és minden $\overleftarrow{E}(\mathcal{V}_{biz})$ -ben lévő e élre igaz, hogy $f(e) = 0$, hiszen más esetben az e él S -beli végpontjához vezető javítóút-kezdemény meghosszabbítható lenne T -be. Így a korábban igazolt $\epsilon(f) \leq C(\mathcal{V}_{biz})$ becslés bizonyításában az összes egyenlőtlenség egyenlőség lesz, (iii) teljesül a $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{biz}$ választással. ■