3. előadás
2009.09.21.

Folyamok

Definíció. *Hálózat*nak nevezünk egy $H=(\vec{G},s,t,c)$ négyeset, ahol

- $\vec{G}=(V,E,K,B)$ irányított gráf
- $s\in V$ forrás
- $t\in V$ $(t\neq s)$ nyelő
- $c:E(\vec{G})\to(0,\infty)$ kapacitásfüggvény.

Definíció. Egy $f:E(\vec{G})\to[0,\infty)$ függvényt *folyam*nak nevezünk a H hálózatban, ha

i) $\forall e\in E$ esetén $0\leq f(e)\leq c(e)$

ii) $\forall v\in V\setminus\{s,t\}$ esetén $\sum_{e:eBv} f(e)=\sum_{e:eKv} f(e)$ (megmaradási feltétel).

Példa. Az $f\equiv 0$ függvény folyam minden hálózatban.

Definíció. Az f *folyam értéke*:

$$é(f)=\sum_{e:eKs} f(e)-\sum_{e:eBs} f(e).$$

Definíció. $V(\vec{G})$ egy $\mathcal{V}=\{S,T\}$, $s\in S$, $t\in T$ partícióját *vágás*nak nevezzük.

Lemma.

a) $é(f)=\sum_{e:eBt} f(e)-\sum_{e:eKt} f(e)$

b) Tetszőleges $\mathcal{V}=\{S,T\}$ vágásra

$$é(f)=\sum_{\substack{e=\overrightarrow{xy}\\ x\in S,\, y\in T}} f(e)-\sum_{\substack{e=\overrightarrow{xy}\\ x\in T,\, y\in S}} f(e).$$

Bizonyítás.

b) Adjuk össze a következő egyenlőségeket:

$$\sum_{e:eKs} f(e)-\sum_{e:eBs} f(e)=é(f) \qquad \text{(folyam értékének definíciója)}$$

$$\sum_{e:eKv} f(e)-\sum_{e:eBv} f(e)=0 \qquad (v\in S\setminus\{s\}) \qquad \text{(megmaradási feltételek)}$$

Rendezés után éppen a bizonyítandó állítás adódik:

$$\sum_{\substack{e=\overrightarrow{xy}\\ x\in S,\, y\in T}} f(e)-\sum_{\substack{e=\overrightarrow{xy}\\ x\in T,\, y\in S}} f(e)=é(f).$$

a) A b) állítás speciális esete: $\mathcal{V}=\{V\setminus\{t\},\{t\}\}$.

■

Folyam probléma: Határozzuk meg egy adott H hálózatbeli folyam legnagyobb lehetséges értékét, azaz $\max_{\substack{f \text{ folyam} \\ H \text{ hálózatban}}} é(f)$ -et.

Megjegyzés. Ha minden f folyamot azonosítunk az $(f(e_1),\ldots,f(e_{|E(\vec{G})|})) \in \mathbb{R}^{|E(\vec{G})|}$ ponttal, akkor a H hálózatbeli folyamok felfoghatók $\mathbb{R}^{|E(\vec{G})|}$ egy kompakt részhalmazaként. Mivel az $é(f)$ függvény folytonos $\mathbb{R}^{|E(\vec{G})|}$-n, ezért a folyam problémában szereplő maximum valóban létezik.

Megjegyzés. Mivel a folyamok lineáris egyenlőségekkel és egyenlőtlenségekkel vannak definiálva, és a maximalizálandó $é(f)$ lineáris függvény, ezért a folyam probléma egy speciális lineáris programozási feladatként is felfogható.

Definíció. A $\mathcal{V} = \{S,T\}$ *vágás kapacitása*:

$$c(\mathcal{V}) = \sum_{\substack{e=\overrightarrow{xy} \\ x\in S,\, y\in T}} c(e).$$

Állítás. Tetszőleges f folyam és $\mathcal{V}$ vágás esetén

$$é(f) \le c(\mathcal{V}).$$

Bizonyítás.

Tetszőleges f folyam és $\mathcal{V} = \{S,T\}$ vágás esetén

$$é(f) \overset{\text{Lemma } b)}{=} \sum_{\substack{e=\overrightarrow{xy} \\ x\in S,\, y\in T}} f(e) - \sum_{\substack{e=\overrightarrow{xy} \\ x\in T,\, y\in S}} f(e) \le \sum_{\substack{e=\overrightarrow{xy} \\ x\in S,\, y\in T}} c(e) = c(\mathcal{V}),$$

ami igazolja az állítást.

■

Következmény.

$$\max_{f \text{ folyam}} é(f) \le \min_{V \text{ vágás}} c(\mathcal{V})$$

Definíció. Legyen f egy folyam a $H = (\vec{G}, s, t, c)$ hálózatban, G az az irányítatlan gráf, amelyet $\vec{G}$-ből úgy kapunk, hogy elhagyjuk az élek irányítását, és legyen P egy st út G-ben. P éleit két osztályba sorolhatjuk aszerint, hogy a $\vec{G}$ gráfbeli megfelelőjük s-től t felé mutat ($E_{elöre}(P)$) vagy t-től s felé ($E_{hátra}(P)$). Azt mondjuk, hogy P *javító út* az f folyamra a H hálózatban, ha:

i) $\forall e \in E_{elöre}(P)$ esetén $f(e) < c(e)$

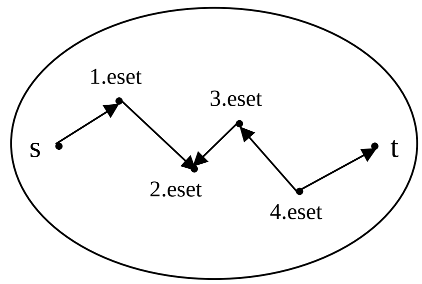
ii) $\forall e \in E_{hátra}(P)$ esetén $f(e) > 0$.

Állítás. Legyen P egy javító út az f folyamra, $\delta_{elöre} = \min_{e\in E_{elöre}(P)} (c(e) - f(e))$, $\delta_{hátra} = \min_{e\in E_{hátra}(P)} f(e)$ és $\delta = \min(\delta_{elöre}, \delta_{hátra})$. Ekkor

$$\tilde{f}(e)=\begin{cases} f(e) \quad , & e\notin E(P) \\ f(e)+\delta, & e\in E_{elöre}(P) \\ f(e)-\delta, & e\in E_{hátra}(P) \end{cases}$$

folyam és $é(\tilde{f})=é(f)+\delta>é(f)$.

Bizonyítás.



δ definíciójából világos, hogy $\forall e\in E$ esetén $0\le \tilde{f}(e)\le c(e)$.
A megmaradási feltételek ellenőrzése eset analízissel történik aszerint, hogy a $v\in V\setminus\{s,t\}$ csúcs P-re esik-e vagy sem, illetve hogy a v-ben összefutó élek hogyan vannak irányítva (4 eset, lásd ábra).
Hasonló meggondolással adódik a folyam értékének változására vonatkozó állítás is.

■

<u>Tétel.</u> Legyen f egy folyam a H hálózatban. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:

i) f értéke maximális.
ii) f-hez nem létezik javító út.
iii) van olyan $\mathcal{V}=\{S,T\}$ vágás, amelyre $é(f)=c(\mathcal{V})$.

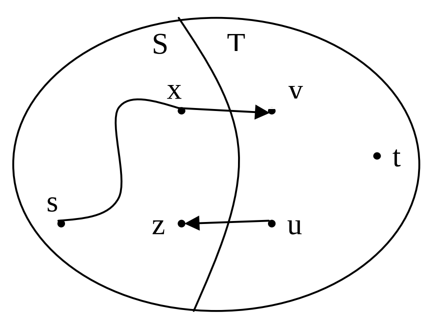
Bizonyítás.

i) $\Rightarrow$ ii) Az előző észrevételből következik az állítás.

ii)$\Rightarrow$iii) P-t *javító út-kezdemény*nek nevezzük az f folyamra nézve, ha

1) s-ből induló út G-ben
2) $\forall e\in E_{elöre}(P)$ esetén $f(e)<c(e)$ és
$\forall e\in E_{hátra}(P)$ esetén $f(e)>0$.

Legyen $S=\{x\in V: \exists\ sx \text{ javító út kezdemény}\}$ és $T=V\setminus S$.
Belátjuk, hogy a $\mathcal{V}=\{S,T\}$ vágás megfelel a iii) pont követelményeinek:



Minden $\overrightarrow{xy}\in E,\ x\in S,\ y\in T$ él esetén $f(\overrightarrow{xy})=c(\overrightarrow{xy})$, különben létezne sy javító út-kezdemény. Hasonlóan, minden $\overrightarrow{uz}\in E,\ u\in T,\ z\in S$ él esetén $f(\overrightarrow{xy})=0$, különben létezne su javító út-kezdemény. Így az $é(f)\le c(\mathcal{V})$ bizonyításában felírt becslésben egyenlőtlenség helyett egyenlőség teljesül. Ezzel beláttuk, hogy $é(f)=c(\mathcal{V})$.

iii)$\Rightarrow$i) A már korábban bizonyított $\max\limits_{f\ folyam} é(f)\le \min\limits_{V\ vágás} c(\mathcal{V})$ egyenlőtlenség igazolja az állítást.

■

Következmény. (MFMC-tétel) Tetszőleges hálózatban teljesül a következő egyenlőség:

$$\max_{f \text{ folyam}} é(f) = \min_{V \text{ vágás}} c(\nabla).$$

Megjegyzés. Az MFMC rövidítés az angol ‚max flow-min cut' kifejezésből származik. Magyar nyelven ‚maximális folyam-minimális vágás' tételként hivatkoznak rá.

A fenti tétel ii)$\Rightarrow$iii) bizonyításából a következő algoritmus is kiolvasható:

Ford-Fulkerson-algoritmus (maximális folyamot kereső algoritmus).

1. lépés: Vegyünk egy tetszőleges f folyamot H-ban.
2. lépés: Keressünk f-hez javító utat a következő módon:
   2.1. lépés: Legyen $S = \{s\}$.
   2.2. lépés: (bővítési lépés) Legyen
   $B_{elöre} = \{x \in V \setminus S: \ \exists y \in S, \ \exists \overrightarrow{yx} \in E \quad f(\overrightarrow{yx}) < c(\overrightarrow{yx})\}$ és
   $B_{hátra} = \{x \in V \setminus S: \ \exists y \in S, \ \exists \overrightarrow{xy} \in E \quad f(\overrightarrow{xy}) > 0\}$.
   a) eset: Ha $B_{elöre} = B_{hátra} = \emptyset$, akkor f-hez nincs javító út, és így egy korábbi tétel szerint f maximális értékű.
   b) eset: Ha $B_{elöre} \neq \emptyset$ vagy $B_{hátra} \neq \emptyset$, és $t \notin B_{elöre} \cup B_{hátra} \cup S$, akkor ismételjük meg a bővítési lépést az $\tilde{S} = B_{elöre} \cup B_{hátra} \cup S$ halmazzal.
   c) eset: Ha $B_{elöre} \neq \emptyset$ vagy $B_{hátra} \neq \emptyset$, és $t \in B_{elöre} \cup B_{hátra} \cup S$, akkor találtunk st javító utat f-hez és rátérhetünk a 3. lépésre.
3. lépés: A talált javító út segítségével konstruáljuk meg egy f-nél nagyobb értékű folyamot a korábbi észrevételben leírt módon, majd a kapott $\tilde{f}$ folyammal térjünk vissza a 2. lépéshez.

Megjegyzés. Az algoritmus a legnagyobb értékű folyam megtalálása után még növel javító út kezdeményeket. Az elakadáskor kialakul egy vágás, ami bizonyítja az aktuális folyam optimalitását.

Megjegyzés. Felmerül a kérdés, hogy a fenti algoritmus ciklizálhat-e. Ha a kapacitásértékek egészek és a kiinduló folyam értékei is egészek (ez mindig elérhető, pl. $f \equiv 0$), akkor az algoritmus végig az egész számok körében működik. Továbbá, a folyam minden javításánál az érték legalább 1-gyel növekszik, így nem fordulhat elő ciklizálás. Hasonló módon igazolható, hogy $c: E(\vec{G}) \to \mathbb{Q}^+$ esetén sincs ciklizálás.

Következmény. Ha $(\vec{G}, s, t, c)$ egy olyan hálózat, amelyben $c: E(\vec{G}) \to \mathbb{N}$, akkor létezik egész értékeket felvevő optimális folyam.

Megjegyzés. A Ford-Fulkerson algoritmus mindig a legrövidebb javító utat találja meg. Ebből igazolható, hogy az algoritmus az R-aritmetikával számolva sem ciklizál.

Megjegyzés. Ha a javító utak nem szükségszerűen a legrövidebbek, akkor előfordulhat ciklizálás. A javítások folyamok egy végtelen sorozatához vezetnek. Ezek értéke monoton növő korlátos sorozat, tehát van határértéke. Az is elképzelhető, hogy a határérték is szigorúan kisebb az optimumnál.