Diszkrét Matematika GYAKORLAT, Levelező MSc hallgatók számára

3. Feladatsor

Gyakorlatvezető: Hajnal Péter 2011. november 2-ától

1. Párosítások gráfokban

1.1. Alapok

1. Feladat. *(i) Bizonyítsuk be, hogy $\nu(G) = \nu(G^0)$, ahol G^0 a G gráf egyszerűsítettje, azaz az az egyszerű gráf, amit G-ből a hurokélek elhagyásával és párhuzamos élseregek egy-egy élének meghagyásával kapunk.*

(ii) Legyenek C_i $(i = 1, \ldots, k)$ a G gráf komponensei. Bizonyítsuk be, hogy $\nu(G) = \sum_{i=1}^{k} \nu(C_i)$.

2. Feladat. *Egy matematikai lap n számú $(n \geq 2)$ feladatot közöl. Ugyancsak n számú olvasó mindegyike két feladat megoldását küldi be oly módon, hogy az n számú feladat mindegyikére két különböző megoldás (összesen tehát $2n$ megoldás) érkezik be. A szerkesztő minden beküldőnek egy megoldását (összesen tehát n megoldást) akar közölni lapjában. Lehetséges-e ez mindig?*

Bizonyítsuk be, ha az n számú megoldást a feltételeknek megfelelően k-féleképpen lehet kiválasztani, akkor $k = 2^\nu$, ahol ν egy pozitív egész számot jelent!

A fenti feladat Kőnig Dénes (a világ első gráfelméleti monográfiájának szerzője) feladata, 1926-ban a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapokban jelent meg. Az egyik helyes megoldó Hajós György volt.

3. Feladat. *Legyen G egy $2n$ pontú egyszerű gráf, amelyben minden pont foka legalább n. Igazoljuk,hogy G-ben van teljes párosítás. Igaz marad-e az állítás, ha a fokokról csak azt tudjuk, hogy minden csúcs esetén legalább $n-1$?*

4. Feladat. *(o) n játékos egyfordulós sakkversenyt szeretne megszervezni (mindenki mindenkivel pontosan egyszer játszik) úgy, hogy egy nap egy versenyző csak egyszer játsszon. Mi az a lehető legrövidebb idő, amely alatt a bajnokság a fenti feltételek mellett megrendezhető?*

(i) Igazoljuk, hogy K_{2n} (a $2n$ pontú teljes gráf) élhalmaza felbontható $n-1$ éldiszjunkt teljes párosítás uniójára.

(ii) K_{2n+1}-ben (a $2n+1$ pontú teljes gráfban) egy n élű párosítást nevezzünk majdnem teljes párosításnak. Igazoljuk, hogy K_{2n+1} élhalmaza felbontható $2n$ darab majdnem teljes párosítás diszjunkt uniójára.

5. Feladat. *Bizonyítsuk be, ha egy összefüggő, egyszerű G gráfra $\nu(G) = 1$, akkor G egy csillag vagy egy háromszög.*

6. Feladat. *Határozzuk meg a következő gráfok ν paraméterét:*

$$K_n, K_{n,m}, C_n, P_n, W_n.$$

7. Feladat. *a) Legyen $M, N \subset E(G)$ két párosítás G-ből. Bizonyítsuk be, hogy $M \cup N$ pontdiszjunkt utakból és páros hosszú körökből áll.*

b) Legyen $M, N \subset E(G)$ két teljes párosítás G-ből. Bizonyítsuk be, hogy $M \cup N$ pontdiszjunkt élekből és páros hosszú körökből áll.

8. Feladat. *Bizonyítsuk be, ha egy G gráfra $\nu(G) = k$, akkor a G gráf $2k + 1$-színezhető.*

9. Feladat. *Bizonyítsuk be, ha egy $2n$ pontú G gráf minden pontjának legalább n a foka, akkor G-ben van teljes párosítás.*

1.2. Párosítások összeszámlálása

Definíció. $n_k(G)$ jelölje a k elemű párosítások számát G-ben.

10. Feladat. *Határozzuk meg az $n_k(G)$ számokat, ha*

(i) $G = C_n$,

(ii) $G = K_n$,

(iii) G egy egyszerű páros gráf az $\{u_1, \ldots, u_n\}$ és $\{v_1, \ldots, v_n\}$ színosztályokkal, amelyben u_i és v_j akkor és csak akkor összekötött, ha $i < j$.

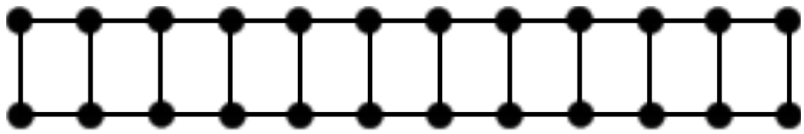
11. Feladat. *Határozzuk meg a következő gráfokban a teljes párosítások számát:*

(i) K_n,

(ii) $K_{n,n}$,

(iii) $K_{n,n}$-ből hagyjuk el egy teljes párosítás éleit.

(iv) L_n az n fokú létra-gráf. L_{12}-et az alábbi ábra szemlélteti (ebből az általános leírás kitalálható, könnyen megfogalmazható):



L_{12}

1. ábra.

12. Feladat. *Adjunk meg olyan gráfokat, amelyekben pontosan egy teljes párosítás van.*

13. Feladat. *Hányféleképpen lehet egy $2n \times 2n$-es sakktábla mezői közül kiválasztani n fehéret és n feketét úgy, hogy minden sorban és oszlopban egy kiválasztott mező legyen?*

14. Feladat. *Adott egy végtelen négyzethálós papír. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges n-re létezik olyan (nem feltétlenül konvex) sokszög, amelynek oldalai a rácsegyeneseken haladnak, 2×1-es és dominókkal lefedhető és a lehetséges lefedések száma éppen n.*

1.3. Mohó párosítási algoritmus

15. Feladat. *Az expedíció útra készen áll, néhány csomagot még el kellene helyezniük az útiládákban. Sokat bajlódnak, mert a parancsnok nem engedi, hogy hozzányúljanak az előző napokban ládákba rakott dolgokhoz. A próbálkozások során kiderül, hogy bármely csomag egy láda kivételével, bármely ládában elfér; továbbá bármelyik ládában elhelyezhető valamelyik csomag.*

a) Sikerülhet-e minden csomagot magukkal vinniük, ha a ládák és a csomagok száma egyenlő?

b) Adjunk egy eljárást, amellyel a csomagolás véghezvihető.

16. Feladat. *Egy konferencián száz résztvevő van. Mindegyik több nyelvet ismer. Bárhogyan is választunk ki három résztvevőt, ezek egymás között elboldogulnak tolmács nélkül. Bizonyítsuk be, hogy a résztvevők ötven kétágyas szobába elhelyezhetők úgy, hogy az egyes szobákba kerülők beszéljenek közös nyelvet.*

17. Feladat. *Legyen $\nu_{mohó,\pi}(G)$ a mohó algoritmus által megtalált független élhalmaz számossága (ahol π az algoritmus által követett élsorrend). Igazoljuk, hogy ekkor az élek tetszőleges π sorbaállítása esetén*

$$\nu(G) \geq \nu_{mohó,\pi}(G) \geq \frac{\nu(G)}{2}.$$

18. Feladat. *Egy 6×6-os sakktáblára néhány dominót helyeztünk úgy, hogy mindegyik pontosan két szomszédos mezőt fed le. Bizonyítsuk be, ha 14 mező lefedetlen, akkor legalább még egy dominó a táblára helyezhető a többi elmozdítása nélkül.*

19. Feladat. *Egy $n \times n$-es sakktáblára 2×1-es dominókat szeretnénk lerakni úgy, hogy egy dominó két mezőt fedjen le. Célunk az, hogy minél több dominót tudjunk elhelyezni. Teljesen véletlenül rakjuk le a dominókat addig, amíg el nem akadunk. Bizonyítsuk be, hogy legfeljebb $n^2/3$ mező marad lefedetlen.*

1.4. Párosítások páros gráfokban

20. Feladat. *Legyen G egy páros gráf, amelyben a felső és az alsó pontok száma megegyezik. Kőnig-akadálynak nevezzük az alsó pontok egy olyan halmazát, amely szomszédságának elemszáma kevesebb, mint a halmazé. Természetes, hogy ennek a fogalomnak megvan a felső pontokra vonatkozó megfelelője. Ezt nevezhetjük felső Kőnig-akadálynak (míg az eredeti fogalom lehet alsó Kőnig-akadály). Tudjuk, hogy teljes párosítás akkor és csak akkor van G-ben, ha nincs alsó Kőnig-akadály. Mivel a felső és az alsó pontok szerepe azonos, ezért ezzel az is ekvivalens, hogy nincs felső Kőnig-akadály. Kaptuk, hogy alsó Kőnig-akadály és felső Kőnig-akadály létezése ekvivalens egy olyan páros gráfban, ahol a felső pontok száma azonos az alsó pontok számával.*

Igazoljuk ezt az állítást a párosításokra vonatkozó tételeinkre való hivatkozás nélkül.

21. Feladat. *A pontszámra vonatkozó indukcióval igazoljuk, hogy egy egyenlő színosztályokkal rendelkező páros gráfban akkor és csak akkor van teljes párosítás, ha nem tartalmaz sem alsó, sem felső Kőnig-akadályt.*

22. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy egy G páros gráf csúcsai közül kijelölhetünk $\nu(G)$ darab csúcsot úgy, hogy az összes él ezek valamelyikét tartalmazza, de $\nu(G)-1$ fenti tulajdonságú csúcs már nem jelölhető ki.*

23. Feladat. *Egy $n \times n$-es mátrix minden eleme nemnegatív, és minden sorában, illetve minden oszlopában az elemek összege 1. Bizonyítsuk be, hogy a mátrixból kiválasztható n darab nem 0 elem úgy, hogy minden sorból, illetve oszlopból egy elemet választunk ki.*

24. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy egy r-reguláris ($r > 0$) páros gráfban mindig van teljes párosítás.*

25. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy egy r-reguláris páros gráf élei kiszínezhetők r színnel úgy, hogy tetszőleges pontba befutó élek különböző színűek legyenek.*

26. Feladat. *Egy szigeten n házaspár lakik. Mindegyik házaspár egyik tagja vadász, a másik pedig földművelő. A Vadászati Minisztérium a szigetet n egyenlő, egyenként A területű vadászati területre osztotta. Ettől függetlenül a Földművelési Minisztérium a szigeten n darab egyenlő földművelési területet jelölt ki. A Házasságügyi Minisztérium ragaszkodik ahhoz, hogy egy házaspár egy-egy tagjához rendelt vadászati, illetve földművelési terület közel legyen egymáshoz. Mindenki nagy meglepetésére a Kiutalási Minisztérium olyan elosztást tud találni, hogy minden házaspár esetén a két kijelölt földnek legyen közös része. A Vallási Minisztérium ezt a tényt csodának kiáltja ki.*

a) Mutassuk meg, hogy szó sincs csodáról. Bizonyítsuk be, van olyan, csak n-től függő δ_n szám, hogy bárhogyan is osztja fel a szigetet a Vadászati és a Földművelési Minisztérium, a Kiutalási Minisztérium eloszthatja a földeket úgy, hogy mindegyik pár két területének legalább $\delta_n A$ közös területe legyen.

b) Határozzuk meg δ_n maximális értékét.

1.5. Párosítások általános gráfokban

27. Feladat. *Igazoljuk, hogy egy G kétszeresen élösszefüggő 3-reguláris gráf*

a) pontszáma páros,

b) kétszeresen összefüggő,

c) taltalmaz teljes párosítást.

Adjunk példát amely azt mutatja, hogy a kétszeres élösszefüggőség feltétele nélkül az állítás nem igaz.

28. Feladat. *Legyen*

$$D_G = \{x \in V(G) :\ G\text{-ben van } x\text{-et elkerülő optimális párosítás}\},$$

$$A_G = N(D_G) = D_G \text{ szomszédainak halmaza},$$

$$C_G = V(G) - (D_G \cup A_G),$$

a $V(G)$ ponthalmaz csak G-től függő három diszjunkt halmazra való felosztása.

Legyen G egy gráf egy M optimális/maximális elemszámú párosítással. Futassuk az Edmonds-algoritmust, amely sikertelen kereséssel áll le: Egy — esetleg G-ből többszörös zsugorítással kapott — gráfban az aktuális külső pontok K halmazában nincs él, továbbá K-ból nem vezet él címkézetlen csúcsokhoz (azaz $V_{aktuális} - (K \cup B)$-hez, ahol B az aktuális belső pontok halmaza).

Igazoljuk, hogy

a) Azon pontok halmaza G-ben, amelyek a zsugorítások során K egy elemére képződnek éppen D_G.

b) Azon pontok halmaza G-ben, amelyek az egész algoritmus során belső pontok maradnak (azaz B elemei) éppen A_G.

c) Azon pontok halmaza G-ben, amelyek az egész algoritmus során címkézetlenek maradnak (azaz B elemei) éppen A_G.

Azaz speciálisa az a)-c) pontokban leírt, látszólag az Edmonds-algoritmus futásától (amelyben sok nem-determinisztikus elem van) függő három halmaza igazán nem függ az algoritmus során tett döntéseinktől.

29. Feladat. *(folytatás) Igazoljuk, hogy*

a) $G|_{D_G}$ komponensei faktor-kritikusak, azaz nincs bennük teljes párosítás, de bármelyik pontjuk elhagyása után már lesz bennük.

b) Legyen S az a páros segédgráf, amely egyik színosztályának elemei A_G pontjai, másik színosztályának elemei $G|_{D_G}$ komponensei; élei a D_G és A_G közti élek (természetes illezkedéssel: xy él ($x \in D_G$, $y \in A_G$) esetén a két végpont y, illetve X komponense $G|_{D_G}$-ben. Ekkor az S páros gráf elemi, azaz minden $X \subset A_G$ halmaznak legalább $|X| + 1$ szomszédja van.

c) $G|_{C_G}$-ben van teljes párosítás.

30. Feladat. *Legyen G egy pont-tranzitív összefüggő gráf (azaz $\mathbb{A}ut(G)$, G automorfizmus csoportja tranzitíven hat $V(G)$-n, azaz minden $u, v \in V(G)$ esetén található olyan automorfizmusa G-nek, amley u-t v-be viszi). Igazolkjuk, hogy G-ben van teljes párosítás vagy majdnem teljes párosítás (azaz olyan párosítás, amley egyetlen csúcsot hagy párosítatlan).*