Diszkrét Matematika GYAKORLAT, Levelező MSc hallgatók számára

4. Feladatsor

Gyakorlatvezető: Hajnal Péter 2011. november 2-ától

1. Gráfok színezései

1.1. Alapok

1. Feladat. *Színezzük ki a síkot hét színnel úgy, hogy egységnyi távolságú pontok különböző színűek legyenek.*

2. Feladat. *Az* $1, 2, \ldots, n$ *természetes számokat úgy akarjuk beosztani valahány osztályba, hogy egyik osztályban se legyen együtt egy szám és a kétszerese. Legalább hány osztályra van szükségünk?*

3. Feladat. *Állapítsuk meg az alábbi ábrán látható gráfok kromatikus számait:*

4. Feladat. *Definiáljuk a következő egyszerű gráfot: A gráf csúcsai egy sakktábla mezői; két csúcsot összekötünk, ha az egyik által reprezentált mezőről egy*

a) huszár

b) király

c) bástya

szabályos lépéssel a másik csúcs által reprezentált mezőre léphet. Az egyes esetekben mi a kapott gráf kromatikus száma?

5. Feladat. *Az* $1, 2, \ldots, n$ *természetes számokat úgy akarjuk kiszínezni, hogy a relatív prímszámok különböző színt kapjanak. Legalább hány színre van szükségünk?*

6. Feladat. *Legalább hány csoportba kell beosztanunk az első száz pozitív egész számot, ha azt akarjuk, hogy egyetlen csoportban se legyen két olyan szám, amelyek egyike többszöröse a másiknak?*

7. Feladat. *Legalább hány szín kell a* 100×100 *méretű tábla mezőinek színezéséhez, ha azt akarjuk, hogy*

a) semelyik két, egymástól 6 távolságra lévő mező se legyen ugyanolyan színű? (Két mező szomszédos, ha van közös oldaluk; két mező közti távolság az a minimális lépésszám, amivel az egyikről a másikra juthatunk, ha egy lépéssel egy mezőről egy tetszőleges szomszédos mezőre léphetünk.)

b) tetszőleges „L alak" által lefedett négy mező színe különböző legyen? (Egy L alak négy mezőjét úgy kapjuk meg, hogy egy sor három egymásután következő mezőjéhez hozzávesszük valamelyik szélső mező valamelyik oszlop-szomszédját, vagy pedig egy oszlop három egymásután következő mezőjéhez hozzávesszük valamelyik szélső mező valamelyik sor-szomszédját.)

8. Feladat. *Egy egyenesen felveszünk $2^n + 1$ pontot. Az általuk meghatározott $\binom{2^n+1}{2}$ szakasz mindegyikére mint átmérőre egy kört rajzolunk. A körök mindegyikét kifestjük adott n szín valamelyikével. Bizonyítsuk be, hogy található két, egymást kívülről érintő kör, amelyek ugyanolyan színűek.*

Mi a helyzet, ha csupán 2^n darab pontból indulunk ki?

9. Feladat. *Egy egyenesen felveszünk N pontot, és az általuk meghatározott $\binom{N}{2}$ szakasz mindegyikére mint átmérőre kört rajzolunk. A köröket szeretnénk úgy kiszínezni, hogy ne legyen két olyan azonos színű kör, amelyek körlapja (a határpontokat is beleértve) diszjunkt. Mi a szükséges színek minimális száma?*

Mi a szükséges színek minimális száma, ha a színezésre tett feltételt a következőkkel helyettesítjük:

- *Ne legyen két olyan azonos színű kör, hogy az egyik által meghatározott körlap része a másik körlapnak.*
- *Ne legyen két olyan azonos színű, egymást érintő kör, amelyeknél az érintési pont mindkét körnek az egyenesen lévő, legjobban balra eső pontja.*
- *Ne legyen két azonos színű metsző kör. (Két kör metsző, ha kerületüknek pontosan két közös pontja van.)*

10. Feladat. *Egy körön felveszünk N pontot, és behúzzuk az általuk meghatározott $\binom{N}{2}$ zárt szakaszt.*

a) A szakaszokat kiszínezzük úgy, hogy ne legyen két azonos színű metsző szakasz. (Két szakasz metszi egymást, ha van közös belső pontjuk.) Határozzuk meg a szükséges színek minimális számát.

b) Mi lesz ez a szám, ha a színezésre azt kötjük ki, hogy ne legyen két azonos színű közös végponttal rendelkező szakasz?

11. Feladat. *a) Bizonyítsuk e, ha egy G gráfban van k pont úgy, hogy mindegyik össze van kötve a másikkal, akkor $\chi(G) \geq k$.*

b) Egy G gráfban nincs $k+1$ pont úgy, hogy bármely kettő össze van kötve. Igaz-e, hogy a G gráf k színnel jól színezhető?

c) Egy G gráfban nincs háromszög (három pont úgy, hogy bármely kettő össze van kötve). Mit mondhatunk G kromatikus számáról?

12. Feladat. *Egy G gráfban nincs két olyan e és f él, amelyek végpontjai egy négyelemű halmazt alkotnak, és ezen a halmazon belül csak az e és az f él halad.*

Tudjuk, hogy G-ben nincs $k+1$ pont, amelyek mindegyike össze lenne kötve egymással. Adjunk becslést G kromatikus számára.

13. Feladat. *a) Legyen G egy gráf, amely kromatikus száma k. Vegyük egy optimális színezéset. Ekkor bármely két különböző felhasznált színhez van olyan él, amely két végpontja a kiválasztott*

b) Legyen G egy hurokél-nélküli gráf, amely élszáma kevesebb mint $\binom{k+1}{2}$. Ekkor G k-színezhető.

1.2. Mohó színezési algoritmus

14. Feladat. *Legyen π a gráf pontjainak egy sorbaállítása. A pontokat ezen sorbaállítás szerinti sorrendben kiszínezzük a pozitív egész számokkal. Az első pont az 1 színt kapja. Az i-edik pont színe a szóba jövő minimális szám (azaz az a minimális szám, ami nem fordul elő a vizsgált csúcs már színezett szomszédai színeként). Legyen $\chi_{mohó,\pi}(G)$ a G gráf színezéséhez felhasznált színek száma.*

a) Bizonyítsuk be, hogy minden G gráf esetén van a gráf pontjainak olyan π sorbaállítása, hogy
$$\chi_{mohó,\pi}(G) = \chi(G).$$

b) Mit mondhatunk az eljárásról, ha π-t nem mi választjuk?

15. Feladat. *Bizonyítsuk be, egy n pontú G gráf esetén pontjainak tetszőleges π sorbaállítására*
$$\chi_{mohó,\pi}(G) \leq \left\lfloor \frac{n+\chi(G)}{2} \right\rfloor.$$

16. Feladat. *Egy gráfban minden pont foka legfeljebb D. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \leq D+1$.*

17. Feladat. *Határozzuk meg azokat a gráfokat, amelyek minden pontjának foka legfeljebb 2, és nincs jó színezése két színnel.*

18. Feladat. *A síkon véges sok egységoldalú négyzetet helyezünk el úgy, hogy oldalaik a koordinátatengelyekkel párhuzamosak. A sík bármely pontját legfeljebb két négyzetlap fedi. Mutassuk meg, hogy a négyzetlapok beoszthatók legfeljebb három csoportba úgy, hogy minden csoportban páronként közös pont nélküli négyzetlapok legyenek.*

19. Feladat. *Egy sakkedzésen minden játékos legfeljebb k pontot szerzett. (Döntetlenért fél pont, győzelemért egy pont jár.) Bizonyítsuk be, hogy ekkor*

a) van olyan játékos, aki legfeljebb $2k$ mérkőzést játszott,

b) a játékosok elhelyezkedhetnek legfeljebb $2k+1$ teremben úgy, hogy az azonos terembe kerülő játékosok nem játszottak egymással.

20. Feladat. *Húzzunk a síkon néhány egyenest úgy, hogy semelyik három se haladjon át közös ponton. Bizonyítsuk be, hogy a keletkező metszéspontok kiszínezhetők három színnel úgy, hogy ha két metszéspont egy behúzott egyenesen van, és nincs köztük másik metszéspont, akkor különböző színűek legyenek.*

1.3. Síkgráfok színezése

21. Feladat. *Húzzunk a síkon néhány egyenest. Bizonyítsuk be, hogy a keletkező tartományok kiszínezhetők két színnel úgy, hogy a szomszédos tartományok különböző színűek legyenek. (Két tartomány szomszédos, ha van közös határoló szakaszuk.)*

22. Feladat. *A síkot néhány kör tartományokra osztja. Bizonyítsuk be, hogy a tartományok kiszínezhetők két színnel úgy, hogy a szomszédos tartományok különböző színűek legyenek.*

23. Feladat. *Egy országban kör alakú autópályákat építettek úgy, hogy semelyik két kör se érintse egymást. Bizonyítsuk be, hogy az autópályák kereszteződéseiben létesíthetők kétszintű kereszteződések úgy, hogy tetszőleges autópályán körbehaladva a felső, illetve alsó szintek váltakozzanak.*

24. Feladat. *Ha egy síkgráf minden foka páros, akkor országai kiszínezhetők két színnel úgy, hogy bármely két szomszédos ország különböző színű.*

25. Feladat. *Létezik-e olyan síkgráf, amely minden csúcsának foka páros, továbbá amelynek egy ötszögtartománya van, és az összes többi tartománya háromszög?*

26. Feladat.

a) *Adjunk meg olyan térképet, amelyben van négy olyan ország, amelyek közül bármely kettő szomszédos.*

b) *Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan térkép, amelyben lenne öt olyan ország, amelyek közül bármely kettő szomszédos.*

27. Feladat. *Legyen G egy egyszerű síkgrág. Igazoljuk, hogy*

a) *van legfeljebb ötödfokú csúcsa.*

b) *jól kiszínezhető hat színnel.*

1.4. Színezések összeszámlálása

28. Feladat. *Határozzuk meg, hogy a következő gráfoknak az $\{1, 2, \ldots, k\}$ színekkel hányféle jó színezése lehetséges.*

a) P_n,

b) T_n *egy* n *csúcsú fa,*

c) C_n,

d) K_n,

e) $K_{n,m}$.