Diszkrét Matematika MSc hallgatók számára

1. Előadás

Előadó: Hajnal Péter
Jegyzetelő: Szakács Nóra 2010. szeptember 6.

Az előadás a BSc Kombinatorika kurzus folytatása. Sokszor vissza kell utalnunk, fel kell idéznünmk ott elhangzott fogalmakat, összefüggéseket. Az ilyen „emlékeztetők” rendszeresen megszakítják az előadást.

Emlékeztető. Idézzünk fel néhány fontos gráfelméleti fogalmat. *Gráfnak* nevezzük azokat a (V, E, I) hármasokat, ahol V és E tetszőleges diszjunkt halmazok, $I \subseteq V \times E$ illeszkedési reláció. A V halmazt a gráf *csúcshalmazának*, E-t *élhalmaznak* nevezzük. Azt mondjuk, hogy a v csúcs illeszkedik az e élre, ha $(v, e) \in I$. Az illeszekdési reláció olyan, hogy minden élre egy vagy két csúcs illeszkedik.

Az egy csúcsra illeszedő éleket *hurokéleknek* nevezzük. Ha e_1 és e_2 olyanok, hogy ugyanazon csúcs(ok)ra illeszkednek, őket *párhuzomos éleknek* nevezzük. Az olyan gráfokat, amelyek nem tartalmaznak hurokélt és párhuzamos éleket, *egyszerű gráfoknak* hívjuk.

Egy csúcs *fokán* a csúcsra illeszkedő élek számát értjük, úgy számolva, hogy minden hurokél kétszer illeszkedik egyetlen pontra.

1. Fokszámsorozatok

Definíció. A $d_1, \ldots, d_n$ számsorozatot a G gráf fokszámsorozatának nevezzük, ha G fokainak nemcsökkenő sorozata. Speciálisan $n = |V|$, $d_1 \leq \ldots \leq d_n$ teljesül.

Megjegyzezzük, hogy a fokszámsorozatból a gráf élszáma is kiolvasható az $|E| = \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{2}$ összefüggés alapján.

A témakör alapkérdése a következő: adott $\{d_i\}_{i=1}^n$ számsorozat mikor lesz valamely G gráf fokszámsorozata? (Ekkor azt mondjuk, hogy a sorozatot realizálja a G gráf.) Amennyiben G-re semmilyen kikötést nem teszünk, a válasz egyszerű.

1. Állítás. *A $\{d_i\}_{i=1}^n$ számsorozat pontosan akkor realizálható, ha $\sum_{i=1}^n d_i$ páros.*

Bizonyítás. Az állítás egyik iránya nyilvánvaló: ha a $\{d_i\}_{i=1}^n$ sorozatot realizálja a G gráf, akkor $\sum_{i=1}^n d_i = 2|E|$ teljesül az éleire.

A másik irány bizonyítása $\sum_{i=1}^n d_i$ szerinti teljes indukcióval történik. Ha $\sum_{i=1}^n d_i = 0$, akkor $d_i \equiv 0$, így a sorozatot realizálja az n pontból álló, él nélküli gráf. Tegyük fel, hogy $\sum_{i=1}^n d_i \leq m - 1$-re teljesül az állítás, és tekintsük a $\sum_{i=1}^n d_i = m$ esetet. Vegyük észre, hogy mivel m páros, így legalább kettő. Amennyiben valamely i-re $d_i \geq 2$, úgy realizáljuk a $d_1, d_2, \ldots d_{n-1}, d_n - 2$ számsorozat rendezésével kapott fokszámsorozathoz tartozó gráfot, majd a d_n-hez tartozó csúcsra illesszünk egy hurokélt. Ha bármely i-re $d_i \leq 1$, akkor $d_n = d_{n-1} = 1$ kell teljesüljön az előbbi észrevételünk miatt. Ekkor realizáljuk a $d_n - 1, d_{n-1} - 1, d_0, \ldots, d_{n-2}$ fokszámsorozathoz tartozó gráfot, majd illesszünk egy élt a d_{n-1}, d_n-hez tartozó csúcsokra. Mindkét esetben a kapott gráf realizálja az eredeti sorozatot. ∎

Látható, hogy a bizonyításban adott konstrukció által olyan gráfokat kapunk, amelyek — nagy fokszámok esetén — szinte csak hurokélt tartalmaznak. Természetesen adódik a kérdés, hogy mi a helyzet, ha hurokéleket nem engedünk meg.

2. Tétel. *A $\{d_i\}_{i=1}^n$ számsorozat pontosan akkor realizálható hurokél nélküli gráffal, ha*

1. $\sum_{i=1}^n d_i$ *páros, és*

2. $d_n \leq d_1 + \cdots + d_{n-1}$.

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy $\{d_i\}_{i=1}^n$ realizálható hurokél nélkül. Ekkor az *1.* feltételről láttuk, hogy teljesül. A *2.* feltételhez tekintsük a realizáló gráf d_n-hez tartozó csúcsát, ez d_n élre illeszkedik. Másrészt az összes többi csúcs összesen $d_1+\cdots+d_{n-1}$ élre illeszkedik. A hurokélek kizárása miatt az előbbi csúcson átmenő élek mind illeszkednek egy másik csúcsra is, tehát legfeljebb $d_1 + \cdots + d_{n-1}$ van belőlük. Ebből a *2.* feltétel adódik.

A másik irányt ismét $\sum_{i=1}^n d_i$ szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. Először tekintsük az elfajuló esteket: ha $d_n \leq 1$, akkor könnyen látható, hogy az előző bizonyításban leírt algoritmus is hurokélmentes gráfot ad. Ha $n = 2$, akkor a *2.* feltételből $d_1 = d_2$ adódik, így a két csúcs között d_1 darab párhuzamos élt tartalmazó gráf realizálja a sorozatot. A továbbiakban így feltesszük, hogy $n \geq 3$ és $d_n \geq 2$.

A $\sum_{i=1}^n d_i = 0$ esetet ismét realizálja az n pontú, üres élhalmazú gráf. Tegyük fel, hogy $\sum_{i=1}^n d_i \leq m - 1$-re teljesül az állítás, és tekintsük $\sum_{i=1}^n d_i = m$-et. Az indukciós lépést két esetre bontjuk:

(a) $d_{n-2} \lneq d_n$

(b) $d_{n-2} = d_{n-1} = d_n$

Mindkét esetben a $d_1, \ldots d_{n-2}, d_{n-1} - 1, d_n - 1$ számsorozatból képzett nemcsökkenő sorozatot fogjuk realizálni. Azt állítjuk, hogy ez teljesíti a *2.* feltételt, így alkalmazható rá az indukciós feltevés. Valóban, az (a) esetben d_n még mindig maximális elem a sorozatban, és $d_n - 1 \leq d_1 + \cdots + d_{n-1} - 1$ fennáll. A (b) esetben a legnagyobb elem d_{n-2}, így $d_{n-2} \leq d_1 + \cdots + d_{n-3} + d_{n-1} + d_n - 2$ a bizonyítandó egyenlőség, de mivel $d_n \geq 2$, így már az erősebb $d_{n-2} \leq d_{n-1} + d_n - 2$ egyenlőtlenség is teljesül. A fenti sorozatot realizáló gráfhoz egy élt illesztve a d_{n-1}, d_n-hez tartozó csúcsokra megkapjuk az eredeti számsorozatot realizáló gráfot. ■

Megjegyezzük, hogy mindkét indukciós bizonyításból könnyen kiolvasható egy rekurzív algoritmus, amely az adott feltételeknek elegettevő sorozathoz egy megfelelő realizáló gráfot konstruál.

A következőkben azt vizsgáljuk, mikor realizálható egy számsorozat speciális gráfokkal.

3. Lemma. *Ha a $\{d_i\}_{i=1}^n$ számsorozat realizálható egyszerű gráffal, akkor van olyan realizáló egyszerű gráf, amely csúcsai $v_1, \ldots, v_n$, ahol $d_i = d(v_i)$, és a v_n csúcs szomszédai pontosan a $v_{n-1}, v_{n-2}, \ldots, v_{n-d_n}$ csúcsok.*

Bizonyítás. Legyen G olyan realizáló gráf, amelyre $d(v_i) = d_i$ és v_n szomszédainak indexösszege maximális. Azt állítjuk, hogy ez a gráf olyan, amilyet a lemma állít.

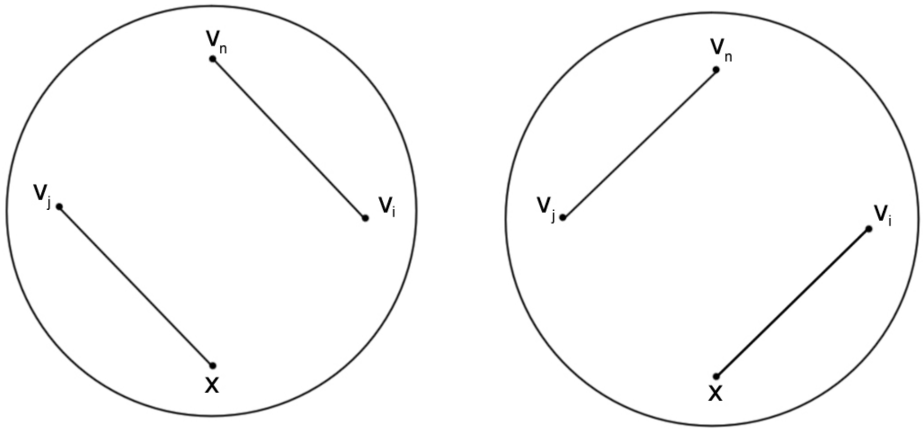
Indirekt úton tegyük fel, hogy nem, azaz létezik $i < j$ úgy, hogy v_n szomszédos v_i-vel, de nem szomszédos v_j-vel. Két esetet különböztetünk meg:

(a) $d_i = d_j$, vagy

(b) $d_i < d_j$ teljesül.

Az (a) esetben tekintsük azt a gráfot, amelyet úgy kapunk G-ből, hogy a v_i és v_j csúcsok szerepét megcseréljük. Ez a gráf ugyanazt a fokszámsorozatot realizálja, de v_n szomszédainak indexösszege $j-i$-vel nagyobb, így G-ben nem lehetett maximális.

A (b) esetben vegyük észre, hogy a feltételek miatt kell léteznie olyan x csúcsnak, amely v_j-vel szomszédos, de v_i-vel nem. Képezzük G-ből a $\tilde{G}$ gráfot úgy, hogy a (v_i, v_n) és (v_j, x) éleket elhagyjuk G-ből, majd hozzávesszük a (v_i, x) és (v_j, v_n) éleket.



Így a gráf egyszerű maradt és fokszámsorozata sem változott, viszont $\tilde{G}$-ben megint csak $j-i$-vel nagyobb v_n szomszédainak indexösszege, így G-ben nem lehetett maximális. ■

4. Következmény (V. Havel és S. Hakimi tétele). *$\{d_i\}_{i=1}^n$ akkor és csak akkor realizálható egyszerű gráffal, ha*

$$d_1, \ldots, d_{n-d_n-1}, d_{n-d_n} - 1, d_{n-d_{n+1}} - 1, \ldots, d_{n-1} - 1$$

is.

A következmény egyszerűen adódik az előbbi lemmából, hiszen ha vesszük azt a $\{d_i\}_{i=1}^n$-t realizáló gráfot, amelyben v_n a d_n legnagyobb indexű csúccsal szomszédos, akkor a v_n csúcsot elhagyva a gráfhoz épp a fenti fokszámsorozat fog tartozni. Az állítás megfordítása a lemma nélkül is egyszerű.

Vegyük észre, hogy így a következmény által rekurzív algoritmust (Havel—Hakimi-algoritmus) kaptunk a realizálásra.

Emlékeztető. Fa, ághajtás operáció.

5. Tétel. *Tegyük fel, hogy $n \geq 2$. Ekkor a $\{d_i\}_{i=1}^n$ sorozat pontosan akkor realizálható fával, ha $\sum_{i=1}^n d_i = 2n-2$ és $d_1 > 0$ teljesül.*

Bizonyítás. A feltételek szükségessége könnyen adódik, hiszen bármely fa összefüggő, így $d_1 > 0$, másrészt egy n-pontú fának $n-1$ éle van, így $\frac{\sum_{i=1}^n d_i}{2} = |E| = n-1$ is fennáll.

Az elégségesség bizonyítása n szerinti teljes indukcióval történik. Ha $n = 2$, akkor a feltételek miatt $d_1 = d_2 = 1$, és ezt realizálja a kétpontú, egy élt tartalmazó gráf. Tegyük fel, hogy $n-1$ csúcsra igaz az állítás, és $n \geq 3$. Ekkor egyszerű számolással $1 < \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{n} < 2$ adódik, és persze $d_1 \leq \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{n}$ és $d_n \geq \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{n}$ teljesül. Ebből $d_1 = 1$, és $d_n \geq 2$ adódnak, hiszen a fokszámok egészek. Így a $d_2, d_3, \ldots, d_n - 1$ sorozat rendezésével kapott számsorozat is teljesíti a tételbeli feltételeket, tehát az indukciós feltevés szerint fával realizálható. Ebből a fából megkapható az eredeti fokszámsorozathoz tartozó fagráf egy, a d_n-hez tartozó csúcsból történő ághajtással. ■

2. Fák összeszámlálása

Irányított gráf alatt olyan (V, E, K, B) rendszereket értünk, ahol V és E diszjunkt halmazok, $K, B \subset E \times V$ illeszkedési relációk, ahol minden e élre egyetlen v csúcs K-illeszkedik (az e él kezdőpontja), és egyetlen u csúcs B-illeszkedik (ez e él végpontja). A (V, E, K, B) irányított gráfból az *irányítás elhagyásával* a $(V, E, K \cup B)$ gráfot kapjuk. Egy irányítatlan gráfnak *irányítása* egy irányított gráf, ha abból az irányítás elhagyásával az eredeti gráfot kapjuk vissza. (Ez nem egyértelmű. Egy G gráfnak $2^{|E'|}$ darab irányítása van, ahol E' a nem hurokélek halmaza.)

Definíció. Legyen G hurokélmentes, irányítatlan gráf. A G gráf pont-él illeszkedési mátrixán a következő, $|V| \times |E|$-s mátrixot értjük: $A_G = (a_{ij})$, ahol

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } v_i \text{ illeszkedik az } e_j \text{ élre,} \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Hasonlóan, ha $\vec{G}$ irányított, akkor $A_{\vec{G}} = (a_{ij})$, ahol

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } e_j \text{ befut a } v_i \text{ csúcsba,} \\ -1, & \text{ha } e_j \text{ kifut a } v_i \text{ csúcsból,} \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Vegyük észre, hogy bármely oszlopban pontosan két darab nemnulla elem van, és irányított gráf esetében ezek egyike 1, a másik -1. Ebből adódik, hogy $A_{\vec{G}}$ sorainak összege $\vec{0}$.

Definíció. Adott egy G (irányított vagy irányítatlan) gráf, rögzítsük valamely $r \in V(G)$ csúcsát. Ekkor a (G, r) párt *gyökeres gráfnak* nevezzük. Ekkor A_G^* jelöli azt a mátrixot, amelyet A_G-ből kapunk r sorának elhagyásával.

6. Tétel. *Legyen G gráf, $\vec{G}$ egy tetszőleges irányítása, és r egy tetszőleges gyökér. Legyen $F \subseteq E(G)$ olyan, hogy $|F| \leq |V| - 1$. Jelölje $A_{\vec{G}}^*[F]$ azt a mátrixot, amelyet $A_{\vec{G}}^*$-ből kapunk úgy, hogy csak az F-beli élekhez tartozó oszlopait tekintjük. Ekkor*

(1) ha F a G gráf egy feszítőfájának élhalmaza, akkor det $A_{\vec{G}}^*[F] \in \{\pm 1\}$

(2) ha F tartalmaz kört, akkor det $A_{\vec{G}}^*[F] = 0$.

Bizonyítás. (1): Mivel F fa élhalmaza, a hozzá tartozó gráf r-ből felépíthető ághajtásokkal. Jelölje v_i és f_i az i. ághajtás során keletkező csúcsot és élt. Vegyük észre, hogy ekkor egyrészt f_i mindig illeszkedik v_i-re, másrészt f_i egyetlen, nála nagyobb indexű csúcsra sem illeszkedik. Ez azt jelenti, hogy abban az illeszkedési mátrixban, ahol a(z r-től különböző) csúcsok és az F-beli élek is index szerint vannak felsorolva, a főátlóban mindig ± 1, a főátló alatt pedig 0 áll. Így a mátrix felső trianguláris, és a determinánsa ± 1. Vegyük észre, hogy $A^*_{\vec{G}}[F]$ megkapható belőle sor-oszlop cserékkel, így a determinánsuk legfeljebb előjelben különbözik. Ezzel az első állítást beláttuk. ■