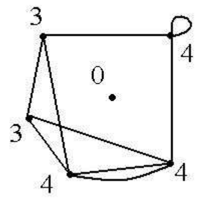
Diszkrét Matematika
1. óra
2009.09.07.

A következő fogalmakat ismertnek tekintjük: gráf, egyszerű gráf, hurokél, párhuzamos élek, fa, ághajtás operáció.

Fokszámsorozatok

Def.: G gráf fokszámsorozata fokainak rendezett növekvő sora.

Pl.: G gráf:



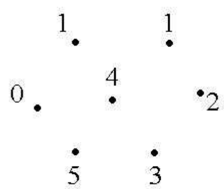
G fokszámsorozata: 0, 3, 3, 4, 4, 4
V: csúcsok halmaza
E: élek halmaza

A fokszámsorozatból könnyen kiolvasható a gráf csúcsainak száma: Ahány elemből áll a sorozat, annyi csúcsunk van. Az előző példában a 0, 3, 3, 4, 4, 4 ismeretében tudjuk, hogy $|V| = 6$.

Érdekes probléma adott fokszámsorozathoz gráfot konstruálni:

Def.: $d_1 \leq ... \leq d_n$ realizálható G gráffal (fokszámsorozatként), ha létezik G, amely fokszámsorozata $\{d_i\}$.

Pl.: Legyen adott a következő fokszámsorozat: 0, 1, 1, 2, 3, 4, 5.
Realizálható-e?
A kérdés megfogalmazható egy fejtörőként:
Felveszünk 7 csúcsot és mellé írjuk a fokszámokat. Az éleket kell behúzgálnunk úgy, hogy a fokszámok minden csúcsnál megfelelőek legyenek. A fejtörő számítógépen meg is valósítható.

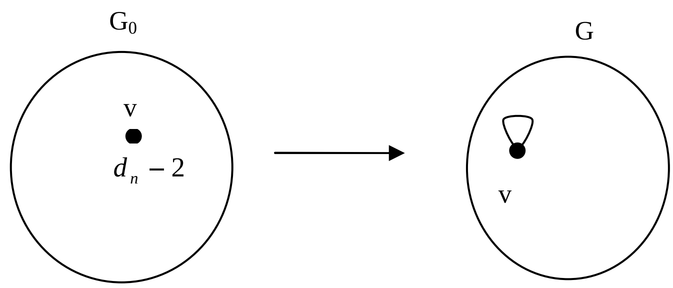


Észrevétel: $d_1,...,d_n \in N$ realizálható $\Leftrightarrow$ $\sum d_i$ páros

- $\Rightarrow$ $\sum_{x \in V} d(x) = 2|E|$ (fokszámok alaptétele)
- $\Leftarrow$
  A formális bizonyítás teljes indukció:

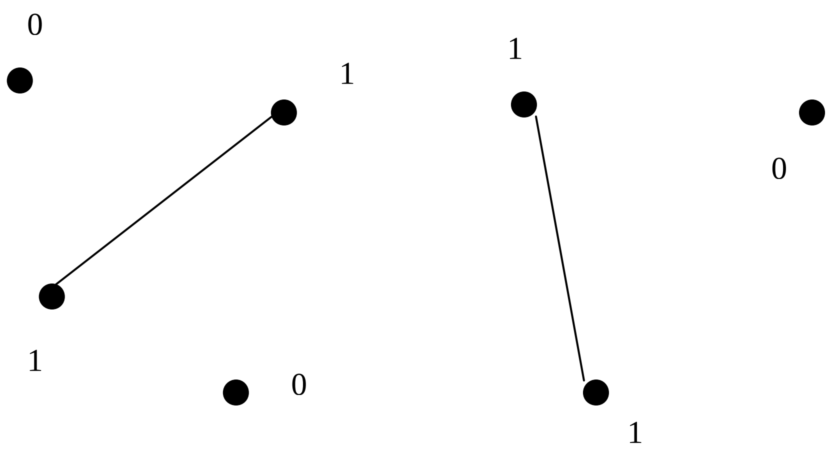
A kiinduló sorozatokat a 2. eset írja le. Ha a sorozatunk nem ilyen, akkor az 1. eset szerint végezzük az indukciós lépést.

- 1. eset:
  Tegyük fel, hogy $d_n \geq 2$ ($\Leftrightarrow$ létezik legalább „2” a sorozatban $\Leftrightarrow$ nem csupa 0, 1 sorozat)
  Realizáljuk $d_1,...,d_{n-1},d_n - 2$ sorozatot G_0 gráffal (G_0 gráfra előírt fokszámok összege kisebb páros szám).
  Teszünk v csúcsra egy hurokélt, és az így kapott G gráf realizálja a $d_1,...,d_n$ sorozatot.



- 2. eset:
  $d_i \in \{0,1\}$ $\sum d_i$ páros $\Leftrightarrow$ páros sok 1-es van

$\{d_i\}$ párosítással realizálható.



■

Megj: Egy másik lehetőség az, hogy rekurzív algoritmussá rakjuk össze a fenti ötleteket.

A bizonyítás erősen használta a hurokéleket. Mikor, hogyan realizálhatunk hurokélek nélkül?

Lemma: Legyen G gráf V csúcshalmazának részhalmaza A ($A \subseteq V$). Ekkor

$$\sum_{u \in A} d(u) = 2e(A) + e(A, V \setminus A),$$

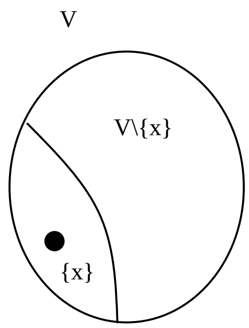
Ahol $e(A)$ az A halmaz csúcsai közötti élek száma, és $e(A, V \setminus A)$ az A és a V\A közti élek száma.

Ennek bizonyítása a fokszámok alaptételének bizonyításához hasonlóan történhet.

<u>1. Tétel:</u> $d_1,...,d_n \in N$ realizálható hurokélmentes gráffal $\Leftrightarrow$ $\sum d_i$ páros és $d_n \leq \sum_{i=1}^{n-1} d_i$.

<u>Bizonyítás:</u>

- $\Rightarrow$ Veszünk a V csúcshalmazból egy x kitüntetett csúcsot.



Hány {x}-(V\{x}) él van? A válasz d(x), mivel G hurokélmentes.

Másrészt a lemma alapján : |{x}-(V\{x}) él|≤ $\sum_{v \in V\setminus\{x\}} d(v)$

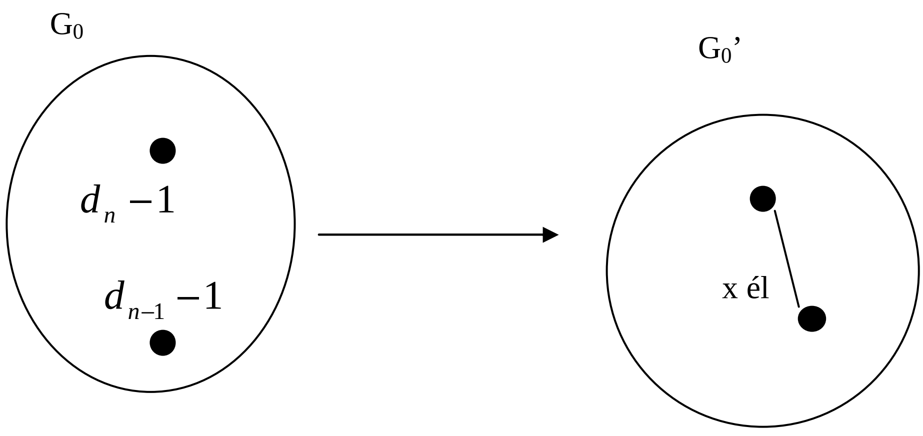
Ez nyilvánvalóan teljesül, ha x foka nem d_n (a legnagyobb fokszám). A tétel feltétele éppen d(x)= d_n esetre írja fel a szükséges egyenlőtlenséget.

- $\Leftarrow$
  - <u>1. eset</u>

    $d_{n-2} < d_n$ ($\Rightarrow$ $1 \leq d_{n-1} \leq d_n$)

    Indukció

    Vegyük a $d_1, d_2,..., d_{n-2}, d_{n-1} - 1, d_n - 1$ sorozatot. Erre a sorozatra is teljesül a lemma feltétele (vegyük észre, hogy $d_{n-1} - 1$ és $d_n - 1$nem biztos, hogy nagyobb d_{n-2}-nél, viszont $d_n - 1$ az egyik maximális fok a feltétel miatt). Legyen egy realizáló gráfunk G_0.



    Ha a $d_{n-1} - 1$ és $d_n - 1$ fokszámú csúcsok közé behúzunk egy x élt, akkor a feltételnek megfelelő hurokélmentes gráfot kapunk.

  - <u>2. eset</u>

    $d_{n-2} = d_n = D \geq 2$

    A fokszámsorozat $d_1, \ldots, d_{n-3}, D, D, D$.

    A $d_1, \ldots, d_{n-3}, d_{n-2} - 1, d_{n-1} - 1, d_n$ sorozattal megismételjük az 1. eset gondolatmenetét.

- <u>3. eset</u>

  $d_i \in \{0,1\}$, $\{d_i\}$ realizálható az első Észrevételben leírt módon. A párosítás nem igényel hurokéleket.

■

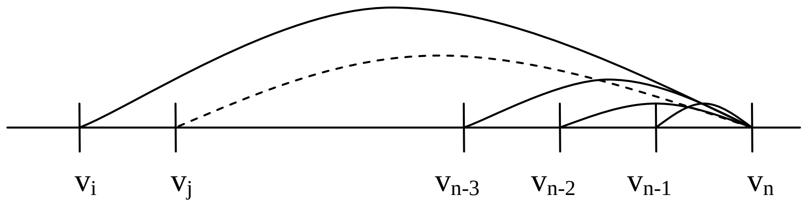
<u>2. Tétel:</u> Tegyük fel, hogy $d_1 \leq \ldots \leq d_n$ realizálható G egyszerű gráffal. Ekkor a G realizáló egyszerű gráf ($v_i \in V$ foka d_i) választható úgy, hogy v_n szomszédai $v_{n-1}, v_{n-2}, \ldots, v_{n-d_n}$ legyen.

<u>Bizonyítás:</u>

v_1 v_2 v_3 … v_n

o o o o

R a $\{d_i\}$ sorozatot reprezentáló egyszerű gráfok közül az, amelyikben v_n szomszédainak indexeinek összege maximális. Ha R a tétel feltételeinek eleget tesz, akkor készen vagyunk. Ha nem, akkor alkalmas i<j indexekre v_i szomszéd, de v_j nem:

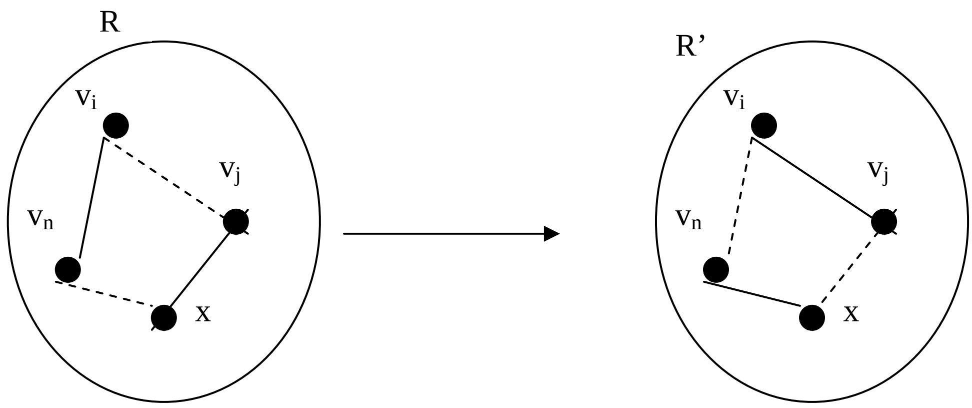


$d(v_i) = d_i \leq d_j = d(v_j)$

Létezik v_j-nek olyan x szomszédja, amely v_i-nek nem szomszédja, hiszen:

- Ha $d_i < d_j$, akkor triviálisan igaz
- Ha $d_i = d_j$, csak akkor nem teljesülne az állítás, ha v_j-nek és v_i-nek is azonos szomszédai lennének, de v_i-nek szomszédja a v_n, de v_j-nek nem szomszédja.

Az alábbi átalakítás a fokszámokon nem változtat, azaz R' is realizálja fokszámainkat.



Így tudjuk v_n szomszédságát „jobbra mozgatni”, R' ellentmond R választásának.

■

<u>Megj.:</u> A bizonyítás felhasználható algoritmus tervezésére az egyszerű gráffal realizálhatóság eldöntésére, illetve algoritmus tervezésére realizáló egyszerű gráf keresésére.

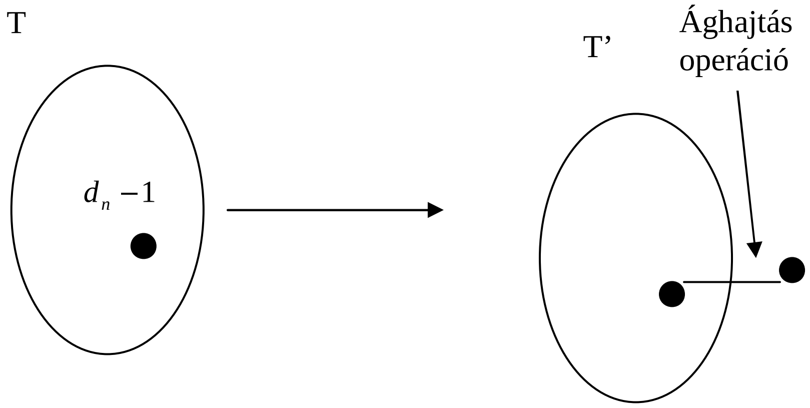
Tétel: $d_1,\dots,d_n$ ($n \geq 3$) realizálható fával $\Leftrightarrow$ $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1)$ $(1 \leq d_1)$

Bizonyítás:

- $\Rightarrow$ Ha G egy n pontú fa, akkor (n-1) éle van, és mivel a fokok összege az élek számának kétszerese, így a tétel ezen iránya teljesül.
- $\Leftarrow 1 < \frac{\sum d_i}{n} < 2$

A fenti egyenlőtlenségből következik, hogy $\exists i \;\; d_i \geq 2 = \lceil \acute{a}tlagfok \rceil \Leftrightarrow d_n \geq 2$, továbbá $\exists i$ $d_i \leq 1 = \lfloor \acute{a}tlagfok \rfloor \Leftrightarrow d_1 = 1$. Vagyis a fokszámsorozat a következő: $1, d_2,\dots,d_n$

Realizáljuk a $d_2,\dots,d_{n-1}, d_n - 1$ sorozatot egy T fával (rövidebb sorozat és feltételeink erre is teljesülnek).



Az ábrán látható operációt elvégezve a kapott T' fa (T-ből ághajtással nyert gráf) az eredeti fokszámsorozatot realizálja.

Ötleteink formális bizonyítássá alakítása ismét teljes indukcióval történhet. A kiinduló eset az 1,1 fokszámsorozat.

■

A realizációk nem egyértelműek, további kérdések vethetők fel. Például: az összes realizációs lehetőség megtalálása, ezek számának meghatározása.