Gráfelmélet/Diszkrét Matematika MSc hallgatók számára

11. Előadás

Előadó: Hajnal Péter
Jegyzetelő: Ozsvárt László 2009. november 23.

1. Derékbőség és a kromatikus szám

Definíció.G derékbősége(girth): $g(G) = min\{l(C)|C$ kör G-ben$\}$
Megjegyzés:
$g(G) > 2 \cdot k + 1 \Leftrightarrow \forall x \in V : G|_{\{d(x,v) \leq k\}}$ fa.
G akkor és csak akkor egyszerű, ha $g(G) \geq 3$.
$g(G) = 3 \Leftrightarrow$ létezik háromszög G-ben.
$g(G) > 3 \Leftrightarrow G$ háromszögmentes egyszerű gráf.

Tétel (Erdős Pál):
$\forall k, \gamma : \exists G (= G_{k,\gamma}) : \chi(G) \geq k, g(G) \geq \gamma$

Bizonyítás:
Valószínűségszámítási módszerrel bizonyítunk.
V legyen egy n elemű csúcshalmaz (n legyen elég nagy).
P egy valószínűség, amelynek értékét később határozzuk meg.
$\underline{G} = \binom{V}{2}$ pontra függetlenül feldobunk egy érmét, ami P valószínűséggel ad fejet. Azokra a pontpárokra teszünk élt, ahol fejet dobtunk. Ez az Erdős-Rényi-féle véletlen gráf modell.
$\mathbb{P}(A \subset V$ független csúcshalmaz$) = (1-p)^{\binom{|A|}{2}}$
$\mathbb{P}(\exists$t elemű független csh.$) \leq \binom{n}{t} \cdot (1-p)^{\binom{t}{2}} \leq n^t \cdot (1-p)^{\binom{t}{2}}$
$\mathbb{P}(\alpha(G) \leq t) = \mathbb{P}(\nexists t+1$ elemű független csh.$) = 1 - \mathbb{P}(\exists t+1$ elemű független csh.$) \geq$
$\geq 1 - n^{t+1} \cdot (1-p)^{\binom{t+1}{2}} = 1 - (n \cdot (\sqrt{1-p})^t)^{t+1} \geq = 1 - (n \cdot (1-p)^{t/2})^{t+1}$
Ha $\frac{t}{2} = \frac{1}{p}$, akkor $(1-p)^{1/t} = (1-p)^{1/p} \approx \frac{1}{e}$ (ha p kicsi).
Ha $\frac{t}{2} = \frac{10}{p} \cdot log(n)$, akkor $\mathbb{P}(\alpha(G) \leq t) \geq \frac{1}{2}$

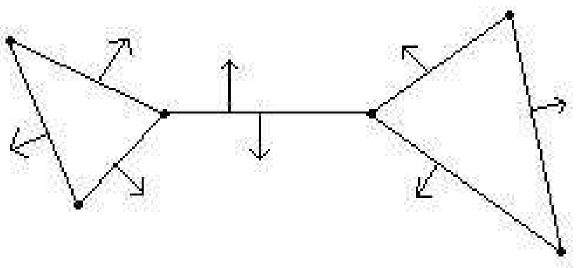
Az (1):="$\alpha(G) \leq t$" esemény azért fontos számunkra, mert $\alpha(G) \leq t \Rightarrow \chi(G) \geq \frac{n}{t}$.
Sőt, $\alpha(G) \leq t \Rightarrow \forall U \subset V : \chi(G|U) \geq \frac{|U|}{t}$.
Legyen most C egy tetszőleges l hosszú kör V-ben.
$\mathbb{P}(C$ kör G-ben$) = p^l$
$\mathbb{E}(\gamma$-nál rövidebb körök száma$) = \sum_{l=3}^{\gamma-1} \binom{n}{l} \cdot \frac{(l-1)!}{2} \cdot p^l \leq \sum_{l=3}^{\gamma-1} \frac{n^l}{2l} \cdot p^l = \sum_{l=3}^{\gamma-1} \frac{1}{2l} \cdot (pn)^l \leq$
$\leq \frac{1}{6} \cdot \sum_{l=3}^{\gamma-1} (pn)^l \leq \frac{\gamma}{6} \cdot \sum_{l=3}^{\gamma-1} (pn)^\gamma$, amennyiben $pn \geq 1$
P-t válasszuk úgy, hogy a mostani felső becslésünk $\frac{n}{4}$-nél kisebb legyen. Például legyen $P = \frac{1}{n} \cdot (\frac{n}{2})^{1/\gamma}$.
Ha a γ-nál rövidebb körök száma$\geq \frac{n}{2}$, akkor valószínűségi változónk értéke több, mint várható értékének a duplája. A Markov-egyenlőtlenség alapján:
$\mathbb{P}(\gamma$-nál rövidebb körök száma$) \geq \frac{1}{2} =$:(2)

$\mathbb{P}((1)$ és $(2)) > 0 \Rightarrow \exists G$, amely az (1) és (2) tulajdonságokkal rendelkezik
Hajtsuk végre az alábbi $G \Rightarrow G_0$ transzformációt: G-ből elhagyunk $n/2$ csúcsot úgy, hogy minden γ-nál rövidebb körről elhagyunk csúcsot.
Ekkor: $|V(G_0)| \geq \frac{n}{2}$, valamint $g(G_0) \geq \gamma$
$(1) \Rightarrow \alpha(G_0) \leq t, \chi(G_0) \geq \frac{n}{2t} \to \infty$

Síkgráfok

Amennyiben G egy szépen lerajzolt gráf, akkor az élgörbéi a síkot tartományokra bontják.

Definíció.τ legyen egy ilyen tartomány, $\sigma\tau = \tau$ határa (az őt határoló élek). A határban bizonyos élek duplán is szerepelhetnek, mégpedig pontosan akkor, ha mindkét oldalán a τ tartomány szerepel.



1. ábra.

Észrevétel: G összefüggő $\Leftrightarrow \forall$ tartományra $\sigma\tau$ összefüggő, azaz végig tududnk rajta sétálni ugrás nélkül $\Leftrightarrow$ minden tartomány egyszeresen összefüggő
G 2-szeresen élösszefüggő $\Leftrightarrow$ összefüggő, és $\forall\tau$ tartományra $\sigma\tau$ vonal.
G 2-szeresen élösszefüggő $\Leftrightarrow$ összefüggő, és $\forall\tau$ tartományra $\sigma\tau$ kör.
Megjegyzés:
Amennyiben G szépen lerajzolt, akkor a $\{\sigma\tau : \tau \text{ tartomány}\}$ halmazban minden él kétszer lesz felsorolva.
Bármely tartomány egy pontra összehúzható $\Leftrightarrow$ G összefüggő.

Tétel:
G síkrarajzolt (szépen lerajzolt a síkra) $\Rightarrow t(G) - |E| + |V| = 2$, ahol $t(G)$ a tartományok száma.
Megjegyzés: G szépen lerajzolható a síkra $\Leftrightarrow$ G szépen lerajzolható a gömbre, valamint a síkon bármely tartomány egy pontra összehúzható $\Leftrightarrow$ G összefüggő.

Bizonyítás I:
Teljes indukció $|E|$-re:
Kiindulás: $G = T$ fa, ekkor: $t(G) = 1, |E| = n-1, |V| = n$, így az összefüggés szerint $2 = 2$.
Indukciós lépés: új él hozzávétele. Ekkor az élek száma és a tartományok száma is 1-el nő. Az indukciós feltevésből nyilvánvaló a állítás.

Bizonyítás II:
Amennyiben G síkrarajzolt gráf, akkor a ϕ leképezéssel rendeljük hozzá G^*-ot, a duálisát.
Legyen T feszítőfa G-ben.
Ekkor: $\varphi(E(T)) \subset E(G^*)$, $\overline{\varphi(E(T))} = E(G^*) \setminus \varphi(E(T))$.
Belátható, hogy ekkor $\overline{\varphi(E(T))}$ feszítőfa élhalmaza lesz G^*-ban.
Így $t(G)-1$ db éle lesz $\overline{\varphi(T)}$-nek. $\varphi(T)$-nek ugyanannyi éle van, mint T-nek, azaz $|V|-1$. Ha ezt a kettőt összeadjuk, akkor pont megkapjuk a gráf éleinek a számát, azaz $|E(T)|$-t, ezt átrendezve kapjuk az állítást.

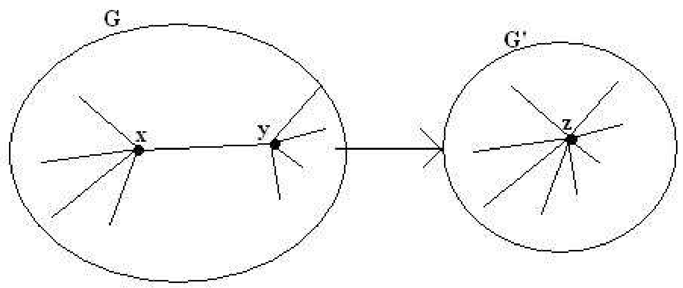
Bizonyítás III (vázlat):
Tekintsünk G egy lerajzolásását S^2-re (S^2 a gömbfelület), amelyre az alábbi tulajdonságok teljesülnek:
-Az északi és a déli pólus egy-egy csúcsnak a képe.
-A gráf bármely éle É-D irnyban szigorúan monoton.
Ezek után írjunk minden csúcs képére (É és D kivételével) egy-egy -1-est, és minden élgörbe közepére 1-est! Ekkor a leírt számok összege $|E|-(|V|-2)$ lesz.
A gömböt el tudjuk forgatni úgy (nagyon kicsit forgatunk rajta), hogy mindegyik szám egy-egy tartomány felett lesz. Belátható, hogy minden tartomány felett a számok összege 1 lesz. Így az alábbi jön ki: $|E|-(|V|-2) = t(G)$

Következmény: Euler-tétel:
(i) Legyen G egy egyszerű síkgráf, $|V| \geq 3$, ekkor: $|E| \leq 3 \cdot |V| - 6$
(ii) Legyen G egy egyszerű páros síkgráf, $|V| \geq 3$ ekkor: $|E| \leq 2 \cdot |V| - 4$

Bizonyítás: Feltehető, hogy G összefüggő.
(i)$\Rightarrow \forall \tau : |\sigma\tau| \geq 3$, míg (ii)$\Rightarrow \forall \tau : |\sigma\tau| \geq 4$. $\sum l(\sigma\tau) = 2 \cdot |E|$.

A további részben csak a (ii)-re vonatkozó számításokat ismertetjük:
$4 \cdot t(G) \leq 2 \cdot |E|$,
$4 \cdot (|E| - |V| + 2) \leq |E|$,
$|E| \leq 2 \cdot |V| - 4$.

Következmény:
K_5 és $K_{3,3}$ nem síkgráfok.
Emlékeztető:
$G \supset R$ részgráf, ha G éleinek/csúcsainak elhagyásával megkapható R.
Amennyiben G síkgráf, akkor R is az. Így ha R nem síkgráf, akkor G sem az.
Definíció.2 él <u>összeolvasztása</u>:
Legyen G egy egyszerű gráf, $x \in V(G), d(x)=2$. Legyen x két szomszédja y, y'. Ekkor az yx és xy' élek összeolvasztásával kapott G' gráf az alábbi: $V(G')=V(G) \setminus \{x\}$, $E(G')= = E(G) \setminus \{xy, xy'\} \cup \{yy'\}$.
Definíció.$T \subset_{top} G$, azaz T <u>topologikus részgráfja</u> G-nek, ha a csúcsok/élek elhagyásával, valamint élösszeolvasztásokkal megkapható G-ből.
Definíció.<u>él összehúzása</u>: az ábra szerint:
Definíció.$G \preceq M$ <u>minorja</u>, ha él/csúcselhagyásokkal és élösszehúzásokkal megkapható M G-ből.



2. ábra.

Megjegyzés:
$G \supseteq R \Rightarrow G \supseteq_{top} R \Rightarrow G \preceq M$, de egyik állítás megfordítása sem igaz.
Összefoglalás:
Amennyiben G síkgráf, akkor: $G \not\supseteq K_5, K_{3,3}$. Az állítás megfordítása nem igaz.
Amennyiben G síkgráf, akkor: $G \not\succeq K_5, K_{3,3}$. Az állítás megfordítása is igaz, ezt bizonyítja a Wagner-tétel (ezt bizonyítjuk is a következő órán).