Diszkrét Matematika levelező MSc hallgatók számára

5. Síkgráfok

Előadó: Hajnal Péter 2011–12. őszi félév

1. Síkgráfok

Definíció. Egy gráf síkba rajzolható, ha lerajzolható úgy, hogy az élgörbéknek a végpontokon kívül nincs más közös pontja.

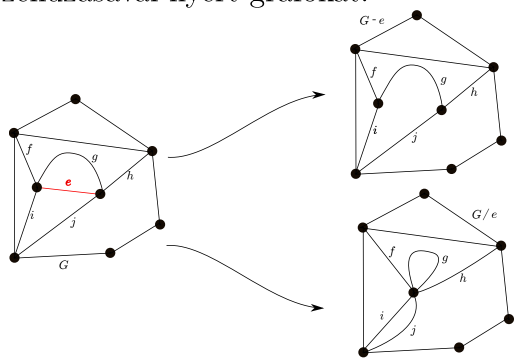
Definíció. Legyen G egy gráf, $e = xy \in E$ egy éle.

Ekkor $G - e$ (vagy más jelöléssel $G\backslash e$) azt a gráfot jelöli, amit G-ből az e él elhagyásával kapunk.

Továbbá jelölje G/e az e él összehúzásával/kontrakciójával nyert gráfot, mely az alábbi módon írhatunk le:

- $V(G/e) = (V(G) - \{x, y\} \dot\cup \{[e]\}$,
- $E(G/e) = E(G)\backslash\{e\}$,
- $I(G/e)$ természetesen adódik: Amely él eddig x-re vagy y-ra illeszkedett, az most az x és y csúcsokat reprezentáló új ($[e]$) csúcsra illeszkedik. A többi illeszkedés marad.

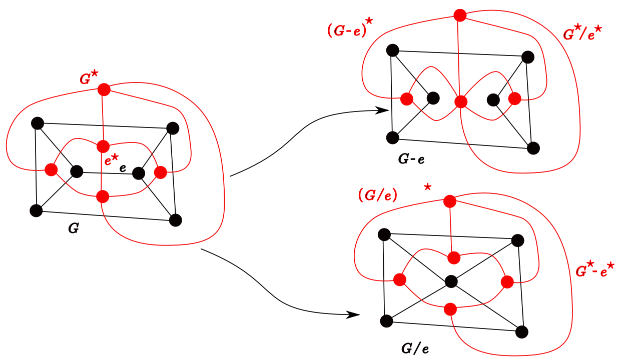
Példa. Az alábbi ábrán egy G gráfbeli e (piros) élt emelünk ki, majd megmutatjuk az e elhagyása és e összehúzásával nyert gráfokat.



Megjegyzés. Ha a fent említett e él hurokél, akkor $G/e = G - e$.

Emlékeztető. Legyen G egy síkrarajzolt gráf. Ekkor a G gráf duálisán azt a G^* gráfot értjük, melynek csúcsai G tartományai, élei pedig megfelelnek G éleinek úgy, hogy az e él e^* párja azon két tartományt reprezentáló csúcsokat köti össze, melyek e két oldalán szerepelnek (így speciálisan szomszédosak).

Példa. A következő két ábra a fent ismertetett két operációt, az élelhagyást, illetve az élösszehúzást illusztrálja a G gráfon, illetve annak G^* duálisán.



Az ábra azt sugallja, hogy $(G-e)^* = G^*/e^*$ és $(G/e)^* = G^* - e^*$.

1. Állítás. *(i)* $(G-e)^* = G^*/e^*$,

(ii) $(G/e)^* = G^* - e^*$.

Az érdeklődő hallgató számára a fenti állítás bizonyítása egy lehetséges feladat.

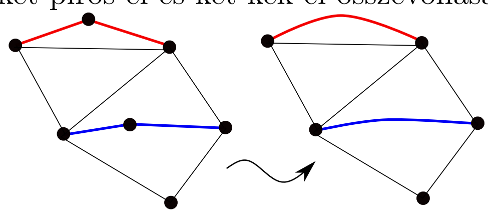
Definíció. Legyen G egy gráf.

a) Ha a G gráfból az R gráf él- illetve csúcselhagyásoperációk segítségével megkapható, akkor R-et a G gráf részgráfjának nevezzük. Jelölésben: $R \subseteq G$.

b) Ha a G gráfból az M gráf él- illetve csúcselhagyás és élösszehúzás operációk alkalmazásával megkapható, akkor a G gráfban H minorként szerepel (H a G minorja). Jelölésben: $M \preceq G$.

c) Ha a G gráfból a T gráf egy másodfokú csúcsba futó két él összevonásával (lásd alább) és él- illetve csúcselhagyás operációkkal nyerhető, akkor T a G gráf topologikus részgráfja. Jelölés: $T \leq G$.

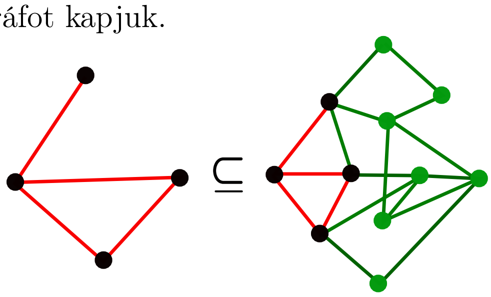
Példa. Az alábbi ábra két piros él és két kék él összevonását mutatja:



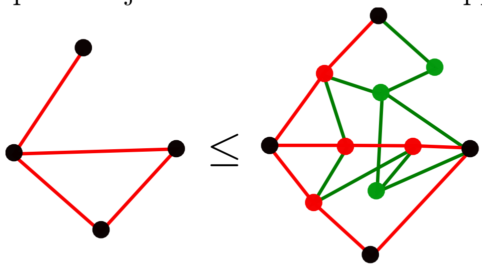
Az e és f élek összevonásával kapott gráf jelölése legyen $G(e \wr f)$.

Megjegyzés. $G(e \wr e') \simeq G/e \simeq G/e'$.

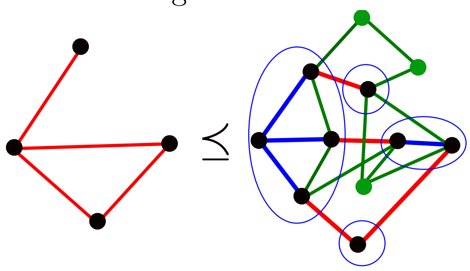
Példa. A R piros gráf a G gráf részgráfja, hiszen a zölddel jelölt éleket és csúcsokat elhagyva éppen az R gráfot kapjuk.



Példa. A T piros gráf a G gráf topologikus részgráfja, hiszen a zölddel jelölt éleket és csúcsokat elhagyva, a pirossal jelölt éleket összevonva éppen a T gráfot kapjuk.

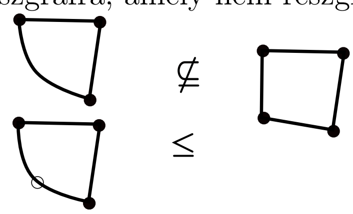


Példa. Az M piros gráf a G gráf minorja, hiszen ha a zölddel jelölt éleket elhagyjuk, a kijelölt klaszterekben szereplő kék feszítőfa éleit éleit összehúzzuk, akkor éppen az M gráfhoz jutunk. (A klaszterek zsugorodnak össze M csúcsaivá.)



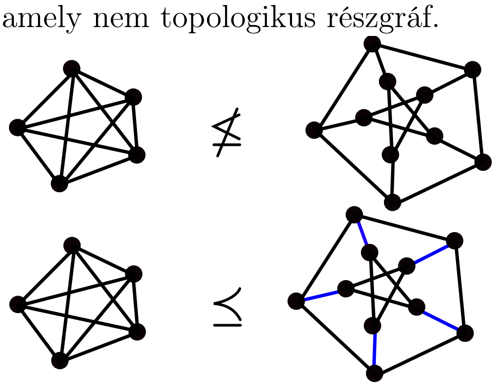
Észrevétel. Egy részgráf topologikus részgráf is egyben. Egy topologikus részgráf minor is egyben. Formálisan, ha G, R gráfok, akkor $G \supseteq R \Rightarrow G \geq R \Rightarrow G \succeq R$. Visszafelé viszont egyik állítás sem érvényes (lásd alábbi példák).

Példa. Példa topologikus részgráfra, amely nem részgráf:



C_4-ből C_3 bármely két összefütó e és e' élek összevonásával megkapható, vagyis C_3 C_4 topologikus részgráfja. C_4-nek több csúcsa van mint C_3-nak. Részgráfság esetén alkalmazni kellene a csúcselhagyás operációt, ami bármilyen végrehajtás esetén egy kétélű gráfhoz vezetne. Tehát C_3 nem részgráfja C_4-nek.

Példa. Példa minorra, amely nem topologikus részgráf.



A Petersen-gráfból K_5 a kék színnel jelölt élek összehúzásával adódik, tehát K_5 a Petersen-gráfban minor. K_5 nem topologikus részgráfja a Petersen-gráfnak, hiszen a Petersen- gráf minden csúcsának fokszáma 3, K_5 csúcsainak fokszáma viszont 4.

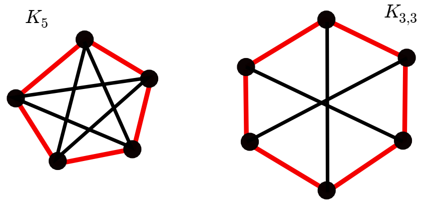
Két másodfokú csúcsba futó él összevonásával, csúcs- illetve élelhagyás-operációval viszont nem lehet fokszámot növelni.

Észrevétel. Ha G síkgráf, $R \subseteq G; T \preceq G; M \preceq G$ teljesül, akkor R, T, M is síkgráf.

2. Tétel (Euler tétele). *A K_5 és $K_{3,3}$ gráfok nem síkgráfok.*

Megjegyzés. A $K_{3,3}$ gráf egy másik neve a három-ház-három-kút gráf. Ez onnan ered, hogy a tétel állítása megfogalmazható úgy is, hogy nem tervezhető kilenc út három ház és három kút között (mindegyik háztól mindegyik kúthoz) úgy, hogy az utaknak a közös végpontokon (amennyiben van ilyen) ne legyen közös pontja.

Bizonyítás. A tétel fontos. Két bizonyítást is megemlítünk
1. Bizonyítás: A $K_{3,3}$ és K_5 gráf alábbi lerajzolásából indulunk ki.



Mindkét lerajzolás kiemel egy-egy gráfelméleti kört (piros színű élek). A bizonyítás alapmegjegyzése: Egy körgráfot lényegében egyféleképpen lehet szépen lerajzolni. Egy lerajzolt kör a síkot belső (korlátos) és külső (nem korlátos) részre osztja. (Lásd Jordan-féle görbetétel, illetve Schönflies-tétel.)

Az ábrákon a kör mellett további élek szerepelnek (ezekre mint hidak hivatkozunk). Ezeket viszonyíthatjuk a kör lerajzolásához: lehetnek külsők és belsők. A két szerep (külső/belső) szimmetrikus. Így feltehető, hogy többségük belül halad.

Tegyük fel, hogy a kör szép lerajzolása a két gráf teljes szláp lerajzolásává terjeszthető ki. Ezek után a két gráfot külön kezeljük:

$K_{3,3}$: Feltevésünk szerint belül (ami topologikusan azonos egy körvonal belsejével) legalább két híd van, amik keresztezik egymást és átmetszés nélkül lerajzolhatók. Ez lehetetlen.

K_5: Feltevésünk szerint belül legalább három híd van. Bárhogy választjuk is ki a belülre kerülő három élt, lesz közöttük kettő, ami az előző esethez hasonlóan nem fut össze és keresztezi egymást. Ez lehetetlen.

2. Bizonyítás: (Euler tételére hivatkozó bizonyítás.) Néhány BSc-s előadásban szereplő tételt idézünk fel.

Észrevétel (Euler tétele). Legyen G összefüggő, síkrarajzolt gráf. Ekkor $t(G) - |E(G)| + |V(G)| = 2$, ahol $t(G)$ a tartományok/országok száma.

3. Következmény. *Legyen G egyszerű síkgráf, továbbá $|V(G)| \geq 3$. Ekkor*

(i) $|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6$,

(ii) ha G ráadásul páros gráf, akkor $|E(G)| \leq 2|V(G)| - 4$.

A következmény (i) része adja, hogy K_5 nem síkgráf. Valóban K_5 nem teljesíti a $|E| \leq 3|V| - 6$ feltételt ($|E| = 10$ és $3|V| - 6 = 3 \cdot 5 - 6 = 9$).

A következmény (ii) része adja, hogy $K_{3,3}$ nem síkgráf. Valóban $K_{3,3}$ páros gráf és nem teljesíti a $|E| \leq 2|V| - 4$ feltételt ($|E| = 9$ és $2|V| - 4 = 2 \cdot 6 - 4 = 8$). ■

4. Következmény. *Ha G síkgráf, akkor K_5 és $K_{3,3}$ nem lehet részgráf G-ben, K_5 és $K_{3,3}$ nem lehet topologikus részgráf G-ben, illetve K_5 és $K_{3,3}$ nem lehet minor G-ben.*

Ha K_5 vagy $K_{3,3}$ minden élére egy új csúcsot helyezünk, akkor ugyancsak nem síkgráfhoz jutunk, de részgráfként már nem találjuk a K_5, $K_{3,3}$ gráfokat. Azok csak topologikus részgráfként, illetve minorként lesznek G-ben. Azaz az első állítás nem megfordítható. Az utolsó két állítás viszont megfordítható.

5. Tétel. *A következő három állítás ekvivalens:*

(i) A G gráf síkgráf.

(ii) A G gráfnak nem topologikus részgráfja a K_5 és $K_{3,3}$ gráf ($G \not\geq K_5; K_{3,3}$).

(iii) A G gráfban nincs K_5 és $K_{3,3}$ minor ($G \not\succeq K_5; K_{3,3}$).

A fenti hármas ekvivalencia két független eredmény összegzése: (i)$\Leftrightarrow$(ii) a Kuratowski-tétel, míg (i)$\Leftrightarrow$(iii) a Wagner-tétel.

2. A Wagner-tétel bizonyítása háromszorosan összefüggő gráfokra

Az alacsony összefüggőségű gráfok bizonyos részgráfjaik egyszerű összeragasztásával kaphatók. Ha ezek a részek szépen lerajzolhatók, akkor ezek a lerajzolások is összeragaszthatók G szép lerajzolásává. Ezek technikai részletek, a következő szekcióra hagyjuk. Mi itt a lényegi résszel foglalkozunk.

Főeset: *A G gráf 3-szorosan öszefüggő.*

A továbbiakban ebben az esetben a Wagner-tétel nem triviális irányának bizonyításával foglalkozunk, vagyis azt szeretnénk belátni, hogy ha a háromszorosan összefüggő G gráf nem tartalmaz K_5 és $K_{3,3}$ minort, akkor szépen lerajzolható a síkra.

Kezdeti észrevétel: Feltehető, hogy a G gráf egyszerű, hiszen hurokél és párhuzamos él behúzása nem rontja el a síkba rajzolhatóságot.

A Wagner-tétel $|V| \leq 4$ esetén egyszerűen látható. A továbbiakban feltesszük, hogy $|V| \geq 5$.

A bizonyítás $|V|$-re vonatkozó indukcióként is felfogható, de egy rekurzív síkrarajzolási algoritmus is kiolvasható belőle.

A bizonyítás további részéhez szükségünk lesz a következő lemmára és annak következényére.

6. Lemma. *Legyen G egyszerű, háromszorosan összefüggő gráf, melynek csúcsszáma legalább 5. Ekkor található olyan $e \in E(G)$ él, melyre a G/e gráf 3-szorosan összefüggő.*

A lemma bizonyítása is csak egy kitérő a Wagner-tétel indoklásában. A következő fejezetre hagyjuk.

7. Következmény. *Legyen G egyszerű, háromszorosan összefüggő gráf, melynek csúcsszáma legalább 5. Ekkor található olyan $xy \in E(G)$ él, melyre a $G - \{x, y\}$ gráf kétszeresen összefüggő.*

Következmény bizonyítása: A lemmában szereplő e él megfelelő, hiszen $G - \{x, y\} = (G/e) - [e]$ kétszeresen összefüggő lesz. ■

Legyen e a Lemma és a Következmény közös éle. G/e nem tartalmaz K_5, illetve $K_{3,3}$ minort (minorjai G-nek is minorjai), háromszorosan összefüggő, így az indukciós feltevés alapján G/e szépen lerajzolható. Ebben a lerajzolásban ott van a $G - \{x, y\}$ gráf lerajzolása és a kontrahált élt reprezentáló $[e]$ csúcs is. A $G - \{x, y\}$ gráf kétszeresen összefüggő, így lerajzolásának minden tartományát egy kör határolja. Azt is amely belsejében ott van az $[e]$ csúcs. Legyen C ezen tartomány határoló körgráf.

Legyen $P = N(x) \cap V(C)$, $K = N(y) \cap V(C)$, ahol $N(x)/N(y)$ az x/y csúcs szomszédainak halmaza. P elemeire mint piros, K elemeire mint kék csúcsok hivatkozunk. Fontos látni, hogy $P \cap K \neq \emptyset$ eset is előfordulhat, azaz a két szín nem két kizáró kategória.

A következő két fogalom és egy főlemma segítségével juthatunk el a bizonyítás befejezéséhez.

Definíció. Egy kört C kört u és v csúcsa ($u, v \in V(c)$) két zárt ívre bontja, mégpedig az $[u, v]^\frown$ és $[v, u]^\frown$ ívre. A két ív a két uv út csúcshalmaza. Körünk szépen lerajzolt a síkra, így az ívek megkülönböztethetők: a jelölésben az első csúcsból indulva, óramutató járása szerint haladva jutunk el a második csúcshoz. A két ív (csúcshalmaz) metszete az $\{u, v\}$ csúcsok. $(u, v)^\frown$ legyen $[u, v]^\frown - \{u, v\}$.

Definíció. Legyen A és B a C kör csúcshalmazának két részhalmaza. Azt mondjuk, hogy A és B szeparálható, ha megadhatóak olyan $u, v \in V(C)$ csúcsok, melyekre $A \subseteq [u, v]^\frown$ és $B \subseteq [v, u]^\frown$, vagyis létezik olyan felbontása a körnek, hogy A az egyik ív, B a másik ív csúcsainak részhalmaza.

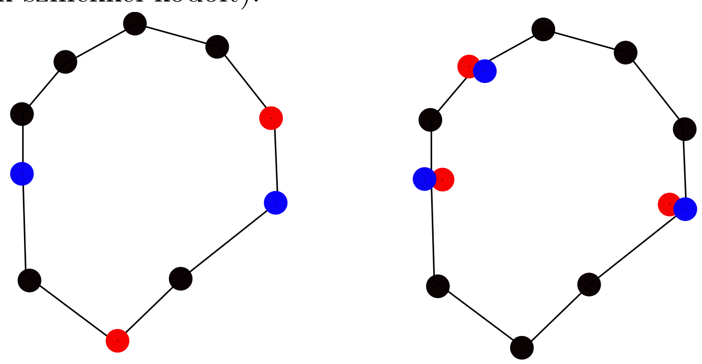
Megjegyezzük, hogy a két ív zárt, így végpontjaik közösek. A definíció megengedi, hogy nem-diszjunkt ponthalmazok is szeparálhatók legyenek. A következő kombinatorikus lemma a szeparálhatóság akadályait írja le.

8. Tétel (Főlemma). *Legyen C egy kör és A és B a kör két véges részhalmaza. A és B pontosan akkor nem szeparálható, ha a következő két lehetőség valamelyike teljesül.*

(i) Létezik olyan $a, a' \in A$ és $b, b' \in B$ négy különböző csúcs, melyek a körön felváltva helyezkednek el, azaz az $(a, a')^\frown$ ív b és b' közül pontosan egyet tartalmazzon.

(ii) $A = B$ és $|A| = |B| = 3$.

A szeparálhatóságot megakadályozó konfigurációk a következő ábrán láthatók (A és B a piros/kék színekkel kódolt).

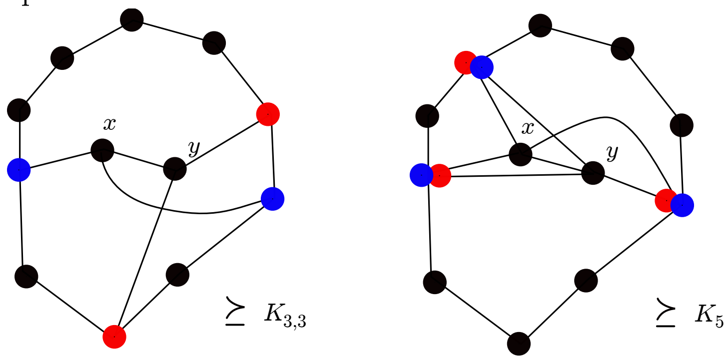


A lemma egyszerű eset analízissel ellenőrizhető. Ezt az érdeklődő hallgatóra bízzuk.

A Wagner-tétel bizonyítása már egyszerűen adódik.

9. Következmény. *P és K szeparálhatóak a C kör mentén.*

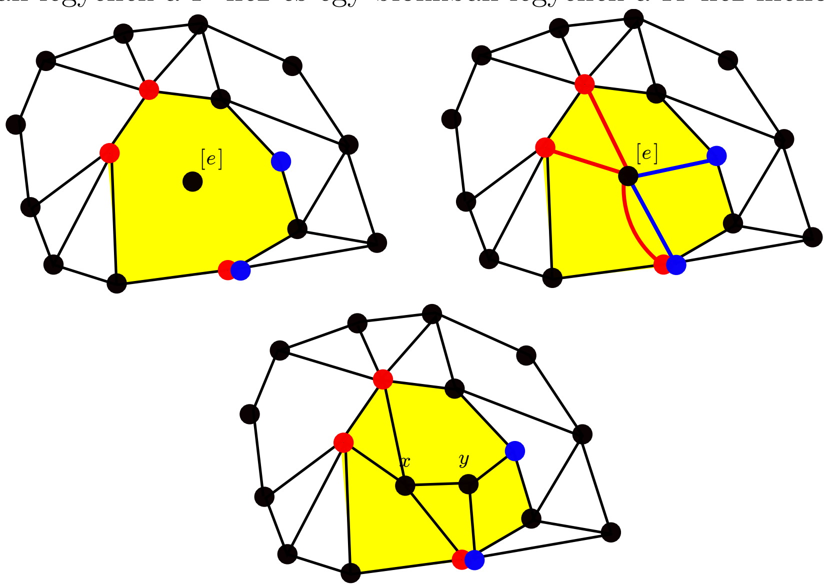
Következmény bizonyítása: Indirekt tegyük fel, hogy (i) vagy (ii) akadályok valamelyike fellép.



Látható, hogy az (i) esetben $K_{3,3}$, az (ii) esetben K_5 jelenik meg minorként, ami ellentmondás, hiszen G-ről feltettük, hogy nincs benne K_5 illetve $K_{3,3}$ minor. ∎

A P halmaz és a K halmaz pontjai ott vannak a C kör éleinek görbéjén (amely élgörbék egy Jordan-görbévé olvadnak össze). Ábrázoljuk a $G - \{x, y\}$ megfelelő tartományát és az $[e]$ csúcsot, ahol $[e]$ az összehúzott e élt reprezentáló csúcs pontja.

Az $[e]$ csúcsból kiinduló élek egy része eredetileg x-ből indult és P valamelyik eleméhez ment, másik részük eredetileg y-ból indult és K valamelyik eleméhez ment. Mivel P és K szeparált, ezért ezen éleknek megfelelő élgörbék megrajzolhatók átmetszés nélkül úgy, hogy az $[e]$-t reprezentáló csúcs körül a kiinduló görbék között egy blokkban legyenek a P-hez és egy blokkban legyenek a K-hez menő görbék.



G/e ezen lerajzolásából G egy szép lerajzolása már könnyedén előállítható (a kontrakciót „visszavonjuk”). ∎

3. A Wagner-tétel bizonyításának technikai részletei

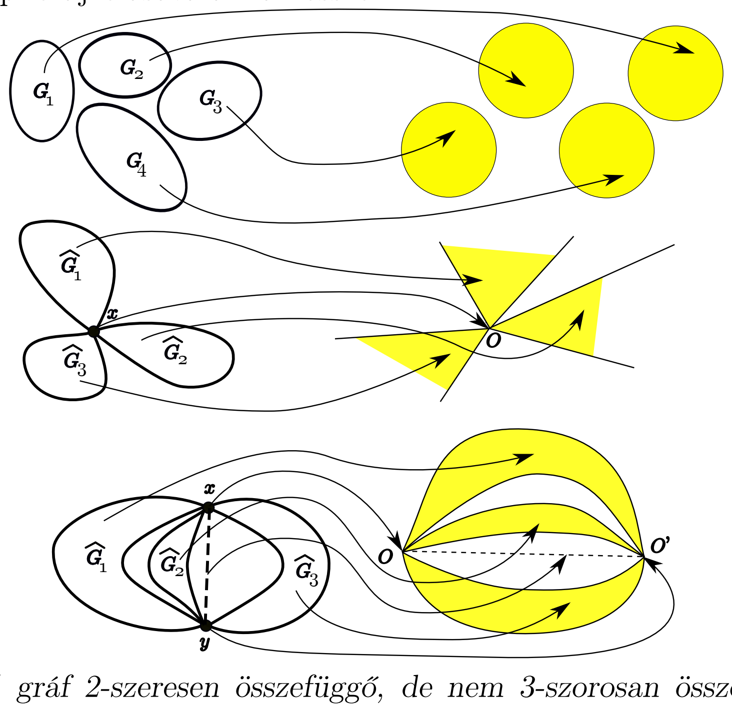
10. Lemma. *Ha Wagner-tételt tudjuk háromszorosan összefüggő gráfokra, akkor a tétel igaz.*

Bizonyítás. $|V|$-re vonatkozó teljes indukcióval igazoljuk a Wagner-tételt. $|V| \leq 4$ esetben minden gráf szépen lerajzolható a síkra. Az indukciós lépeshez eseteket különböztetünk meg az összefüggőség foka szerint.

1. eset: *A G gráf nem összefüggő.* Ha G nem összefüggő, akkor jelölje $G_1, G_2, \ldots$ a gráfunk komponenseit. Egyik komponens sem tartalmazhat K_5 és $K_{3,3}$ minort, mindegyik komponens csúcsszáma kisebb mint G-é. Így az indukciós feltevés alapján mindegyik komponens szépen síkra rajzolható. Vegyünk fel komponensszámnyi diszjunkt egységkörlapot. Az egyes komponensek lerajzolásai lekicsinyíthatők (amennyiben szükséges) úgy, hogy az egyes körlapokba berajzolható legyen. Így G egy lerajzolásához jutunk.

2. eset: *A G gráf összefüggő, de nem 2-szeresen összefüggő.* Ekkor létezik $x \in V(G)$ elvágó csúcs, melyre $G - \{x\}$ több komponensre esik szét: $G_1, G_2, G_3, \ldots$ Mindegyik komponenshez adjuk hozzá az x csúcsot (a komponenshez vezető élekkel). Az így kapott gráfok legyenek $\widehat{G}_1, \widehat{G}_2, \ldots$. Ezek mind G részgráfjai. Ezért egyik sem tartalmazhat K_5 és $K_{3,3}$ minort, mindegyik csúcsszáma kisebb mint G-é. Így az indukciós feltevés alapján mindegyik $\widehat{G}_i$ szépen síkra rajzolható. $\widehat{G}_i$ szép lerajzolása módosítható úgy, hogy az x csúcsot realizáló P_x pont a nem korlátos tartomány határán legyen (például gömbre vetítéssel, majd a gömbrerajzolás alkalmas P_x környéki felvágásával). Ez a lerajzolás deformálható úgy, hogy egy szögtartományban legyen, ahol P_x a szögtartomány O csúcsába kerül.

Legyen ℓ a $\widehat{G}_i$ gráfok száma. Vegyünk fel ℓ szögtartományt, amelyek diszjunktak kivéve közös csúcsukat, O-t. A fenti lerajzolásokat külön szögtartományba illesztve ezek G egy szép lerajzolásává állnak össze.



3. eset: *A G gráf 2-szeresen összefüggő, de nem 3-szorosan összefüggő.* Ekkor létezik $x, y \in V(G)$ elvágó csúcspár, melyre $G - \{x, y\}$ több komponensre esik szét: $G_1, G_2, \ldots$ Mindegyik komponenshez adjuk hozzá az x és y csúcsot a komponenshez vezető élekkel. Az így kapott gráfok legyenek $\widehat{G}_1, \widehat{G}_2, \ldots$. Ezek mind G részgráfjai.

Definíciójuk miatt egyikben sem lesz x és y szomszédos. (G_i bővítésénél csak az x, y-ból a komponenshez vezető éleket adtuk hozzá.)

Legyen $\widehat{G}_1^+, \widehat{G}_2^+, \ldots$ azok a gráfok, amiket $\widehat{G}_i$-ből úgy kapunk, hogy x-et és y-t összekötjük. Ezek már nem szükségszerűen részgráfok G-ben. DE minorok! Ezért egyik sem tartalmazhat K_5 és $K_{3,3}$ minort, mindegyik csúcsszáma kisebb mint G-é. Így az indukciós feltevés alapján mindegyik $\widehat{G}_i^+$ szépen síkra rajzolható. $\widehat{G}_i^+$ szép lerajzolása módosítható úgy, hogy az $e = xy$ élt realizáló $\mathcal{G}_e$ élgörbe a nem korlátos tartomány határán legyen (például gömbre vetítéssel, majd a gömbrerajzolás alkalmas $\mathcal{G}_e$ felezőpontjának környékén történő felvágásával). Ez a lerajzolás deformálható úgy, hogy $\mathcal{G}_e$ egyenes OO'szakasz legyen (O reprezentálja az x és O' az y csúcsot), míg a lerajzolás többi része egy OO' feletti „holdacskába” essen.

Legyen ℓ a $\widehat{G}_i$ gráfok száma. Vegyünk fel ℓ holdacskát, amelyek diszjunktak kivéve közös csúcsaikat, O, O'-t és elkerülik az OO' szakaszt. A $\widehat{G}_i^+$ fenti lerajzolásában ott van $\widehat{G}_i$ lerajzolása is, amit az i-edik holdacskában elhelyezhetünk (x-et O, y-t O' reprezentálja). Ha szükséges, akkor az összeragasztott lerajzolásokhoz hozzávesszük az OO' szakaszt is az xy él reprezentálására. Így G egy szép lerajzolásához jutunk. ■

11. Lemma. *Legyen G egyszerű, háromszorosan összefüggő gráf, melynek csúcsszáma legalább 5. Ekkor található olyan $e \in E(G)$ él, melyre a G/e gráf 3-szorosan összefüggő.*

Bizonyítás. A lemma bizonyítását nem végeztük el. ■

4. További kapcsolódó tételek

Végezetül néhány tétel kimondása következik bizonyítás nélkül.

12. Tétel (Fáry-tétel). *Ha G egyszerű síkgráf, akkor lerajzolható úgy, hogy minden élgörbéje szakasz legyen.*

13. Tétel (Tutte-tétel). *Ha G egyszerű, 3-szorosan összefüggő síkgráf, akkor lerajzolható úgy, hogy minden élgörbe egyenes szakasz, továbbá minden tartománya konvex sokszög.*

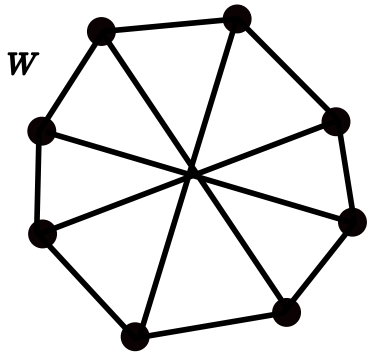
14. Tétel (Steinitz-tétel). *Egy G gráf pontosan akkor egy konvex poliéder élgráfja, ha 3- szorosan összefüggő egyszerű gráf.*

⋆ ⋆ ⋆

A Wagner-tétel lehetőséget ad a négy-szín-tétel átfogalmazására: Ha egy hurokélmenetes gráf nem tartalmaz $K_{3,3}$ és K_5 minort, akkor 4-színezhető.

A két minor kizárása közül melyik a fontosabb? K_5 nyilván fontos, hiszen csak $K_{3,3}$ kizárása megengedi, hogy gráfunk K_5 legyen és ekkor a négy-színezhetőség nem teljesül. Mi van, ha csak K_5 minorkénti előfordulását tiltjuk? Ennek vizsgálata vezette el Wagnert a következő tételhez.

15. Tétel (Wagner struktúratétele). *A G gráf pontosan akkor nem tartalmaz K_5 minort, ha felépíthető síkgráfokból és W Wagner-gráfból (lásd alább) legfeljebb három pontú klikk menti összeragasztásokkal és csúcs- illetve élelhagyásokkal.*



Ebből a tételből már könnyen adódik, hogy a négy-szín-tétel kovetkező élesítése is igaz.

16. Következmény (Wagner színezési tétele). *Ha a G gráf tartalmaz K_5 minort, akkor a kromatikus száma legfeljebb* 4.

Bizonyítása a struktúratétel után, a négy-szín-tételre vonatkozó hivatkozással egyszerű: A síkgráfok és a Wagner-gráf 4-színezhető, a klikkek menti ragasztás nem növeli meg a kromatikus számot. Azaz az élesítés nem sokkal nehezebb mint a négy-szín-tétel.

17. Sejtés (Hadwiger-sejtés). *Ha a G gráf nem tartalmaz K_{k+1} minort, akkor G kromatikus száma legfeljebb k.*

Illetve egy ekvivalens megfogalmazása:

18. Sejtés (Hadwiger-sejtés). *Ha a G gráf nem k-színezhető, akkor tartalmaz K_{k+1} minort.*

BSc-s tanulmányainkból tudjuk, hogy a minorság helyett részgráfsággal dolgozva a megfelelő állítás „nagyon hamis”. Nem annyira nyilvánvaló, hogy topologikus részgráfsággal dolgozva is (nagyon) hamis állításhoz jutunk (ezt láthatjuk, ha az interneten a ‘Hajós-conjecture’-re keresünk).

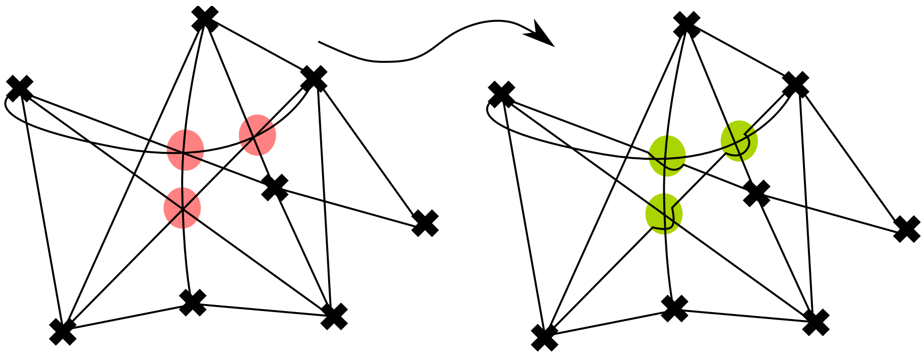
A minorokat használó Hadwiger-sejtés $k = 2$ esetet triviális. A $k = 3$ esete egyszerű. A $k = 4$ eset igaz (Wagner színezési tétele), a négy-szín-tétellel ekvivalens (ahogy vázoltuk). Ahogy k nő a sejtés nehezedik (miért?). Ennek ellenére a $k = 5$ eset (a négy-szín-tétel élesítése) bizonyított. A bizonyítása a négy-szín-tételre hivatkozik, de így is nagyon bonyolult.

5. Gráfok metszési száma

Az előadás a metszési szám nevű gráfparaméterről szól. Ez egy olyan gráfparaméter, amely egy adott gráfról megmondja, hogy „milyen messze” van a síkgráfoktól. (Síkgráfok esetén a paraméter 0 lesz.)

Definíció. A G gráf egy λ lerajzolását *regulárisnak* nevezünk, ha a lerajzolásban nincs három élgörbe közös belső ponttal.

A regularitás egy technikai feltétel. Egy lerajzolás ha megsérti ezt a feltételt, akkor kis lokális változtatással elérhetjük, hogy lényegében ugyanaz a lerajzolás már reguláris legyen.

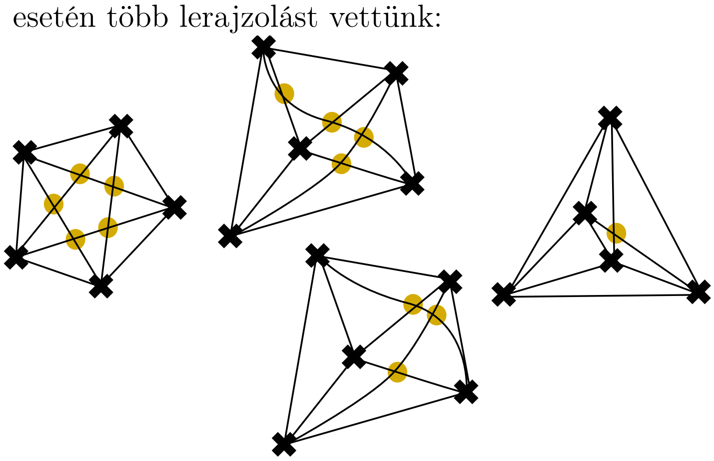


Definíció. Legyen G egy gráf λ egy reguláris lerajzolása.

$$x(G,\lambda) = |\{P \in \mathbb{R}^2 : \ P\text{-n több élgörbe áthalad}\}|.$$

Megjegyzés. Egy lerajzolás metszési számát definiálhattuk volna úgy is, hogy a regularitást nem tesszük fel. Ekkor azon nem-csúcs pontokat, amin több élgörbe halad át súlyozottan kell számolni. Ha egy ilyen ponton k élgörbe halad át, akkor súlya $\binom{k}{2}$.

Példa. $G = K_5$ esetén több lerajzolást vettünk:

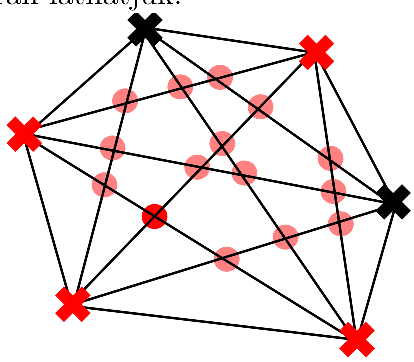


A különböző lerajzolásokhoz különböző metszési szám tartozik: $x(K_5,\lambda) = 5$, $x(K_5,\lambda') = 4$, $x(K_5,\lambda''') = 3$, $x(K_5,\lambda'''') = 1$.

Megjegyzés. $x(G,\lambda) = 0$ akkor és csak akkor, ha λ a G gráf szép lerajzolása.

Példa. $G = K_n$, a λ lerajzolás legyen olyan, hogy a csúcsok egy konvex n-szög csúcsaira illeszkedjenek. Azért, hogy reguláris lerajzoláshoz jussunk, kissé perturbáljuk véletlenül a csúcsokat. Továbbá az élgörbék legyenek szakaszok. Az így kapott λ lerajzolásra $x(K_n,\lambda) = \binom{n}{4}$. Hiszen a metszések és a csúcsnégyesek között bijekció létesíthető.

K_6 esetét az alábbi ábrán láthatjuk.

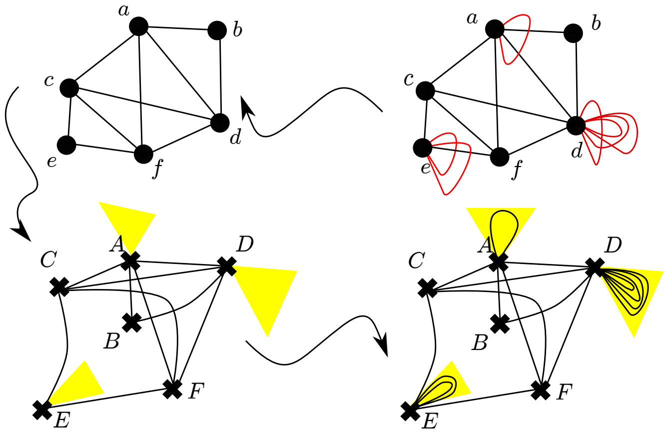


Észrevétel. Ha $R \subseteq G$, akkor a G egy λ lerajzolása megszorítható R-re (λ értelmezési tartományát leszűkítjük a részgráf csúcsaira, éleire). Jelölésben: $\lambda|_R$.

19. Következmény. *Legyen H egy n pontú egyszerű gráf ($H \subseteq K_n$) ekkor $x(H, \lambda|_H) \leq \binom{n}{4} = O(n^4)$, ahol λ a teljes gráf korábbi lerajzolása.*

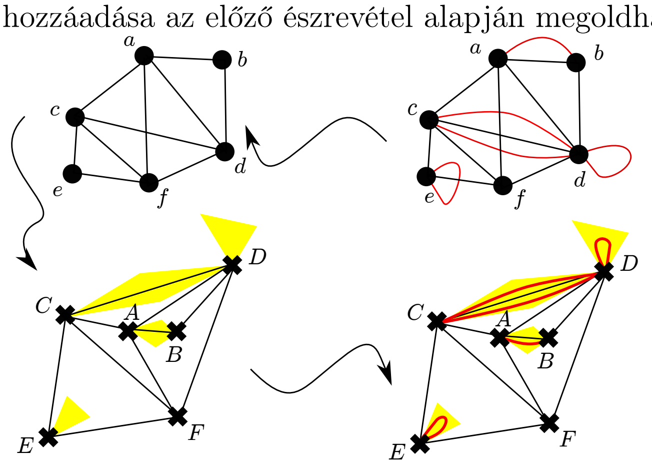
Észrevétel. Legyen G és G_0 két gráf, G-ből úgy kapjuk G_0-at, hogy G-ből hurokéleket hagyunk el (vagy fordítva: G_0-ból úgy kapjuk G-t, hogy hurokéleket adunk hozzá). Ekkor G_0 tetszőleges λ lerajzolása kiterjeszthető G egy $\widehat{\lambda}$ lerajzolására úgy, hogy ne keletkezzen további metszés, azaz $x(G, \widehat{\lambda}) = x(G_0, \lambda)$.

Tekintsük a G_0 gráf λ lerajzolását egy x csúcs környékén. Elég kis környezetben az x-ben összefutó élek egy csillag alakzatot alkotnak, amely ágai között „elég hely van” tetszőleges számú hurokélnek.



Észrevétel. Legyen G egy gráf. Legyen G_0 az az egyszerű gráf, amit G-ből úgy kapunk, hogy elhagyjuk a hurokéleket és minden párhuzamos élseregből egyetlen élet tartunk meg. (Vagy fordítva: A G_0 egyszerű gráfból úgy kapjuk G-t, hogy hurokéleket adunk hozzá vagy/és létező élek mellé párhuzamos élt adunk hozzá.) Ekkor G_0 tetszőleges λ szép lerajzolása kiterjeszthető G egy $\widehat{\lambda}$ szép lerajzolására. Azaz $x(G_0, \lambda) = 0$ esetén $x(G, \widehat{\lambda}) = 0$.

Tekintsük a G_0 gráf λ lerajzolását egy e élgörbe környékén. Ennek lesz egy kis holdacska szabad környezete, ahol „elég hely van” tetszőleges számú párhuzamosélnek. A hurokélek hozzáadása az előző észrevétel alapján megoldható.



Definíció (Metszési szám).

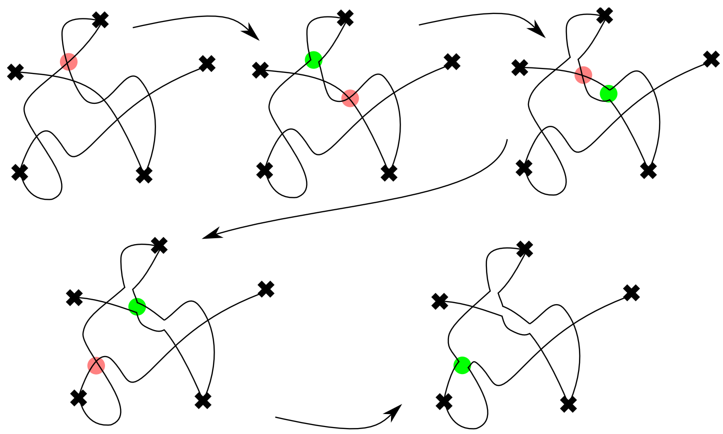
$$x(G) = \min\{x(G, \lambda) : \ \lambda \text{ reguláris}\}.$$

Észrevétel. $x(G) = 0$ akkor és csak akkor, ha G síkgráf.

Példa. $x(K_5) = x(K_{3,3}) = 1$.

Megjegyzés. Egy n pontú G egyszerű gráf esetén $x(G) = O(n^4)$.

Észrevétel. Ha e és f két él, közös v csúccsal rendelkeznek és élgörbéik átmetszik egymást, akkor nem gazdaságos a lerajzolás. v szomszédjai felöl v felé haladva az átmetszés helyett „váltsanak görbét az élek”. Ekkor ugyanazon gráf egy lerajzolását kapjuk, az eredeti λ lerajzolást λ'-re cserélhetjük. Közben eggyel csökkent a metszési szám.



Definíció. Egy λ lerajzolás V-szép lerajzolás, ha az összefutó élgörbék nem metszik át egymást.

Megjegyzés. A G gráf tetszőleges λ lerajzolásához található olyan λ' V-szép lerajzolás, amelyre $x(G, \lambda') \leq x(G, \lambda)$.

Emlékeztető (BSc-s tétel, az Euler-tétel következménye). Legyen G egyszerű síkgráf. Ha $|V| \geq 3$, akkor $|E| \leq 3|V| - 6$.

20. Lemma (triviális becslés a metszési számra). *Legyen G egy egyszerű gráf és λ tetszőleges reguláris lerajzolása, ekkor*

$$x(G, \lambda) \geq |E| - 3|V|.$$

Bizonyítás. Legyen R részgráfja G-nek úgy, hogy $V(G) = V(R)$ és $E(R)$ egy olyan maximális élhalmaz, hogy $\lambda|_R$-ben az élgörbék szépen legyenek lerajzolva. Ekkor az emlékeztetőből adódik, hogy $|E(R)| \leq 3|V|$. Így $|E(G)| - |E(R)|$, azaz legalább $|E(G)| - 3|V|$ darab él van, ami nincs R-ben.

Ezek mindegyikére (külön-külön) a λ-élgörbéjét $(R, \lambda|_R)$-hoz adva metszésnek kell keletkezni (R választása miatt). Ezek mind különböző metszések (valemely R-beli és különböző $E(G) - E(R)$-beli élek között vannak). Ezekből következik. hogy

$$x(G, \lambda) \geq |E(G)| - 3|V|.$$

■

A nagyon egyszerű becslésnek nagyon mély következmény elsz, ha az alábbi módon alkalmazzuk.

21. Tétel (Metszési lemma). *Ha G egyszerű gráf és $|E| \geq 4|V|$, akkor*

$$x(G) \geq \frac{1}{64}\frac{|E|^3}{|V|^2}.$$

Megjegyzés. Egyszerű gráfunkra vonatkozó élbecslés garantálja, hogy G nem síkgráf, azaz $x(G) \geq 1$.

22. Következmény.

$$x(K_n) \geq \frac{1}{64}\frac{\binom{n}{2}^3}{n^2} = \frac{1}{128}n^4 + O(n^3) = \Omega(n^4).$$

Megjegyzés. Az Ω jelölés jelentése: alsó becslés egy rejtett (pozitív) konstanssal. (Ahogy O egy felső becslés egy rejtett (pozitív) konstanssal.) Ha a nagyságrendben alsó és felső becslés is adható pozitív konstansokkal, akkor a Θ jelölést használjuk. Eredményeink tömör összefoglalása: $x(K_n) = \Theta(n^4)$. Megjegyezzük, hogy $x(K_n)$ aszimptotikája (vagy még inkább pontos értéke) mind a mai napig megoldatlan.

Bizonyítás. Legyen λ a G-nek tetszőleges V-szép lerajzolása. Vegyük azt az $\underline{R}$ véletlen feszített részgráfot, amelyet úgy kapunk, hogy minden csúcsra függetlenül döntünk: p valószínűséggel meghagyjuk, illetve $1-p$ valószínűséggel eltöröljük a csúcsot. (p-t később határozzuk meg.)

Alkalmazzuk a lemmát $\underline{R}$-re. Ekkor

$$x(\underline{R}, \lambda|_{\underline{R}}) \geq |E(\underline{R})| - 3|V(\underline{R})|.$$

Vegyük mindkét oldal várható értékét. Az egyenlőtlenség természetesen a várható értékek között is fennáll:

$$\mathbb{E}(x(\underline{R}, \lambda|_{\underline{R}})) \geq \mathbb{E}(|E(\underline{R})|) - 3\mathbb{E}(|V(\underline{R})|).$$

Nézzük a várható értékeket! A bal oldalon két metsző él megmaradása szükséges, amihez 4 pont megmaradása kell. A jobb oldalon az élekhez 2 pont megmaradása kell, a pontokhoz pedig egy. Az egyes pontok megmaradásának valószínűsége p, különböző pontok megmaradása független események. Ebből:

$$p^4 x(G,\lambda) \geq p^2|E(G)| - 3p|V(G)|.$$

p értéke pozitív lesz, így egyenlőtlenségünket leoszthatjuk p^4-nel.

$$x(G,\lambda) \geq \frac{|E(G)|}{p^2} - \frac{3|V(G)|}{p^3}.$$

Válasszuk p-t $\frac{4|V|}{|E|}$-nek. (Ez feltételünk alapján legfeljebb 1.) Ekkor

$$x(G,\lambda) \geq \frac{1}{16}\frac{|E|^3}{|V|^2} - \frac{3}{64}\frac{|E|^3}{|V|^2} = \frac{1}{64}\frac{|E|^3}{|V|^2}.$$

Ha λ egy optimális lerajzolás, akkor kapjuk a tétel állítását. ■

Megjegyzés. Az $\frac{1}{64}$ együttható a bizonyításból adódott. Több odafigyeléssel javítható, de optimális értéke nem ismert.

6. A metszési lemma geometriai alkalmazása: Szemerédi–Trotter-tétel

Definíció. Legyen $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^2$ egy véges síkbeli ponthalmaz és $\mathcal{E}$ egy véges síkbeli egyenes halmaz.

$$I(\mathcal{P}, \mathcal{E}) = |\{(P, e) : P \in \mathcal{P},\ e \in \mathcal{E} \text{ és } P\, I\, e\}|,$$

ahol $P\, I\, e$ az jelöli, hogy a P pont illeszkedik az e egyenesre.

23. Tétel (Szemerédi–Trotter-tétel).

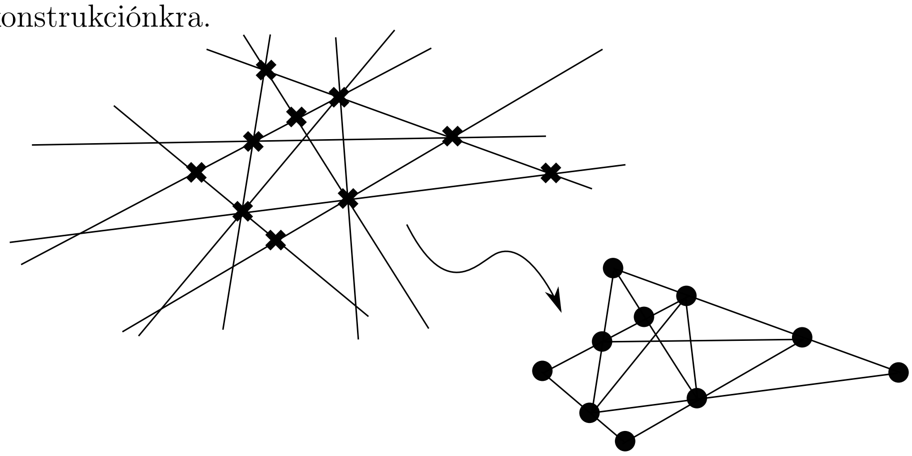
$$I(\mathcal{P}, \mathcal{E}) \leq 4(|P||E|)^{2/3} + 4|\mathcal{P}| + |\mathcal{E}|.$$

Megjegyzés. A felső becslés nagyságrendjét átírhatjuk:

$$\mathcal{O}(|P|^{2/3}|\mathcal{E}^{2/3} + |\mathcal{P}| + |\mathcal{E}|) = \mathcal{O}(\max\{|\mathcal{P}^{2/3}|\mathcal{E}|^{2/3}, |\mathcal{P}|, |\mathcal{E}|\}).$$

Megjegyezzük, hogy tetszőeges p és e poitív egészekre megadható olyan p elemű $\mathcal{P}$ ponthalmaz és e elemű $\mathcal{E}$ egyeneshalmaz, hogy a köztük lévő illeszkedés legalább ezred része legyen a felső becslésnek. Azaz a felső becslés nagyságrendje optimális.

Bizonyítás. Készítsünk egy gráfot $\mathcal{P}$-ből és $\mathcal{E}$-ből. Feltehető, hogy minden $e \in \mathcal{E}$ egyenes áthalad $\mathcal{P}$-beli ponton. $\mathcal{P}$ elemei lesznek a csúcsok. Gráfunk egyszerű lesz. Két csúcs, $P, Q \in \mathcal{P}$ akkor és csak akkor szomszédos, ha egy $e \in \mathcal{E}$ egyenesre illeszkednek és ezen nincs közöttük más $\mathcal{P}$-beli pont. Az alábbi ábra egy példát mutat konstrukciónkra.



Ekkor $V = |\mathcal{P}|$. Az élek számát is kifejezhetjük a kiinduló geometriai konfigurációnk paramétereiből: $k \geq 1$ esetén, ha egy egyenesre k darab $\mathcal{P}$-beli pont esik, akkor ezen az egyenes $k-1$ éllel járul gráfunkhoz.Az így összeszámolt részeredményeket összeadva minden egyenesre, kapjuk hogy $|E| = I(\mathcal{P}, \mathcal{E}) - |\mathcal{E}|$. Legyen λ gráfunk azon lerajzolása, ahol minden csúcs $\mathcal{P}$-beli helye által reprezentált és az élgörbék egyenes szakaszok (így minden élgörbe a megfelelő két végpont szomsédságát bizonyító $\mathcal{E}$-beli egyenes egy szakasza). Továbbá $x(G) \leq x(G, \lambda) \leq \binom{|\mathcal{E}|}{2} \leq |\mathcal{E}|^2$.

1. eset: $|E| < 4|V|$. Azaz $I(\mathcal{P}, \mathcal{E}) - |\mathcal{E}| < 4|\mathcal{P}|$.

2. eset: $|E| \geq 4|V|$. Ekkor a metszési lemma alkalmazható:

$$|\mathcal{E}|^2 \geq \binom{|\mathcal{E}|}{2} \geq x(G, p) \geq \frac{1}{64} \frac{(I(\mathcal{P}, \mathcal{E}) - |\mathcal{E}|)^3}{|\mathcal{P}|^2}.$$

Ebből rendezéssel, adódik, hogy

$$4|\mathcal{P}|^{2/3}|\mathcal{E}|^{2/3} \geq I(\mathcal{P}, \mathcal{E}) - |\mathcal{E}|.$$

Mindkét esetben igaz a bizonyítandó. ■

7. Kombinatorikus számelmélet: additív kombinatorika

Definíció. $A, B \subset \mathbb{R}$ véges halmazok. $A + B = \{a + b : \ a \in A \text{ és } b \in B\}$ és $A \cdot B = \{a \cdot b : \ a \in A \text{ és } b \in B\}$. (Azaz a szokásos komplexus összeadás és szorzás műveletét vizsgáljuk.)

$A+A$-t, illetve $A \cdot A$-t az A halmaz összeghalmazának, illetve szorzathalmazának nevezzük.
Kérdés: Milyen nagy, illetve kicsi lehet $|A + A|$ és $|A \cdot A|$? A továbbiakban legyen $|A| = n$.

$|A + A|$ és $|A \cdot A|$ legfeljebb $\binom{n}{2} + n$. Legyen A egy véletlenül választott n elemszámú számhalmaz, ekkor $A + A$ és $A \cdot A$ is majdnem biztosan $\binom{n}{2} + n$ elemű lesz.

Becsüljük $|A+A|$ minimumát. Legyen A olyan, hogy elemei $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$.

- Alsó becslés: $a_1 + a_1 < a_1 + a_2 < \ldots a_1 + a_n < a_2 + a_n < \ldots < a_n + a_n$. alapján mindig lesz legalább $2n - 1$ különböző érték $A + A$-ban.
- Felső becslés: Ha A számtani sorozat, akkor $|A + A| = 2n - 1$.

Becsülhetjük $|A \cdot A|$ minimumát. $|A \cdot A|$ lehet $2n - 1$, például geometriai sorozatnál. Lineáris alsó becslés is adható: Ehhez vegyük A-nak egy nagy részét amely azonos előjelű (ez választható legalább $\lfloor (n-1)/2 \rfloor$ elemszámúnak). Majd a kiválasztott elemek abszolút értékeinek logaritmusára alkalmazzuk az additív rész alsó becslését.

A maximális elemszámmal szemben a minimális elemszámnál az összeghalmaz és a szorzathalmaz esetén teljesen más típusú halmazok lesznek extremálisak (számtani, illetve mértani sorozatok). Van-e olyan halmaz, ahol az összeghalmaz és a szorzathalmaz egyszerre kicsi lesz?

Erdős Pál kérdése: Mit tudunk mondani az A számhalmaz $\max\{|A+A|, |A \cdot A|\}$ paraméteréről?

Sejtés (Erdős—Szemerédi-sejtés). Minden pozitív ϵ-ra

$$\min_{\substack{A \\ A \subseteq \mathbb{R}, |A| = n}} \max\{|A + A|, |A \cdot A|\} = \Omega(n^{2-\varepsilon}).$$

A sejtés mind a mai napig nyitott. Mi egy rész eredményt bizonyítunk (amelynél már erősebb becslések is ismertek).

24. Tétel (Elekes György). *Elég nagy n-re*

$$\min_{\substack{A \\ A \subseteq \mathbb{R}, |A| = n}} \max\{|A + A|, |A \cdot A|\} \geq \frac{1}{10} n^{5/4},$$

azaz tetszőleges n-elemű A számhalmazra $\max\{|A + A|, |A \cdot A|\} = \Omega(n^{5/4})$.

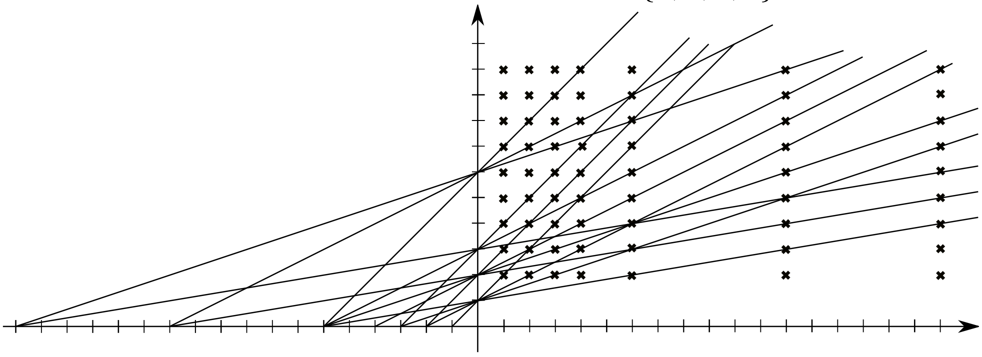
Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $0 \notin A$.

Definiálunk egy síkbeli ponthalmazt és egyeneshalmazt:

$$\mathcal{P}_A = \{(\pi, \sigma) : \pi \in A \cdot A, \ \sigma \in A + A\},$$

$$\mathcal{E}_A = \{e_{a,a'} :\ y = \frac{1}{a} \cdot x + a',\ a, a' \in A\}.$$

A következő ábrán a konstrukció látható az $A = \{1, 2, 3, 6\}$ esetben.



Számoljuk ki a pont- és egyeneshalmazunk azon paramétereit, amik a Szemerédi—Trotter-tételben szerepet játszanak:

- $|\mathcal{P}_A| = |A \cdot A| \cdot |A + A|$.
- Az $e_{a,a'}$ egyenletét tengelymetszetes alakba írjuk: $\frac{1}{a'} \cdot y - \frac{1}{a \cdot a'} \cdot x = 1$. Látható, hogy a tengelymetszetek (azaz a geometriai ponthalmaz) és (a, a') kölcsönösen meghatározzák egymást. Azaz $|\mathcal{E}_A| = |A|^2$.
- Mennyi az illeszkedések száma? Az $e_{a,a'}$ egyenesre illeszkednek az $(a \cdot a_1, a_1 + a')$, $(a \cdot a_2, a_2 + a'), \ldots$, ahol $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$. Ebből $I(\mathcal{P}, \mathcal{E}) \geq |A||\mathcal{E}| = |A|^3$.

Használjuk fel a Szemerédi—Trotter-tételt:

$$n^3 = |A|^3 \leq I(\mathcal{P}, \mathcal{E}) \leq 4|A \cdot A|^{2/3} \cdot |A + A|^{2/3} \cdot (|A|^2)^{2/3} + 4|A \cdot A||A + A| + |A|^2.$$

Tudjuk, hogy $|A|^2 = n^2 \leq \frac{1}{3}n^3$, ha n elég nagy. Feltehető, hogy $4|A+A||A \cdot A| \leq \frac{1}{3}n^3$, hiszen más esetben a bizonyítandónál erősebb állításunk lenne. A jobb oldal utolsó két tagját a bal oldalra víve, a bal oldalon még legalább $1/3 \cdot n^3$ marad:

$$\frac{1}{3}n^3 \leq 4|A \cdot A|^{2/3}|A + A|^{2/3} \cdot n^{4/3}.$$

Ezekután egyszerű rendezés vezet el a bizonyítás befejezéséhez:

$$\frac{1}{12}n^{5/3} \leq |A \cdot A|^{2/3}|A + A|^{2/3}.$$

$$0{,}15 \cdot n^{5/4} \leq \sqrt{|A \cdot A||A + A|} \leq \max\{|A \cdot A|, |A + A|\}.$$

$\blacksquare$