Gráfelmélet/Diszkrét Matematika MSc hallgatók számára

5. Előadás

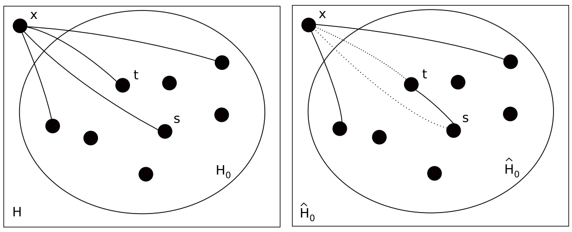
Előadó: Hajnal Péter
Jegyzetelő: Majoros György 2009. október 5.

Lovász-féle lemelési lemma bizonyítása

1. Lemma. *Legyen H egy gráf, amelyet H_0-ból egy x pont hozzáadásával és x-ből $2s$ darab H_0-ba vezető él behúzásával nyerünk. Tegyük fel, hogy H-ra teljesül*

$$(\star) \text{ bármely } \emptyset \subsetneq U \subsetneq V(H_0) \text{ -ra } |\partial U| \geq k (\geq 2).$$

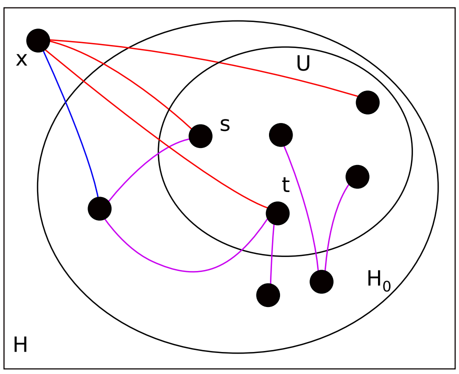
Ekkor bármely xs élhez létezik xt él úgy, hogy $\hat{H} = H - xs - xt \dot{+} st$-re megmaradjon $(\star)$.



1. ábra.

Bizonyítás. Válasszunk egy tetszőleges xt élt. Ha $(\star)$ teljesül a $H \to \hat{H} = H - xs - xt \dot{+} st$ gráfra , akkor kész vagyunk.

Ha $(\star)$ nem teljesül, akkor találunk egy U cáfoló halmazt: $\emptyset \subsetneq U \subsetneq V(H_0)$ és $|\partial_{\hat{H}} U| < k$. A ∂U és $\partial_{\hat{H}} U$ összevetéséből látható, hogy $|\partial_{\hat{H}} U| = |\partial U|$ kivéve, ha $s, t \in U$, amikor is $|\partial_{\hat{H}} U| = |\partial U| - 2$. Mivel $|\partial U| \geq k$ (H-ra teljesül $(\star)$), ezért $|\partial U| \in \{k, k+1\}$.

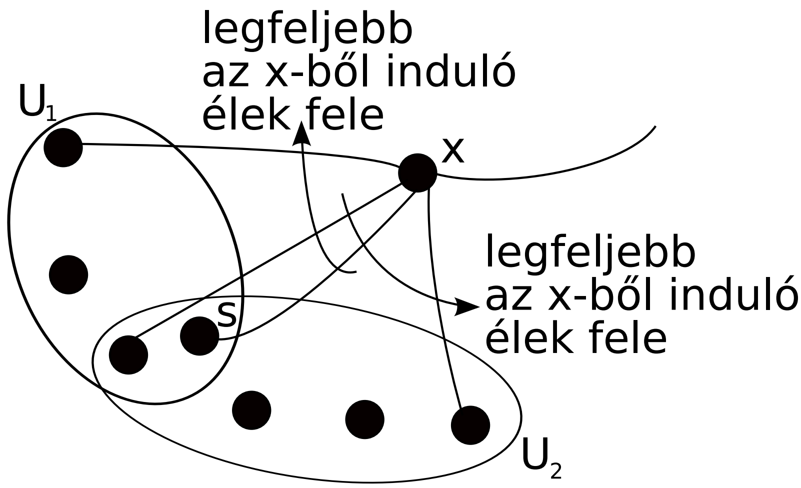


2. ábra. U határának élei pirosak és lilák, $V(H_0) - U$ határának élei kékek és lilák.

$\partial(V(H_0)\backslash U)$ azonos paritású élet tartalmaz, mint ∂U (lásd 2. ábra), továbbá $|\partial(V(H_0)\backslash U)| \geq k$.

Az előző két gondolatból következik, hogy $|\partial(V(H_0)\backslash U)| \geq |\partial U|$, azaz x-ből legalább annyi él vezet $(V(H_0)\backslash U)$-hoz, mint amennyi U-hoz vezet.

Az előző cáfoló U halmazt jelöljük U_t-vel, legyen $N = \{x \text{ szomszédai } H_0\text{-ban}\}$. Indirekten bizonyítunk: Tegyük fel, hogy minden $n \in N$ esetén találok U_n cáfoló halmazt $(s, n \in U_n)$.



3. ábra.

A fentiek alapján az $\bigcup_{n \in N} U_n \supseteq N$ unióban legalább három különböző halmaz szerepel.

Segédlemma. Legyen $A, B, C \subseteq V(H)$, ekkor $|\partial(A \cap B \cap C)| + |\partial(A \cap \overline{B} \cap \overline{C})| + |\partial(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)| + |\partial(\overline{A} \cap B \cap \overline{C})| \leq |\partial A| + |\partial B| + |\partial C|$.

Segédlemma bizonyítása. A segédlemát nem bizonyítjuk, csak vázoljuk, ahogy egy igazolásához eljuthatunk: Mindkét oldal éleket számol: b_e legyen hányszor számoltuk e-t a bal oldalon és j_e legyen hányszor számoltuk e-t a jobb oldalon. Esetanalízissel könnyen (kis kitartással) adódik, hogy bármely e élre $b_e \leq j_e$, amiből adódik a segédlemma. ■

U_1, U_2, U_3-ra alkalmazzuk a segédlemmát. A segédlemma egy élesítése is igaz: az sx élre $b_{sx} = 1$, $j_{sx} = 3$. Ebből következik, hogy baloldalt a jobboldal -2 is felülről becsli. Mivel az U_i-k cáfoló halmazok, ezért (jobboldal -2) $\leq 3(k+1) - 2$. Az N minimális fedéséből adódik, hogy a bal oldalon szereplő halmazok $V(H_0)$ valódi, nemüres részei és így $4k \leq$ baloldal.

Azt kaptuk, hogy $4k \leq 3(k+1) - 2$, ez viszont nem teljesül, mert $k \geq 2$. Így ellentmondáshoz jutottunk, vagyis a feltevésünk nem igaz. ■

Menger tételei

Egy egyszerű észrevétellel kezdjük: Legyen G gráf és $s, t \in V(G)$. Ekkor

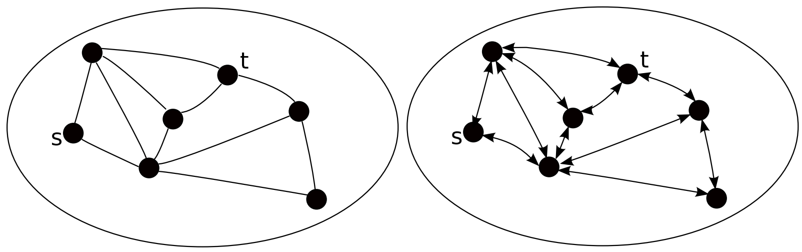
$$\min_{\substack{F \subseteq E(G)\\ G-F\text{-ben nem létezik } st \text{ út}}} |F| \geq \max_{\substack{p_1,\ldots,p_k\ st \text{ utak}\\ \text{páronként éldiszjunktak}}} k.$$

Az állítás igaz irányított gráfokra is (amikor irányított utakkal dolgozunk).

2. Tétel (Menger-tétel).

$$\min_{\substack{F \subseteq E(G)\\ G-F\text{-ben nem létezik } st \text{ út}}} |F| = \max_{\substack{p_1,\ldots,p_k\ st \text{ utak}\\ \text{páronként éldiszjunktak}}} k.$$

Bizonyítás. Az irányítatlan esetet bizonyítjuk. G éleinek vegyük egy oda-vissza irányított példányát. Az így kapott irányított gráfban legyen $c \equiv 1$ kapacitásfüggvény. Ezzel egy $\mathcal{H}$ hálózathoz jutunk.



4. ábra. Egy gráf s és t csücsokkal és a belőle készített hálózat

Erre alkalmazzuk a folyamok kidolgozott elméletét:

$$\min_{\substack{F \subseteq E(G)\\ G-F\text{-ben nem létezik } st \text{ út}}} |F| = \min_{\substack{\mathcal{V} \text{ vágás a}\\ \mathcal{H} \text{ hálózatban}}} C(\mathcal{V}) \overset{MFMC}{=} \max_{\substack{\text{f folyam } \mathcal{H}\text{-ban}\\ f:E(G)\to[0,1]}} e(f) \overset{(\star)}{=}$$

$$\overset{(\star)}{=} \max_{\substack{\text{f folyam } \mathcal{H}\text{-ban}\\ f:E(G)\to\{0,1\}}} e(f) \overset{(\star\star)}{=} \max_{\Phi \subseteq E(G)} e(\Phi).$$

($\star$) A folyamalgoritmus következménye, hogy ha c egész értékű, akkor van egész értékű optimális folyam is.

($\star\star$)Az f azonosítható egy Φ élhalmaz karakterisztikus függvényével. Az f-re megismert fogalmak „átfordíthatók” a Φ élhalmaz nyelvére is: $e(\Phi) = d^{ki}_{\Phi}(s) - d^{be}_{\Phi}(s)$ és az anyagmegmaradás Φ-re átfogalmazva: bármely $x \in V(G)\backslash\{s,t\}$-re $d^{ki}_{\Phi}(x) = d^{be}_{\Phi}(x)$.

Továbbá

$$\max_{\Phi \subseteq E(G)} e(\Phi) = \max_{\substack{\Phi \subseteq E(G)\\ \Phi \text{ körmentes}}} e(\Phi) = \max_{\substack{\Phi \text{ éldiszjunkt forrás-nyelő}\\ \text{utak élhalmazainak}\\ \text{uniója}}} e(\Phi) = \max_{\substack{p_1,\ldots,p_k\\ \text{éldiszjunkt } st \text{ utak}\\ \Phi \text{ körmentes}}} k.$$

Valóban: irányított körök elhagyása Φ-ből a megmaradási törvényeket nem rontja el, és az értéket változatlanul hagyja. A körmentes élhalmaz egy nyilvánvaló mohó álgoritmussal szétszedhető forrás-nyelő utak éldiszjunkt uniójára. A körmentes élhalmaz értéke az st utak számával azonos.

Egyenlőségeink együtt a bizonyítandót adják. ■

3. Következmény. *G akkor és csak akkor k-szorosan élösszefüggő, ha bármely $x, y \in V$-re létezik $p_1, \ldots, p_k$ éldiszjunkt xy út. Ha G k -szorosan élösszefüggő, akkor tetszőleges $s \neq t$ csúcsra*

$$\min_{\substack{F \subseteq E(G) \\ G-F\text{-ben nem létezik } st \text{ út}}} |F| \geq k.$$

Bizonyítás. Menger tételéből adódik k darab éldiszjunkt st út létezése. A fordított állítás triviális. ■

Definíció. G k-szorosan (csúcs)összefüggő akkor és csak akkor, ha bármely $U \subseteq V$-re $|U| < k$ esetén $G - U$ összefüggő, továbbá $|V| \geq k + 1$.

4. Tétel Menger-tétel csúcsváltozatok. *G gráf vagy irányított gráf, $s, t \in V$, $st \in E$ vagy $\overrightarrow{st} \notin E$*

$$\min_{\substack{U \subseteq V \setminus \{s,t\} \\ G-U\text{-ban nem létezik } st \text{ út}}} |U| = \max_{\substack{p_1,\ldots,p_k \\ \text{páronként közös belső} \\ \text{pont nélküli } st \text{ utak} \\ \text{(pontfüggetlen utak)}}} k.$$

5. Következmény. *G akkor és csak akkor k-szorosan összefüggő, ha bármely $x, y \in V$-re létezik k db pontfüggetlen xy út, továbbá $|V| \geq k + 1$.*

Párosítások páros gráfokban

Definíció. Az $M \subseteq E(G)$ halmazt párosításnak nevezzük ha az M-beli élek végpontjai $2|M|$ darab különböző csúcs. Vagyis "M elemei között nincs összefutás".

Definíció. G gráf páros, ha $V(G) = A \dot\cup F$ és bármely él egyik vége A-ban, másik vége F-ben van.

Definíció. $L \subseteq V(G)$ lefogó csúcshalmaz, ha bármely $xy \in E$-re $\{x, y\} \cap L \neq \emptyset$.

Észrevétel. M párosítás, L lefogó ponthalmaz, akkor $|M| \leq |L|$ így

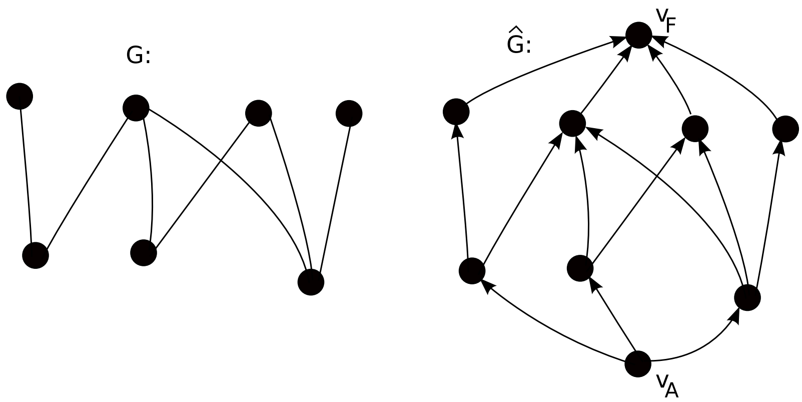
$$\nu(G) \overset{jel}{=} \max_{M \text{párosítás}} |M| \leq \min_{\substack{L \text{ lefogó} \\ \text{ponthalmaz}}} |L| \overset{jel}{=} \tau(G).$$

Példa. Legyen G egy páratlan kör, C_{2k+1}. Ekkor $\nu(C_{2k+1}) = k$, $\tau(C_{2k+1}) = k + 1$ könnyen ellenőrizhető.

A példa mutatja, hogy általában $\nu(G) \leq \tau(G)$-ben nincs egyenlőség.

6. Tétel (Kőnig Dénes). *Ha G páros, akkor $\nu(G) = \tau(G)$.*

Bizonyítás. Vegyünk fel egy v_A és egy v_F új csúcsot. Irányítsuk régi éleinket A-tól F felé, továbbá v_A-ból vezessünk éleket minden egyes A-beli ponthoz és minden F-beli pontból vezessünk egy élt v_F-hez. Legyen $\hat{G}$ az így kapott irányított gráf.



5. ábra.

A Menger-tétel irányított, csúcsváltozatát alkalmazzuk az $s = v_A$ és a $t = v_F$ csúcsokkal. Könnyű látni, hogy

$$\min_{\substack{U \subseteq V(G) \\ \hat{G} - U\text{-ban nincs} \\ v_A v_F \text{ irányított út}}} |U| = \tau(G) \qquad \text{és} \qquad \max_{\substack{p_1, \ldots, p_k \\ \text{pontfüggetlen} \\ st \text{ utak}}} k = \nu(G).$$

A Menger-tétel adja a bizonyítandót. ∎