Gráfelmélet/Diszkrét Matematika MSc hallgatók számára

1. Előadás

Előadó: Hajnal Péter
Jegyzetelő: Dombi Péter 2009. szeptember 7.

Fokszámsorozatok realizációja

Definíció. *Egy $\mathcal{G}$ gráf fokszámsorozata fokainak rendezett növekvő sora.*

Definíció. *A $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n \in \mathbb{N}$ realizálható $\mathcal{G}$ gráffal (fokszámsorozatként), ha létezik egy $\mathcal{G}$ gráf, amelynek fokszámsorozata $\{d_i\}_{i=1}^n$.*

Észrevétel. *A $d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{N}$ sor pontosan akkor realizálható, ha $\sum_{i=1}^n d_i$ páros.*

Bizonyítás. Az odafele irány triviálisan következik abból a tételből, amely szerint minden gráfra teljesül, hogy $\sum_{x \in V} d(x) = 2|E|$.

A bizonyítás másik feléhez tekintsünk két esetet:

- Tegyük fel, hogy $d_n \geq 2$ (ami ekvivalens azzal, hogy van legalább egy 2-es a sorozatban). Ekkor realizáljuk a $d_1, \ldots, d_{n-1}, d_n - 2$ sorozatot. Erre a sorozatra szintén teljesül, hogy $\sum_{i=1}^n d_i$ páros. Amennyiben ez a sorozat realizálható, és a realizáló gráf utolsó csúcsához, ha behúzunk egy hurokélt, akkor a kapott gráf egy realizációja az eredeti sorozatunknak. Így tehát elegendő a $d_1, \ldots, d_{n-1}, d_n - 2$ sorozatnak keresni egy realizációját. Ezen lépések sorozatával el lehet jutni egy olyan fokszámsorozathoz, melyben csak 0-ások és 1-esek vannak.

- Tegyük fel, hogy a sorozatunkban csak 0-ások és 1-esek vannak. Ekkor, mivel $\sum_{i=1}^n d_i$ páros ezért páros sok 1-es fokszámú csúcs van, a sorozat realizálható azzal, hogy páronként összekötjük az 1 fokszámú csúcsokat.

A két eset egy indukciós bizonyítást ad. A második a kiinduló állapot, az első az indukciós lépés.

A fenti bizonyítás egy rekurzív algoritmust is megad, ami egy realizálható fokszámsorozathoz talál egy realizáló gráfot.

Lemma. *Vegyünk egy $\mathcal{G}$ gráfot és egy $A \subseteq V$ csúcshalmazt. Ekkor $\sum_{u \in A} d(u) = 2e(A) + e(A, V/A)$.*

Bizonyítás. Az A-beli csúcsok fokszámainak összegéhez az A-n belüli élek mindegyike 2-vel járul hozzá. Másfelől az A és az A/V közötti élek mindegyike 1-gyel járul hozzá az összeghez. Ez bizonyítja az állítást.

Lemma. *A $d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{N}$ fokszámsorozat akkor és csakis akkor realizálható hurokélmentes gráffal, ha $\sum_{i=1}^n d_i$ páros és $d_n \leq d_1 + \ldots + d_{n-1}$.*

Bizonyítás. Az odafele irányhoz vegyünk egy x csúcsot és vizsgáljuk meg, hogy mennyi él van x és V/x között. Az előző lemmából következik, hogy nem több, mint $\sum_{v\in V/\{x\}} d(v)$. Ugyanakkor x és V/x közötti élek száma pont $d(x)$, mivel $\mathcal{G}$ hurokélmentes.

A másik irányhoz különböztessünk meg 3 esetet:

- Tegyük fel, hogy $d_{n-2} < d_n$, amiből következik, hogy $1 \leq d_{n-1} \leq d_n$. Vezessük vissza a problémát $d_1, \ldots, d_{n-2}, d_{n-1} - 1, d_n - 1$ sorozatra. Ekkor, ha ez a sorozat realizálható, akkor az eredeti sorozat is, azáltal, hogy az újonnan kapott sorozat realizáló gráfjában az utolsó 2 csúcs között behúzunk egy élet.

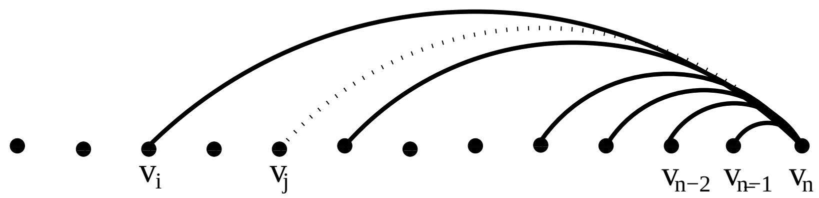
- Tegyük fel, hogy $d_{n-2} = d_n = D \geq 2$, így a sorozatunk $d_1, \ldots, d_{n-3}, D, D, D$. Ezt a sorozatot az előző esethez hasonlóan vissza lehet vezetni a $d_1, \ldots, d_{n-3}, D-1, D-1, D$ sorozatra, ami ha realizálható, akkor az eredeti sorozat is.

- Tegyük fel, hogy a sorozatunk csak 0-ásokat és 1-eseket tartalmaz. Ekkor a korábbi észrevételünk bizonyításához hasonlóan, ez a fokszámsorozat realizálható (hurokél nélkül).

  A hérom eset, ugyanúgy mint az észrevétel bizonyításánál igazolja a lemmát

Tétel. *Tegyük fel, hogy $d_1, \ldots, d_n$ realizálható egy $\mathcal{G}$ egyszerű gráffal. Ekkor a $\mathcal{G}$ realizáló egyszerű gráf (v_i foka d_i) választható úgy, hogy v_n szomszédai $v_{n-1}, \ldots, v_{n-d_n}$ legyenek.*

Bizonyítás. Vegyünk egy realizáló egyszerű gráfot, és tegyük fel, hogy nem teljesíti a tétel feltételeit. Ekkor kell legyen egy v_i és v_j, hogy $i < j$ és v_i szomszédja v_n-nek v_j pedig nem. Ekkor v_i egyet ad v_n fokszámához, míg v_j nem ad hozzá, ugyanakkor $d_i \leq d_j$.

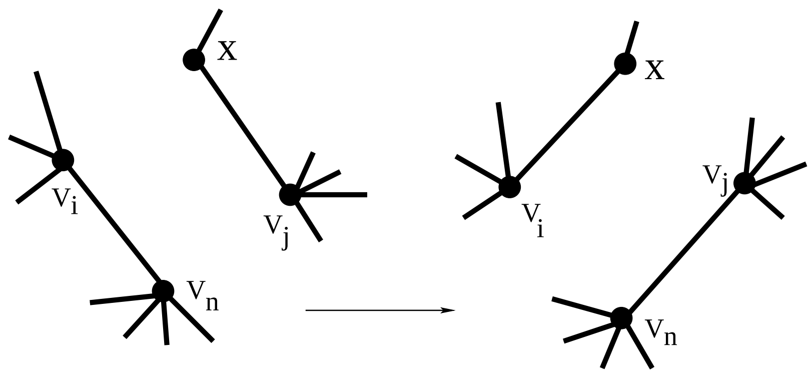


1. ábra. Az indirekt feltevés ábrája

Ebből következik, hogy létezik, egy olyan x csúcs, ami szomszédja v_j-nek és nem szomszédja v_i-nek. Szüntessük meg v_i és v_n valamint v_j és x közötti élt, és kössük össze v_i-t x-szel valamint v_j-t v_n-nel.

Ekkor a kapott gráf is realizálja a fokszámsorozatunkat, és javítottunk is rajta, ugyanis v_n szomszédai indexeinek összege nőtt. Így ezen lépések véges számú alkalmazásával elérhető, hogy v_n szomszédai a legnagyobb indexű csúcsok legyenek.

Ezen tétel alapján már algoritmus írható egyszerű gráfokkal való realizálhatóságra illetve realizálásra. A $d_1, \ldots, d_n$ sorozatról térjünk át a $d_1, \ldots, d_{n-d_n-1}, d_{n-d_n} -$



2. ábra. Élcsere a fokok változtatása nélkül

$1, d_{n-d_n+1}-1, \ldots, d_{n-1}-1$ sorozatra, és rendezzük növekvő sorrendbe. Ha kilépünk a nemnegatív számok halmazából, akkor a sorozatunk nem realizálható egyszerű gráffal. Ha a nemnegatív számok között maradunk ismételjük a lépéseket, amíg kettő hosszú, vagy csupa nulla sorozathoz nem jutunk. Ha csupa $0, 0(\ldots)$ vagy $1, 1$ a sorozat, akkor realizáljuk és fejtsük vissza a kezdeti sorozatot realizáló gráfot. Ha más kettő hosszú sorozathoz jutunk, akkor nem realizálható egyszerű gráffal a sorozatunk.

1. Példa.

1,2,3,3,4,4,6,6,8,9

0,1,2,2,3,3,5,5,7

0,0,1,1,2,2,4,4

0,0,1,0,1,1,3

0,0,0,1,1,1,3

0,0,0,0,0,0

2. Példa.

2,2,3,5,6,6,6,8,8

1,1,2,4,5,5,5,7

0,0,1,3,4,4,4

0,0,0,2,3,3

0,0,-1,1,2

Nincs realizáció!

Tétel. *Legyen* $n \geq 3$. *Ekkor a* $d_1, \ldots, d_n$ *foszámsorozat pontosan akkor realizálható fával, ha* $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1)$ *és* $1 \leq d_1$.

Bizonyítás. Az odafele irány következik korábban tanult tételekből, melyek szerint egy n csúcsú gráfban $\sum_{x \in V} d(x) = 2|E|$ és fákra $|E| = 2(n-1)$.

Most tegyük fel, hogy $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1)$. Ekkor mivel a fokszámok átlaga

$$1 < \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n} = \frac{2(n-1)}{n} < 2,$$

kell hogy létezzen egy csúcs, amelynek a foszáma legalább legalább kettő és emiatt $d_n \geq 2$. Ezenfelül biztosan létezik egy fokszámú csúcs is, így $d_1 = 1$. Vezessük vissza a realizálási problémát a $d_2, \ldots, d_{n-1}, d_n - 1$ fokszámsorozatra. Erre a sorozatra szintén teljesül a tétel feltétele, és egy realizáló gráfjából ághajtással kaphatunk egy olyan gráfot, ami az eredeti fokszámsorozatunkat realizálja.

Ezen lépések véges sok alkalmazásával megkaphatjuk az $1, 1$ fokszámsorozatot, ami nyílvánvalóan realizálható fával.