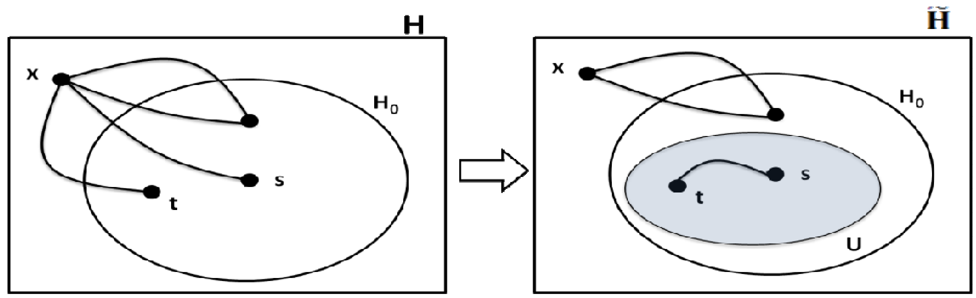
Gráfelmélet – 5. előadás

Készítette: Kapusi Csilla Andrea

Lemma (Lovász László)



1. ábra

Legyen *x* egy csúcs *H* hálózatból úgy, hogy *x*-re páros számú H_0-ba vezető él illeszkedik és *H*-ra teljesül az alábbi tulajdonság:

$$(*) \qquad \forall\ \emptyset \subsetneq U \subsetneq V(H_0);\ |\partial U| \geq k\ (\geq 2)$$

Állítás: Minden *xs* élhez $\exists$ *xt* él úgy, hogy $\tilde{H}$ hálózatra megmaradjon a (*) tulajdonság.

Bizonyítás:

Válasszunk egy *xt* élt és $H \rightarrow \tilde{H} = H - xs - xt + st$. Legyen $\emptyset \subsetneq U \subsetneq V(H_0)\, s,t \in U$ cáfoló halmaz. Ekkor $|\partial U| \in \{k, k+1\}$; $|\partial_{\tilde{H}} U| < k \Leftrightarrow cáfoló$ (Mivel $|\partial U| - 2 = |\partial_{\tilde{H}} U|$).

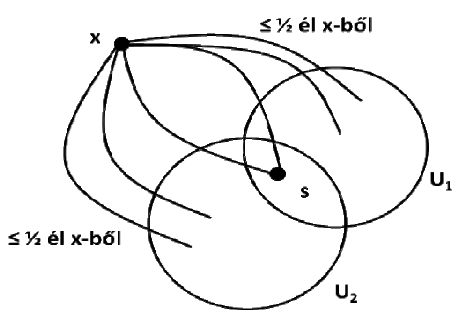
Tudjuk, hogy $\partial(V(H_0) \setminus U)$ azonos paritású, mint ∂U.

$|\partial(V(H_0) \setminus U)| \geq k$

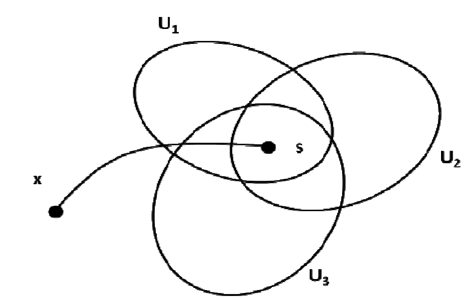
A fentiekből következik, hogy $|\partial(V(H_0) \setminus U)| \geq |\partial U|$. Tehát *x*-ből legalább annyi él vezet $(V(H_0)\setminus U)$-ba, mint amennyi *U*-hoz vezet.

Jelölés: cáfoló $U = U_t$ és N = *x* szomszédjai H_0-ban

Tegyük fel, hogy $n \in N \rightarrow U_n\ (s, n \in U_n)$. Ekkor $\bigcup_{n \in N} U_n \supseteq N$ (vagyis speciálisan U_n lefedi *N*-et).



3. ábra U_1 és U_2 nem diszjunktak, legalább *s* közös

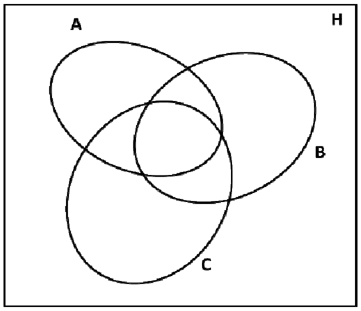


2. ábra Fedő cáfoló ponthalmaz *N* minimális fedéséről

Segédlemma

Legyenek *A, B, C* $\subseteq$ *V(H)*. Ekkor a következő egyenlőtlenség áll fenn:

$$|\partial(A \cap B \cap C)| + |\partial(A \cap \bar{B} \cap \bar{C})| + |\partial(B \cap \bar{A} \cap \bar{C})| + |\partial(C \cap \bar{A} \cap \bar{B})| \leq |\partial A| + |\partial B| + |\partial C|$$



4. ábra

Bizonyítás:

$\forall$ két oldal éleket számol. Vezessük be erre az alábbi jelöléseket:

- b_e: *e* hányszor számolt a baloldalon
- j_e: *e* hányszor számolt a jobboldalon

$\forall e \in E - re\ b_e \leq j_e \Rightarrow segédlemma$

U_1, U_2, U_3-ra alkalmazva a segédlemmát, a következőt kapjuk:

$$b_{xs} = 1;\ j_{xs} = 3$$

$$4k \leq bal\ oldal \leq jobb\ oldal - 2 \leq 3\ (k + 1) - 2$$

Megjegyzés: K-szorosan él-összefüggő gráfok hasonló jellemzése adható k páratlan esetben is.

Tétel (Menger tétele)

Adott *G* gráf/$\vec{G}$ irányított gráf és *s, t* $\in$ *V(G)* úgy, hogy *s* $\neq$ *t*. Ekkor a következő összefüggés érvényes:

$$min\{|F|: F \subseteq E(G); G \setminus F - ben \nexists\ st\ út/irányított\ út\} =$$
$$max\{k: p_1, \dots, p_k\ páronként\ éldiszjunkt\ st\ utak/irányított\ utak\}$$

Bizonyítás (irányítatlan eset):

Legyen *H* egy hálózat melyben a kapacitás *C = 1*.

$$\begin{aligned}
min\{|F|: F \subseteq E(G); G \setminus F\ \ ben \nexists\ st\ út\} &= \min\{C(\mathcal{V}): \mathcal{V}\ vágás\ H\ \ ban\} \\
&= \max\{é(f): f\ folyam\ H - ban\} \\
&= \max\{é(f): f: E(\overleftrightarrow{G}) \to \{0,1\}\ folyam\ H - ban\} \\
&= \max\{é(\Phi): \Phi \subseteq E(\overleftrightarrow{G}) \text{ és } \forall\ x\ \in V(\overleftrightarrow{G}) \setminus \{s,t\}\ d_{\Phi}^{be}(x) = d_{\Phi}^{ki}(x)\} \\
&= \max\{é(\Psi): \Psi \subseteq E(\overleftrightarrow{G}) \text{ és } \forall\ x\ \in V(\overleftrightarrow{G}) \setminus \{s,t\}\ d_{\Phi}^{be}(x) \\
&= d_{\Phi}^{ki}(x)\ és\ \Phi\ körmentes\} \\
&= \max\{é(\Psi): \Psi\ éldiszjunkt\ forrás - nyelő\ utak\ élhalmazatnak\ úniója\} \\
&= max\{k: p_1, \dots, p_k éldiszjunkt\ st\ utak\}
\end{aligned}$$

Következmény:

A következők ekvivalensek:

1. G K-szorosan él-összefüggő
2. $\forall$ *x, y* $\in$ *V(G)* $\exists$ $p_1,\ldots,p_k$ éldiszjunkt *xy* út. Ha *s* = *x* és *t* = *y* akkor $\min\{|F|: F \subseteq E \text{ és } G \setminus F - ben \nexists\ st\ \text{út}\} \geq k$.

Definíció (Csúcs-összefüggőség)

G gráf akkor és csakis akkor *k*-szorosan (csúcs) összefüggő ha:

$$\forall\ U \subseteq V; |V| \geq k+1;\ |U| < k \Longrightarrow G \setminus U\ összefüggő.$$

Tehát ha *G* *k*-szorosan összefüggő, akkor tetszőlegesen választhatunk *(k-1)* csúcsot, melyeket eltávolítva a gráf továbbra is összefüggő marad.

Tétel (Menger tétele, csúcs változat)

Adott *G* gráf/$\vec{G}$ irányított gráf és *s, t* $\in$ *V(G)* úgy, hogy $st \notin E\,/\,\overrightarrow{st} \notin E$. Ekkor a következő összefüggés érvényes:

$$min\{|U|: U \subseteq V \setminus \{s,t\}; G \setminus U - ban \nexists\ st\ \text{út}\}$$
$$= max\{k: p_1, \ldots, p_k\ páronként\ közös\ belső\ pont\ nélküli\ (pontfüggetlen) utak\}$$

Következmény: *G* *K*-szorosan összefüggő $\Leftrightarrow$ $\forall$ *x, y* $\in$ *V* $\exists$ $p_1,\ldots,p_k$ pontfüggetlen *xy* út (Technikai feltétel: |V|≥k+1).

Párosítások páros gráfokban

Definíció (Párosítás)

Egy *G* gráf éleinek egy *M* halmazát párosításnak nevezzük, ha a benne levő élek páronként függetlenek (nincs közöttük összefutás).

$$\nu(G) = \max\{|M|: M\ párosítás\ G - ben\}$$

Definíció (Páros gráf)

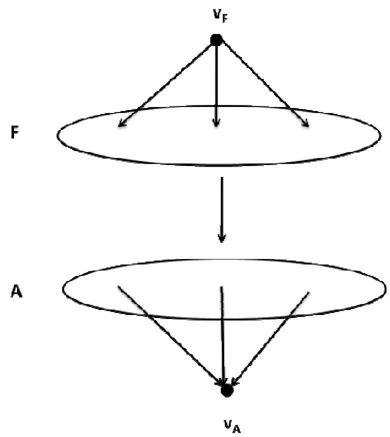
G gráf páros, ha csúcsait feloszthatjuk két partícióra úgy, hogy élek csak a kettő között haladjanak (a partíciókon belül ne legyen egyetlen él sem).

Definíció (Lefogó ponthalmaz)

Egy *L* $\subseteq$ *V(G)* halmazt lefogó ponthalmaznak nevezünk, ha $\forall$ *xy* $\in$ *E(G)* esetén *{x, y}* $\cap$ *L* ≠*Ø*.

$$\tau(G) = \min\{|L|: L\ lefogó\ ponthalmaz\ G - ben\}$$

Észrevétel: $\nu(G) \leq \tau(G)$



5. ábra

Tétel (Kőnig Dénes)

Ha G páros gráf, akkor $\nu(G) = \tau(G)$.

Bizonyítás:

Legyen A és F a G gráf két partíciója. Vegyük fel a v_A és v_F pontokat, kössük össze A illetve F minden pontjával és adjunk irányítást a gráfnak az ábrán látható módon. Erre alkalmazzuk Menger tételének pont-változatát. A $v_A v_F$ utak maximális száma $\nu(G)$, a v_A-t és v_F-et elválasztó ponthalmaz minimális elemszáma $\tau(G)$.