Diszkrét Matematika GYAKORLAT, Levelező MSc hallgatók számára

1. Feladatsor

Gyakorlatvezető: Hajnal Péter 2011. szeptember 17-étől

1. Gráfelméleti alapismeretek

1.1. Fokszámok

Definíció. Egy G gráfbeli x csúcs fokát úgy kapjuk meg, hogy az x-re illeszkedő élek duplájához hozzáadjuk az x-re illeszkedő nem hurokélek számát. Azaz megszámoljukaz x-re illeszkedő éleket, de a hurokéleket 2 súllyal vesszük számba. Jelölése $d_G(x)$, illetve $d(x)$ (amennyiben nem akarjuk/szükséges hangsúlyozni az alapgráfot).

1. Feladat. *Igazoljuk, hogy egy gráfban a fokszámok összege az élszám duplája.*

Definíció. Egy G gráf reguláris, ha minden csúcsának ugyanannyi a foka. Ekkor, ha fokszámok a közös r értékét hangsúlyozni szeretnénk, akkor azt mondjuk, hogy G r-reguláris.

2. Feladat. *Milyen n, k számokra létezik n pontú k-reguláris gráf? Milyen n, k számokra létezik n pontú k reguláris egyszerű gráf?*

Definíció. Egy G gráf fokszámsorozatát úgy kapjuk, hogy az összes csúcsának fokát vesszük és nem csökkenő sorrendbe rendezzük.

3. Feladat. *Mikor lesz az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ természetes számok nemcsökkenő sorozata egy gráf fokszámsorozata?*

4. Feladat. *Igazoljuk, hogy az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ természetes számok nemcsökkenő sorozata pontosan akkor egy hurokél nélküli gráf fokszámsorozata, ha az a_i-k összeges páros és $a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} \geq a_n$.*

5. Feladat. * *Igazoljuk, hogy az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ természetes számok sorozata pontosan akkor egy egyszerű gráf fokszámsorozata, ha $a_1, a_2, \ldots, a_{n-a_n-1}, a_{n-a_n} - 1, a_{n-a_n+1} - 1, \ldots, a_{n-1} - 1$ is az (esetleg nemcsökkenő sorozatba rendezés után).*

6. Feladat. *A következő számsorozatok realizálhatók-e egy egyszerű gráf fokszámsorozatként?*

(i)

$$0, 1, 2, 2, 3, 3, 5, 5, 7.$$

(ii)

$$1, 1, 2, 4, 5, 5, 5, 7.$$

7. Feladat. *Legyen $a_1, a_2, \ldots, a_k$ és $b_1, b_2, \ldots, b_\ell$ egy páros gráf két színosztályában előforduló fokok. Mivel egyenlő az a_i-k összege?*

Definíció. Egy irányított gráf egy (V, E, K, B) négyes, ahol V csúcsok egy véges halmaza, E élek egy véges halmaza, K (ki-illeszkedés) és B (be-illeszkedés) pont-él relációk úgy, hogy minden élre egyetlen pont be-illeszkedik és egyetlen pont ki-illeszkedik. (Más szóhasználattal minden él egyetlen pontból fut ki és egyetlen pontba fut be.)

Definíció. Legyen $\vec{G}$ egy irányított gráf. x egy csúcsa. x kifoka ($d^{\text{ ki}}(x)$) azon élek száma, amelyek kifutnak x-ből. Hasonlóan x befoka ($d^{\text{ be}}(x)$) azon élek száma, amelyek befutnak x-be.

8. Feladat. *Legyen $\vec{G}$ egy irányított gráf. Mivel egyenlő a kifokok összege?*

9. Feladat. *Legyen G egy gráf és U pontjainak egy részhalmaza. Írjuk le alternatív módoin az U-beli csúcsok fokainak összegét?*

10. Feladat. *Igazoljuk, hogy egy $2n$ pontú reguláris gráf csúcshalmzát bárhogyan is vágjuk szét két n elemű csúcshalmazra, a vágás osztályai között ugyanannyi él halad.*

1.2. Séta, vonal, út

11. Feladat. *Igazoljuk, hogy ha egy gráfban van x-ből y-be vezető séta (xy-séta), akkor van xy-út is.*

Definíció. x és y két csúcs egy G gráfban $x \sim y$ (olvasd x-ből y elérhető), ha van xy séta.

12. Feladat. *Igazoljuk, hogy az eléhetőség reláció ekvivalenciareláció.*

13. Feladat. *(i) Igazoljuk, hogy ha egy n pontú gráfban van xy-séta, akkor van n-nél rövidebb xy-séta is.*

(ii) Igaz-e, hogy ha egy n pontú gráfban van xy-séta, akkor van n hosszú xy-séta is?

Definíció. G összefüggő, ha bármely két csúcsa elérhetóség relációban van.

14. Feladat. *Összefüggőek az alábbi gráfok? Amennyiben paraméterek is szerepelnek a gráfok leírásában, akkor milyen paraméter értékekre lesz a gráf összefüggő. Ha gráfunk nem összefüggő, akkor írjuk le a gr'af komponenseit.*

(i) G_n: A csúcsok halmaza $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ i és j akkor és csak akkor szomszédos, ha $i - j = \pm 2$, ahol a számtan modulo n értendő.

(i) $H_{n,k}$: A csúcsok halmaza $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ i és j akkor és csak akkor szomszédos, ha $i - j = \pm k$, ahol a számtan modulo n értendő.

(iii) $J_{n,m}$: A csúcsok halmaza $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\} \times \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$ (x, x') és (y, y') akkor és csak akkor szomszédos, ha $x - x' = \pm 2$ (a számtan modulo n értendő) és $y - y' = \pm 1$ (a számtan modulo m értendő).

15. Feladat. *Igazoljuk, hogy egy legalább két csúcsú összefüggő gráfban van olyan pont, ami elhagyása után is összefüggő marad.*