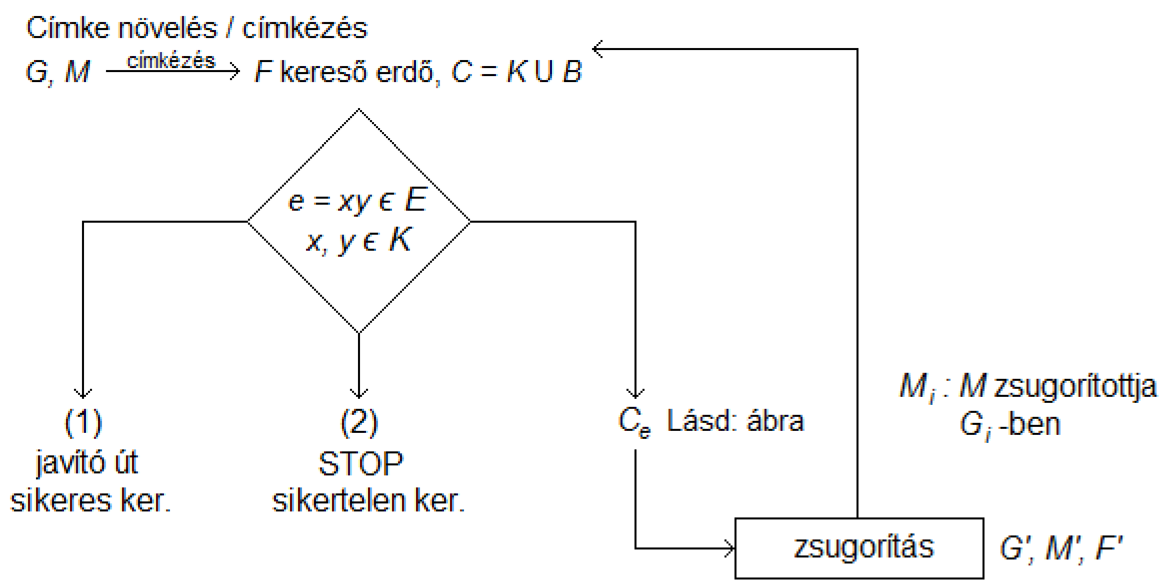
Gráfelmélet/Diszkrét matematika Msc előadásjegyzet

8. előadás

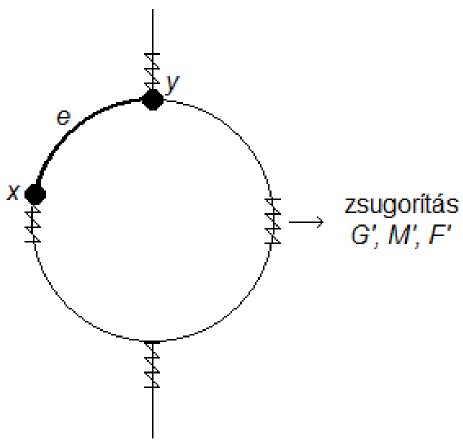
Előadó: Hajnal Péter
Készítette: Provits Milán 2009. november 2.

Edmonds algoritmus (folytatás)

Emlékeztető:



ábra:



A futás: $G = G_0 \to G_1 \to G_2 \to \ldots \to G_k$ $\begin{cases} \to (1) \\ \to (2) \end{cases}$, ahol a gráfok közötti nyilak zsugorítást jelölnek

<u>Jelölés:</u> k = zsugorítási mélység

A probléma, hogy az (1) vagy (2) típusú leállás esetén többszörösen zsugorított gráfban történhet.

1. Állítás:
Ha (1)-be fut az algoritmus, akkor létezik P javító út M-re G-ben.

Bizonyítás:
Teljesen világos, hogy létezik P_k javító út M_k-ra G_k-ban.

Állítás$_i$:
G_i, M_i → zsugorítás (lásd fentebb) → G_{i+1}, M_{i+1}
P_{i+1} javító út M_{i+1}-re G_{i+1}-ben
Ekkor létezik P_i javító út M_i-re G_i-ben.

Állítás$_i$ + indukció => 1. Állítás

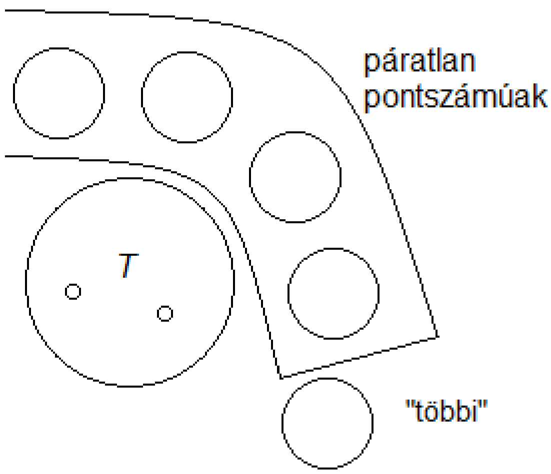
Állítás$_i$ indoklása könnyen kiolvasható abból a gondolatmenetből, ami elvezetett abba, hogy a C kört egy külső ponttá olvasszuk össze.

2. Állítás:
Ha (2)-be befut az algoritmus, akkor M maximális eleszámú (optimális) párosítás G-ben.
Megj.: M maximális elemszámú (optimális) párosítás <=> nem létezik javító út M-re

Definíció:
$\varepsilon(T)=C_1(H-T)-|T|$, ahol $T\subseteq V(H)$
$C(H)$ = H gráf komponenseinek száma
$C_1(H)$ = H gráf páratlan pontszámú komponenseinek száma

Definíció:
$\delta(M)=|V(H)|-2|M|$ = párosítatlan pontok száma, ahol $M\subseteq E(H)$ párosítás

1. Észrevétel:
$\varepsilon(T)\leqslant\delta(M)$, ahol $T\subseteq V(H)$ és $M\subseteq E(H)$ párosítás.



(H – T) -nek minden páratlan pontszámú komponensében legalább *1* csúcs van (amely vagy T -beli párral rendelkezik /max T db/, vagy párosítatlan). Ezek összesen legalább $C_1\,(H – T)$ sokan vannak.

$$\text{Tehát } \underbrace{\boxed{\text{a pár nélkül maradt csúcsok száma}}}_{\delta(M)} \text{ legalább } \underbrace{\boxed{C_1(H - T) - |T|.}}_{\varepsilon(T)}$$

1. Következmény:
Ha T olyan, hogy $\varepsilon(T)>0$, azaz $\varepsilon(T)\geqslant 1$, akkor $\forall M$ $\delta(M)>0$, azaz $\delta(M)\geqslant 1$ (nincs teljes párosítás).

2. Következmény:
$max\ \varepsilon(T) \leqslant min\ \delta(M) = |V| - 2\ V|H|$, ahol $T \subseteq V(H)$ és $M \subseteq E(H)$ párosítás.

2. Állítás bizonyítása:
Vissza az algoritmushoz. Emlékeztető:

$$\to\ G_k, M_k, \underbrace{C_k}_{\substack{\text{címkézett pontok}\\ \text{a k-szorosan}\\ \text{zsugorított gráfban}}} = \underbrace{B_k}_{\text{belső pontok}} \cup \underbrace{K_k}_{\text{külső pontok}}$$

(a) Leállás előtt volt egy címkenövelés => külső pontoknak nincs címkézetlen szomszédja
(b) Leállás (2)-ben történt => külső pontok között nincs él
(a) és (b) => $(G_k – B_k)$ -ban K_k elemei izolált csúcsok, azaz $C_1(G_k - B_k) \geqslant |K_k|$
Tehát $\varepsilon(B_k) \geqslant |K_k| - |B_k| = |\{\textit{párosítatlan pontok}\}| = \delta(M_k)$
Így M_k optimális G_k-ban.

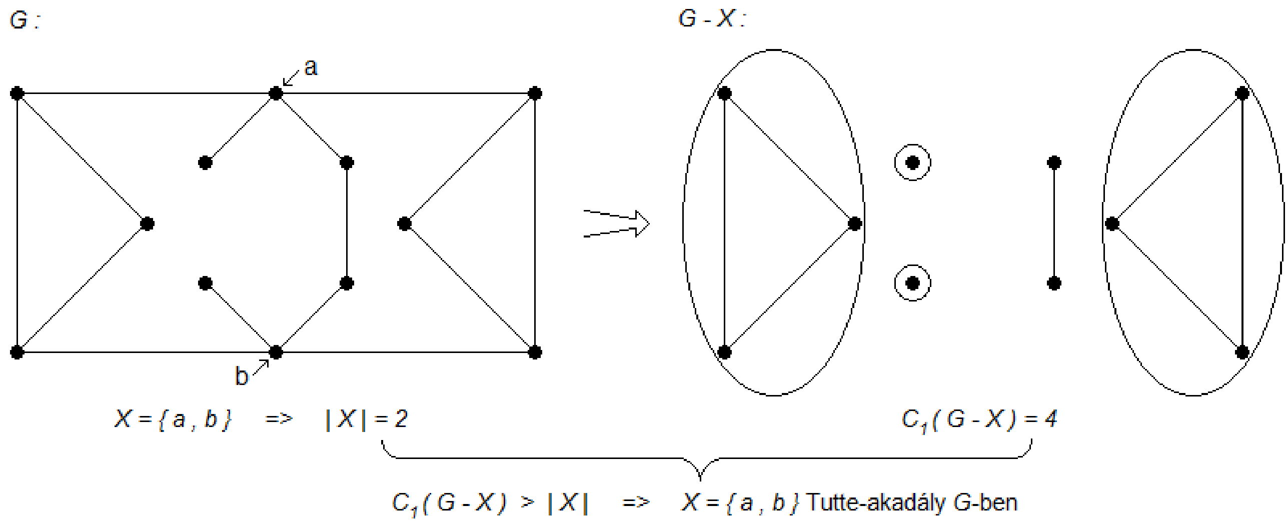
Jelölés:
$G_i \to$ zsugorítás $\to G_{i+1}$
$\pi:\quad V(G_i) \to\ V(G_{i+1})$
$\qquad x \notin V(C) \to\ x$
$\qquad x \in V(C) \to$ C-t reprezentáló csúcs
π könnyen leképezhető $V(G_i) \to\ V(G_j)$ leképezéssé, ahol $i<j$.

Állítás+:
$\varepsilon(\pi^{-1}(B_k))\ \geqslant\ \delta(M_i)$, ahol π a G_i gráf pontjait vetíti G_k -ba (ε és δ is a G_i gráfban értendő).

Bizonyítás:
Indukcióval bizonyítjuk: $i = k, k – 1, \ldots , 1, 0$
$K_k = \{k_1, \ldots, k_s\}$ $\to$ s db külső pont van a végső zsugorított gráfban (ezek izolált pontok $(G_k - B_k)$ -ban).
$\varphi_i^{-1}(k_i)$: $G_i - \varphi^{-1}(B_k)$ -ban páratlan pontszámú komponensek csúcshalmazai.
Így $\varepsilon(\varphi_i^{-1}(B_k))\ \geqslant\ |K_k| - |\varphi_i^{-1}(B_k)|$
Továbbá $|\varphi_i^{-1}(B_k)| = |B_k|$ (a végső belső pontok sosem voltak külsőek).
$|K_k| - |B_k| = \delta(M_k)$ és $\delta(M_k) = \delta(M_i)$, mert ha $2k + 1$ hosszú kört zsugorítunk, akkor a csúcsok száma $2k$-val, a párosítás mérete k-val csökken. Ezekből adódik a bizonyítandó.

Tutte és Berge tételei

Definíció:
Ha a G gráfban van egy olyan X halmaz, amelyre $C_1(G - X) > |X|$, akkor nincs benne teljes párosítás. Egy ilyen halmazt Tutte-akadálynak nevezünk.



Tétel (Tutte-tétel):
G-ben $\exists$ teljes párosítás <=> G-ben nincs Tutte-akadály

Bizonyítás:
=> irány: lásd 1. észrevétel.
<= irány: Indirekt bizonyítás. Az Edmonds-algoritmussal keressük meg az optimális M-et.
Az indirekt feltevés miatt {párosítatlan csúcsok} $\neq \emptyset$
Legyen $\varphi_0^{-1}(B_k) = T$
Ekkor $\varepsilon(T) \geq \delta(M) \geq 1$, azaz T Tutte-akadály, ami ellentmondás.

Tétel (Berge-formula):
$max\{\varepsilon(T) : T \subseteq V\} = min\{\delta(M) : M \text{ } párosítás\}$

Gallai-Edmonds struktúratétel

Észrevétel:
Az Edmonds-algoritmusban több nemdeterminisztikus lépés is van:
- címkenövelés
- *e* választása

De!
$\varphi_0^{-1}(B_k) := A(G)$
$G - \varphi_0^{-1}(B_k)$ páratlan pontszámú komponenseinek pontjai $:= D(G)$
$V(G) - (D(G) \cup A(G)) := C(G)$
Úgy tűnik, hogy $A(G), D(G), C(G)$ halmazok függnek az Edmonds-algoritmus futásától.
Látni fogjuk...

Tétel:
Az Edmonds-algoritmus minden futására:

$D(G) = \{v \in V(G) : \exists M$ párosítás, amelyre $|M| = V(G)\}$,
$A(G) = \{v \in V(G) \setminus D(G) : v$-nek $\exists D(G)$-beli szomszédja$\}$,
$C(G) = V(G) - D(G) \cup A(G)$.

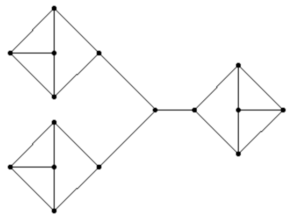
Következmény:
Az $A(G), D(G), C(G)$ halmazok függetlenek az Edmonds-algoritmus futásától.

Tétel:
$G|_{D(G)}$ komponensei mind rendelkeznek a következő tulajdonsággal:
(i) $\forall v \in V(P) : (P-v)$-ben $\exists$ teljes párosítás $\rightarrow$ „*P* faktorkritikus"
(ii) $\forall R \subseteq A(G)$ -ben legalább $|R|+1$ db $G|_{D(G)}$ -beli komponenshez vezet él
(iii) $G|_{C(G)}$ -ben $\exists$ teljes párosítás

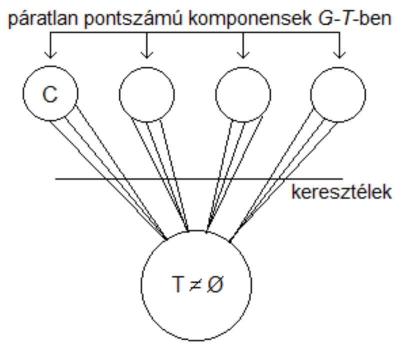
Alkalmazás

Petersen-tétel:
G 3-reguláris, 2-szeresen élösszefüggő => *G*-ben létezik teljes párosítás

Példa:
Egy gráf, ami 3-reguláris, de nem 2-szeresen élösszefüggő
=> nincs benne teljes párosítás



Bizonyítás:
Elég belátni, hogy 3-reguláris, 2-szeresen élösszefüggő gráfban nincs Tutte-akadály.
(a) $T = \emptyset$ nem Tutte-akadály, egyszerűen belátható.
(b) Legyen $T \neq \emptyset$.
Cél: *T* nem Tutte-akadály.
Legyen *C* a *G* – *T* gráf egy páratlan pontszámú komponense.
Állítás: *C*-ből legalább 3 él megy *T*-hez.
G 2-szeresen élösszefüggő => legalább 2 él megy *T*-hez. Annak belátása, hogy pont 2 él megy *T*-hez, egyszerű.



Kérdés: Hány keresztél van?

$\left.\begin{array}{r} \geqslant 3 \ \ C_1(G-T) \\ \leqslant 3 \ \ |T| \end{array}\right\}$ A két becslés együtt adja, hogy *T* nem Tutte-akadály