Diszkrét Matematika GYAKORLAT, Levelező MSc hallgatók számára

2. Feladatsor

Gyakorlatvezető: Hajnal Péter 2011. október 11-étől

1. Magasabbfokú összefüggőség

1.1. Kétszeres élösszefüggőség

Definíció. Egy G gráf kétszeresen élösszefüggő, ha összefüggő és bármelyik élet elhagyva összefüggő marad.

1. Feladat. *Igazoljuk, hogy egy kör e élére G-ben és $G-e$-ben ugyanaz az elérhetőség reláció. Továbbá, ha az e él egyetlen körnek sem éle, akkor G és $G-e$ elérhetőség relációi különböznek.*

2. Feladat. *Ha G és $G-e$ elérhetőség relációi különbözőek, akkor $G-e$-beli elérhetőség reláció osztályai a G-beli osztályokat finomítják. Továbbá a finomodás egyetlen osztály két részre oszlása.*

3. Feladat. *G akkor és csak akkor kétszeresen élösszefüggő, ha összefüggő és minden élén halad át kör.*

4. Feladat. *Igazoljuk,hogy két éldiszjunkt úttal való összeköthetőség egy ekvivalenciareláció.*

5. Feladat. *G akkor és csak akkor kétszeresen élösszefüggő, ha bármely két pontját összeköti két éldiszjunkt út.*

Definíció. Legyen G egy gráf és x, y két csúcsa ($x = y$ előfordulhat). Vegyünk fel egy x-ből induló xz utat, amelynek x az egyetlen G-beli csúcsa. (Elképzelhető, hogy z is G-beli, ha P egy 0 hosszú út és így $x = z$.) Kössük össze z-t y-nal egy új él segítségével. Az így kibővített P út egy út marad, ha $x \neq y$ és egy kör, ha $x = y$. Ha ezt az utat, illetve kört G-hez adjuk, és így egy $\widehat{G}$ gráfhoz jutunk, ekkor azt mondjuk, hogy egy fület ragasztottunk G-hez.

A fül a bővítő út, illetve kör. Az előbbi esetben azt mondjuk, hogy a fül nyilt, míg a másik esetbe zárt.

6. Feladat. *Igazoljuk, hogy ha G kétszeresen összefüggő, akkor a belőle fülragasztással kapott $\widehat{G}$ is az.*

7. Feladat. *Induljunk ki egy 1 csúcsú, 0 élű gráfból. Ismételt fülrgasztásokkal építsünk fel egy G gráfot. Igazoljuk, hogy G kétszeresen élösszefüggő.*

8. Feladat. *Legyen G egy tetszőleges kétszeresen élösszefüggő gráf. Igazoljuk, hogy az egy 1 csúcsú, 0 élű gráfból kiindulva ismételt fülragasztásokkal felépíthetjük a G gráfot.*

Általában a felépítés sok módon elképzelhető. Igazoljuk, hogy minden felépítés esetén ugyanannyi fülragasztásra van szükségünk.

9. Feladat. *Legyen G egy kétszeresen élösszefüggő $n(\geq 2)$ pontú gráf, amely bármely élet elhagyva a kétszeresen élösszefüggőség megszűnik. Igazoljuk, hogy G-nek van legalább kettő 2 fokú csúcsa. Igazoljuk, hogy $n \leq |E(G)| \leq 2n-2$.*

10. Feladat. *Legyen G egy kétszeresen élösszefüggő gráf. Azt mondjuk, hogy az e és f élek hasonlók, ha egyenlők, vagy pedig elhagyásuk után a gráf nem lesz összefüggő.*

(i) Bizonyítsuk be , hogy ez a reláció egy ekvivalenciareláció.

(ii) Bizonyítsuk be, hogy egy F ekvivalenciaosztály elemei egy körön fekszenek.

(iii) Bizonyítsuk be, hogy $G-F$ komponensei kétszeresen élösszefüggő gráfok.

(iv) Bizonyítsuk be, hogy $G-F$ komponenseit egy ponttá összehúzva egy kört kapunk G-ből.

1.2. Erősen összefüggő irányított gráfok

Definíció. Egy $\overrightarrow{G}$ irányított gráf erősen összefüggő, ha minden x és minden y pontjára van x-ből y-ba vezető irányított út.

Azaz a gráf egy $\{x, y\}$ csúcspárjára két feltételt szab az erősen összefüggőség, szemben az összefüggőséggel, ami csak egy út létezését kívánja meg (hiszen a szimmetrikus elérhetőség reláción alapul).

Definíció. Egy gráf $\mathcal{V}$ vágása csúcsainak két nem üres, diszjunkt osztályba sorolása. Azaz $\mathcal{V} = (S, T)$, ahol $S \cap T = \emptyset$, $S \cup T = V(G)$ és $S, T \neq \emptyset$. S és T a vágás két oldala, partja.

$E(\mathcal{V})$, a vágás élhalmaza azon élek halmaza, amelyek két különböző partra eső csúcsot kötnek össze.

Ha az alapgráf irányított, akkor $E(\mathcal{V})$ élei két osztályba sorolhatók aszerint, hogy a vágás élei az S partról vezetnek a T partra, illetve fordítva.

Egy irányított gráfban $\mathcal{V}$ egy irányított vágás, ha a vágás éleinek fenti osztályozásánál az egyik osztály üres. Azaz a két part között vezető összes él ugyanabba az irányba vezet.

11. Feladat. *Igazoljuk, hogy egy erősen összefüggő gráfban nincs irányított vágás. Azt mondhatjuk, hogy egy irányított vágás megakadályozza az erősen összefüggőséget.*

Igazoljuk, hogy a fenti akadály egy univerzális akadály, azaz ha egy irányított gráfban nincs irányított vágás, akkor erősen összefüggő.

Definíció. Egy irányított $\overrightarrow{G}$ gráf élének van egy „be” és egy „ki” végpontja. Ha ezeket nem különböztetjük meg, akkor egy irányítatlan G gráfhoz jutunk.

Azt mondjuk, hogy G-t a $\overrightarrow{G}$ irányított gráfból kapjuk az élek irányításának elhagyásával/eldobásával. Fordítva $\overrightarrow{G}$ a G irányítatlan gráf egy irányítása.

Vegyük észre, hogy az irányítás elhagyása egyértelműen leírja eredményét. Az írányítás azonban (általában) sokféle módon végrehajtható.

12. Feladat. *Legyen $\overrightarrow{G}$ egy erősen összefüggő irányított gráf. Ekkor a belőle az élek irányításának elhagyásával nyert G gráf egy kétszeresen élösszefüggő gráf.*

Egy kétszeresen elösszefüggő gráf irányítható úgy, hogy erősen összefüggő legyen.

Definíció. Egy turnament egy teljes gráf irányítása. A turnament tranzitív, ha megszámozhatók csúcsai úgy, hogy minden él a kisebb számú csúcstól vezet a nagyobb számúhoz.

13. Feladat. *Igazoljuk, hogy tetszőleges turnamentben van irányított Hamilton-út.*

Igazoljuk, hogy minden nem-tranzitív turnamentben van irányított kör.

Igazoljuk, hogy minden erősen összefüggő turnamentben van irányított Hamilton-kör.

1.3. Kétszeres összefüggőség

Definíció. Egy G gráf kétszeresen (pont)összefüggő, ha összefüggő és bármelyik csúcsa elhagyása után is összefüggő marad, továbbá legalább három csúcsa van.

14. Feladat. *Legyen x egy elvágó pont a G gráfban ($G - x$-nek több komponense van mint G-nek). Mondhatunk-e valamit G és $G - x$ komponensei számának különbségéről?*

15. Feladat. *Igazoljuk, hogy ha G kétszeresen összefüggő, akkor a belőle egy nyilt fül ragasztásával kapott $\widehat{G}$ is az.*

16. Feladat. *Induljunk ki egy körből. Ismételt nyilt fülek ragasztásával építsünk fel egy G gráfot. Igazoljuk, hogy G kétszeresen összefüggő.*

17. Feladat. *Legyen G egy tetszőleges kétszeresen összefüggő gráf. Igazoljuk, hogy az egy körgráfból kiindulva ismételt nyilt fülragasztásokkal felépíthetjük a G gráfot.*

Általában a felépítés sok módon elképzelhető. Igazoljuk, hogy minden felépítés esetén ugyanannyi fülragasztásra van szükségünk.

18. Feladat. *Legyen G egy kétszeresen összefüggő gráf, és $u, v \in V(G)$. Bizonyítsuk be, hogy G irányítható úgy, hogy minden élét tartalmazza egy irányított uv út.*

Definíció. Egy G gráf *minimális kétszeresen összefüggő gráf*, ha kétszeresen összefüggő, és tetszőleges e éle esetén $G - e$ már nem kétszeresen összefüggő.

19. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy egy minimális kétszeresen összefüggő gráf egyszerű.*

20. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy egy kétszeresen összefüggő gráf akkor és csak akkor minimális, ha nincs olyan köre, amelynek két pontját nem a körön lévő él köti össze.*

21. Feladat. *Legyen G egy minimális kétszeresen összefüggő gráf. Legyen D a másodfokú pontok halmaza G-ben. Bizonyítsuk be, hogy*

(a) G egyszerű,

(b) G-nek nincs olyan köre, amelyen minden pont foka legalább 3 lenne,

(c) $G - D$-nek legalább két komponense van,

(d) $|D| \geq (|V(G)| + 4)/3$.

22. Feladat. *Legyen G egy minimális kétszeresen élösszefüggő egyszerű gráf. Bizonyítsuk be, hogy 2 fokú csúcsainak száma legalább $|(|V(G)| + 7)/4$.*

2. Háromszorosan összefüggő gráfok

23. Feladat. *Igazak-e a következő állítások?*

(a) Ha G összefüggő, és bármely három éle egy körön van, akkor G háromszorosan összefüggő.

(ii) Ha G háromszorosan összefüggő gráf, akkor bármely három éle egy körön van.

24. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy minden háromszorosan összefüggő gráf részgráfként tartalmazza K_4 egy felosztását. (Egy G gráf egy felosztásán az élein új pontok felvételével nyerhető gráfot értjük.)*

25. Feladat. *Egy gráf akkor és csak akkor háromszorosan összefüggő, ha egy kerék, vagy egy kerékből megkapható a következő két operáció ismételt alkalmazásával:*

(i) egy él hozzávétele,

(ii) egy legalább negyedfokú x pont helyettesítése az x' és x'' összekötött pontokkal, és x szomszédainak x'-vel vagy x''-vel való összekötése úgy, hogy x' és x'' foka is legalább 3 legyen.

3. Magasabbfokú összefüggőség

26. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy G akkor és csak akkor k-szorosan összefüggő, ha G^0, azaz G egyszerűsítettje is az.*

Legyen G egy k-szorosan élösszefüggő gráf. Bizonyítsuk be, hogy ekkor G^0 összefüggő, de nem feltétlenül kétszeresen összefüggő.

27. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy egy G gráf akkor és csak akkor k-szorosan élösszefüggő, ha minden $\emptyset \subsetneq X \subsetneq V(G)$ esetén $|\delta(X)| \geq k$, ahol $\delta(X)$ az X csúcshalmazt elhagyó élek halmaza, azaz pontosan azon éleket tartalmazza, amelyek egyik vége X-ben a másik vége X-en kívül van.*

28. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy a jegyzetben szereplő különböző fokú összefüggőségek közötti kapcsolatokat feltüntető ábrából nem következő implikációk nem is igazak.*

29. Feladat. *Igazoljuk, ha G k-szorosan összefüggő és e egy éle, akkor $G - e$ egy $k-1$-szeresen összefüggő gráf.*

30. Feladat. *Legyen G egy k-szorosan összefüggő gráf, és $v_1, v_2, \ldots, v_k$ tetszőleges k csúcsa G-nek. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan C kör G-ben, amely az összes v_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ ponton áthalad.*

31. Feladat. *Igazoljuk, hogy tetszőleges $A, B \subset V(G)$ esetén*

$$|\delta(A \cap B)| + |\delta(A \cup B)| \leq |\delta(A)| + |\delta(B)|.$$

32. Feladat. *Egy k-szorosan élösszefüggő G gráf minimális, ha tetszőleges élét elhagyva a kapott gráf már nem lesz k-szorosan élösszefüggő. Bizonyítsuk be, hogy egy minimális k-szorosan élösszefüggő gráf tartalmaz k fokú pontot.*

33. Feladat. *Legyen G egy egyszerű, összefüggő ponttranzitív gráf (azaz tetszőleges x, y csúcsokra G-nek van olyan automorfizmusa, amely x-et y-ba viszi). Bizonyítsuk be, hogy*

(a) *G reguláris (legyen d a közös fokszám),*

(b) *G d-szeresen élösszefüggő.*

(c) *Igaz-e, hogy G d-szeresen összefüggő is?*

3.1. Menger-tételei

34. Feladat. *Legyen $\overrightarrow{G}$ egy irányított gráf, amely x csúcsára $d^{ki}(x) = \ell, d^{be}(x) = 0$, y csúcsára $d^{ki}(y) = 0, d^{be}(y) = \ell$, de minden más csúcsra a befok és kifok megegyezik. Igazoljuk, hogy $\overrightarrow{G}$-ben létezik ℓ darab élszidjunkt irányított xy út.*

35. Feladat. *Legyen $\overrightarrow{G}$ egy irányított gráf, s és t két különböző csúcsa. Legyen $P_1, P_2, \ldots, P_k$ maximális számú éldiszjunkt itrányított st utak G-ben.*

Fordítsuk meg egyszerre az összes P_i út irányítását. Igazoljuk, hogy az így kapott $\overrightarrow{G}'$ gráfban nincs irányított st út.

36. Feladat. *A fenti feladat alapján igazoljuk Menger-tételét, azaz azt, hogy a fenti jelöléssel mellett $\overrightarrow{G}$-ben az éldiszjunkt irányított st utak maximális száma megegyezik az s és t csúcsokat elválasztó élhalmaz minimális méretével.*