Diszkrét Matematika levelező MSc hallgatók számára

1. Gráfok magasabb fokú összefüggősége, folyamok

Előadó: Hajnal Péter 2011–12. őszi félév

1. Gráfok magasabb fokú összefüggése

Definíció. Legyen k egy pozitív egész. G gráf *k-szorosan élösszefüggő*, ha tetszőleges k-nál kisebb elemmszámú élhalmazát elhagyva a kapott gráf összefüggő lesz. Formulával

$$\forall F \subseteq E(G) : |F| < k \text{ esetén } G - F \text{ összefüggő.}$$

A feltételnek teljesülni kell $F = \emptyset$ esetén is, alapgráfunk összefüggő. Azaz gráfunk összefüggő és „kevés” él elhagyása esetén összefüggő marad.

Definíció. Egy G gráf *k-szorosan (pont)összefüggő*, ha tetszőleges k-nál kisebb elemszámú csúcshalmazát elhagyva a kapott gráf összefüggő és $|V(G)| > k$. Formálisan

$$\forall U \subseteq V(G) \quad |U| < k \text{ esetén } G - U \text{ összefüggő, továbbá } |V(G)| > k.$$

A pontszámra adott technikai feltétel szerepe, hogy a gráf olyan nagy legyen, hogy $k - 1$ csúcs elhagyása után is legalább két pont maradjon.

Példa. A fák ($|V| \geq 2$ esetén) nem kétszeresen élösszefüggőek. A körök ($|V| \geq 3$ esetén) kétszeresen összefüggőek, és így kétszeresen élösszefüggőek is, de nem háromszorosan összefüggőek. A $k + 1$ ponttú gráfok közül csak a teljes gráf k-összefüggő.

Megjegyzés. A következő diagram a különböző összefüggőségi fogalmak viszonyait foglalja össze. Azon gráfosztályok között, amelyek tartalmazása nem vezethető le a diagramból nincs is tartalmazás.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & \text{1-öf} & \Leftarrow & \text{2-öf} & \Leftarrow & \text{3-öf} & \Leftarrow & \ldots & \Leftarrow & k\text{-öf} & \Leftarrow & \ldots \\
 & \Leftrightarrow^{*} & & & & & & & & & & & \\
\text{összefüggő} & & & & \Downarrow & & \Downarrow & & \ldots & & \Downarrow & & \ldots \\
 & \Leftrightarrow & & & & & & & & & & & \\
 & & \text{1-élöf} & \Leftarrow & \text{2-élöf} & \Leftarrow & \text{3-élöf} & \Leftarrow & \ldots & \Leftarrow & k\text{-élöf} & \Leftarrow & \ldots
\end{array}$$

A vízszintes sorokban levő kapcsolatok a definíciók alapján nyilvánvalóak. A csillaggal jelölt ekvivalencia nem teljes. Az 1-szeres összefüggőség megköveteli, hogy legalább két csúcsunk legyen, az összefüggőség esetén nincs ilyen feltétel. A függőleges nyilakkal jelölt kapcsolatok egy kicsit nehezebbek, az alábbi lemmából könnyen következnek.

1. Lemma. + *Legyen e egy G gráf tetszőleges éle és v egy tetszőleges pontja. Legyen $k \geq 2$.*

(a) Ha G k-szorosan élösszefüggő, akkor $G - e$ $(k-1)$-szeresen élösszefüggő.

(b) Ha G k-szorosan összefüggő, akkor $G - v$ $(k-1)$-szeresen összefüggő.

(c) Ha G k-szorosan élösszefüggő, akkor $G - v$-nek tetszőleges számú komponense lehet.

(d) Ha G k-szorosan összefüggő, akkor $G - e$ $(k-1)$-szeresen összefüggő.

Célunk, hogy belássuk a többszörösen összefüggő gráfok következő jellemzését.

2. Tétel. *(i) Egy G gráf akkor és csak akkor k-szorosan élösszefüggő, ha tetszőleges két pontja között létezik k darab páronként éldiszjunkt út.*

(ii) Egy G gráf akkor és csak akkor k-szorosan összefüggő, ha tetszőleges két pontja között létezik k darab út, amelyek belső pontjainak halmaza páronként diszjunktak (útjaink pontfüggetlenek), továbbá $|V(G)| > k$.

A két állítás egy-egy iránya egyszerű: a megfelelő utak létezése garantálja a megfelelő összefüggőséget. A nehéz irányok bizonyításához azonban előbb a folyamok elméletének alapjaival kell megismerkednünk.

2. Folyamok, az alapfogalmak

Legyen $\overrightarrow{G}$ irányított gráf, $s, t \in V(G)$ két kijelölt csúcs és $c : E(G) \to \mathbb{R}^+$ függvény. Ekkor $(\overrightarrow{G}, s, t, c)$ négyesét *hálózatnak* nevezzük. Az s pontot *forrásnak*, t pontot *nyelőnek*, c-t pedig *kapacitásfüggvénynek* nevezzük.

Megjegyzés. Hálózatok sok gyakorlati probléma absztrakciójához hasznosak. Például egy város vízvezetékhálózata írható így le, ahol a kapacitásfüggvény a csövek terhelhetőségét (például átmérő) adja meg. Egy úthálózat is modellezhető így. Egy él kapacitása az áteresztő képessége, a megfelelő útszakasz szélességével, sávjainak számával arányos.

A fenti fogalom egy statikus fogalom. Olyan mint egy programozó számára a hardwer. Az alkalmazott matematikus/programozó számára a hálózat adott/felmért és az alkalmazás inputja. A dinamika leírásához új fogalom kell.

Definíció. Az $f : E(G) \to \mathbb{R}$ függvényt *folyamnak* nevezzük a H hálózatban, ha

- **Megengedettségi feltételek**: minden $e \in E$ esetén $\quad 0 \leq f(e) \leq c(e)$,
- **Megmaradási törvény**: minden $v \in V \setminus \{s, t\}$ esetén

$$\sum_{e:vBe} f(e) = \sum_{e:vKe} f(e).$$

f tehát megengedett, ha a csöveken nem folyik át a kapacitásnál nagyobb, illetve negatív mennyiség. A megmaradási törvény egy természetes fizikai feltétel. A forrás és nyelő kivétele a törvény hatálya alól azért történik meg, mert a forrásra úgy gondolunk, hogy ott anyagot pumpálunk a hálózatba, míg a nyelőnél anyagot veszünk ki a hálózatból.

Ahhoz, hogy könnyebben elképzeljük a folyamokkal kapcsolatos fogalmakat, nézzünk azt az interpretációt, amikor a hálózat egy város úthálózata. A forrás lehet egy lakótelepet, lakóparkot reprezentáló csúcs. A belvárost reprezentálja a nyelő. A folyam a reggeli forgalom: a belvárosba szeretnének eljutni autóval a lakótelepen élő emberek. Minden élen a folyam megadja az ott folyó forgalmat.

Példa. Az $f \equiv 0$ folyam egy tetszőleges hálózatban. Ekkor minden élen 0 anyagmennyiség fut, a speciális folyamra mint *üres folyam* hivatkozunk.

Speciálisan minden hálózatban megadható folyam. Hogy ezek a folyamok összevethetők legyenes szükségünk van egy újabb fogalomra.

Definíció. Egy folyam értéke $\acute{\mathrm{e}}(f) = \sum_{e:eKs} f(e) - \sum_{e:eBs} f(e)$ (t a nyelő).

Az f folyam értéke negatív is lehet, ilyenkor visszafele folyik a víz a csőhálózatban. Az üres folyam értéke 0.

Folyam probléma: Adott egy hálózat. Keressünk hozzá egy maximális értékű folyamot.

A maximális jelző első olvasatban problémás. Egy folytonos problémával állunk szemben, amikor nem szüségszerű a legnagyobb érték fevétele. Egy folyam egy m élű hálózatban m valós szám leírásával adható meg, azaz azonosítható $\mathbb{R}^E \equiv \mathbb{R}^m$ egy pontjával. A folyamoknak megfelelő pontok $\mathbb{R}^m$ egy kompakt halmaza, amelyen az érték egy folytonos függvény. Ez a folytonos függvény felveszi maximumát $\mathbb{R}^m$ egy kompakt részhalmazán.

Megjegyzés. Tulajdonképpen a folyam probléma a lineáris programozási feladat egy speciális esete: a maximalizálandó $\acute{\mathrm{e}}(f)$ függvény lineáris, valamint a folyamok halmaza lineáris egyenlőségekkel és egyenlőtlenségekkel van definiálva.

Az, hogy a folyamok értéke nem lehet tetszőleges nagy (a hálózat korlátozza a forrásból nyelőbe átjuttatható anyagot) az elemi módon is könnyen látszik. Tetszőleges f folyam esetén

$$\acute{\mathrm{e}}(f) = \sum_{e:sKe} f(e) - \sum_{e:sBe} f(e) \leq \sum_{e:sKe} c(e).$$

Azaz $\acute{\mathrm{e}}(f)$ a hálózat egy paraméterével becsülhető.

Vizsgálatunkat egy fontos észrevétellel kezdjük. Bevezetjük a vágás fogalmát. Ez lehetőséget ad a folyam értékének alternatív leírására és ez alapján a legnagyobb folyamértékére alternatív felső becsléseket kapunk.

Definíció. Legyen $\overrightarrow{G}$ egy irányított gráf. Egy $\mathcal{V} = \{S, T\}$ *vágás* $\overrightarrow{G}$-ben a ponthalmaz egy kétosztályú partíciója két nemüres ponthalmazba. S és T a vágás két *osztálya* vagy *partja*.

$$E(\mathcal{V}) = \{e \in E(\overrightarrow{G}) : e \text{ két végpontja különböző partra esik}\},$$

a $\mathcal{V}$ vágás élhalmaza.

$\mathcal{V}$ egy *x-y vágás*, ha $x \in S$, és $y \in T$.

Ha egy hálózatban beszélünk vágásról, akkor az mindig egy s-t vágás. Azaz a forrás és nyelő különböző osztályba esik.

A vágásra gondolhatunk úgy mint egy folyóra, ami a csúcsokat két városrészre osztják. A vágás élei azon élek, amelyek — a folyó hasonlatban — hidaknak tekinthetők, azaz a két partot kötik össze. Alapgráfunk irányított, így egy vágás élei két osztályba sorolhatók:

Definíció.

$$\overrightarrow{E}(\mathcal{V}) = \{e = xy \in E(\overrightarrow{G}) : x \in S, y \in T\},$$
$$\overleftarrow{E}(\mathcal{V}) = \{e = xy \in E(\overrightarrow{G}) : x \in T, y \in S\}.$$

Tehát $\overrightarrow{E}(\mathcal{V})$ a forrás partjáról induló, a nyelő partjára vezető élek halmaza.

A folyam értékét a forrás lokáli környezete (a rá illeszkedő élek) alapján definiáltuk. Az érték tetszőleges vágás mentén kifejezhető.

3. Lemma. *Tetszőleges $\mathcal{V} = \{S, T\}$ vágásra:*

$$\text{é}(f) = \sum_{e:e\in\overrightarrow{E}(\mathcal{V})} f(e) - \sum_{e:e\in\overleftarrow{E}(\mathcal{V})} f(e).$$

Tehát tetszőleges $\mathcal{V}$ vágás alapján egy alternatív leírása adható a folyam értékének. Az eredeti definíció is beilleszthető ebbe a sémába. Ha $S = \{s\}$, akkor vissza kapjuk az eredeti definiációt (ekkor $\overrightarrow{E}(\mathcal{V}) = \{e : sKe\}$ és $\overleftarrow{E}(\mathcal{V}) = \{e : sBe\}$). Egy másik érdekes speciális eset $T = \{t\}$. A lemma állítása ekkor

$$\text{é}(f) = \sum_{e:eBt} f(e) - \sum_{e:eKt} f(e).$$

Bizonyítás. S minden elemére egy egyenlőséget írunk fel.

Az s csúcs/forrás esetén ez a folyam értékének definíciója:

$$\text{é}(f) = \sum_{e:eKs} f(e) - \sum_{e:eBs} f(e).$$

A $v \in S\backslash\{s\}$ csúcsokra (azaz a nem forrásokra) ez a megmaradási törvény, átrendezve a fenti egyenlőség „stílusára”:

$$0 = \sum_{e:eKv} f(e) - \sum_{e:eBv} f(e).$$

Ezután összegezzük az összes S-beli csúcsra felírt egyenlőséget. A bal oldal pontosan é(f) lesz. A jobb oldalon szereplő változók ($f(e)$) az élekkel vannak indexelve és együtthatójuk a vágáshoz való viszonyuktól függ. Egy él viszonya a vágáshoz négyféle lehet:

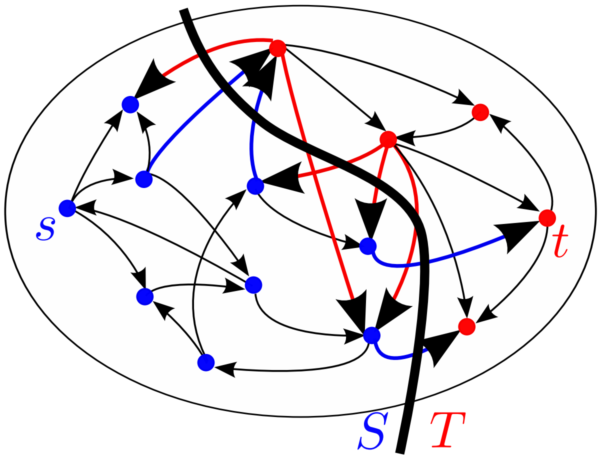
1. $S \to S$: Ezek az $\overrightarrow{xy}$ élekhez tartozó változók kiesnek, a jobb oldalon két egyenletben (az x csúcshoz és y csúcshoz felírtakban) szerepelnek ellentétes előjellel.

2. $T \to T$: Ezek az élek egyik felírt egyenlőségben sem szerepelnek.

3. $S \to T$: Ezek az $\overrightarrow{xy}$ élekhez tartozó változók a jobb oldalon egy egyenletben (az x csúcshoz felírtban) szerepelnek pozitív előjellel.

4. $T \to S$: Ezek az $\overrightarrow{xy}$ élekhez tartozó változók a jobb oldalon egy egyenletben (az y csúcshoz felírtban) szerepelnek negatív előjellel.

Így az összegzés után a jobb oldalon a folyam érték alternatív felírásához jutunk. ■



Az alternatív definíciók alapján is becsülhetjük egy folyam értékét. Az alábbiakban az állítást és bizonyítását egyszerre adjuk.

4. Következmény. *Legyen f tetszőleges folyam, $\mathcal{V}$ tetszőleges vágás a hálózatban. Ekkor*

$$é(f) = \sum_{e:e\in\overrightarrow{E}(\mathcal{V})} f(e) - \sum_{e:e\in\overleftarrow{E}(\mathcal{V})} f(e) \leq \sum_{e:e\in\overrightarrow{E}(\mathcal{V})} c(e) - \sum_{e:e\in\overleftarrow{E}(\mathcal{V})} 0 = \sum_{e:e\in\overrightarrow{E}(\mathcal{V})} c(e) := c(\mathcal{V}).$$

A bizonyításból adódó, $c(\mathcal{V})$-vel jelölt paraméterét a vágásnak a *vágás kapacitásának nevezzük*. Az egyenlőtlenség tetszőleges folyam és tetszőleges vágásra vonatkozik. A folyam csak az egyenlőtlenség bal oldalán szerepel, a vágás csak a jobb oldalon. Ilyen esetben a sok alkalmazás között van egy legerősebb: amikor folyamunk a legnagyobb értékű, viszont vágásunk a legkisebb kapacitású.

5. Következmény.

$$\max_{f \text{ folyam}} é(f) \leq \min_{\mathcal{V} \text{ vágás}} c(\mathcal{V}),$$

tehát a maximális folyamérték legfeljebb akkora mint a minimális vágáskapacitás.

Megjegyzés. Tudjuk, hogy véges sok vágás van egy n csúcsú hálózatban, pontosan 2^{n-2} db. Azaz a jobb oldal egy véges halmazon vett optimalizálási probléma áll.

Célunk, hogy belássuk, hogy az egyenlőtlenség helyett egyenlőség írható.

Ha f optimális (maximális értékű), akkor alkalmas $\mathcal{V}$ vágásra az $\overrightarrow{E}(\mathcal{V})$-beli élek kapacitásig kihasználtak, míg az $\overleftarrow{E}(\mathcal{V})$-beli éleken nincs visszafolyás.

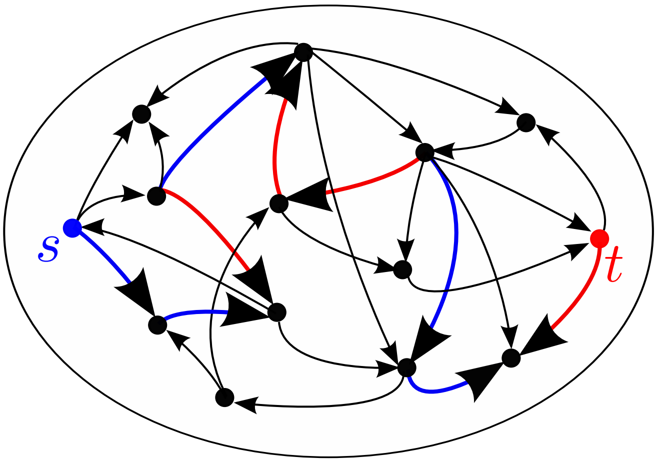
Egy újabb fogalomra van szükségünk.

Legyen P egy irányítatlan értelemben vett út $\overrightarrow{G}$-ben. Azaz hagyjuk el a $\overrightarrow{G}$ gráf irányítását (így kapjuk a G irányítatlan gráfot) és P egy út ebben. P éleit két kategóriába sorolhatjuk ($\overrightarrow{G}$-beli irányításának megfelelően): vagy előrehaladó él (azaz a P-t leíró pont-él-pont-él... sorozatban kiinduló végpontja előbb van) vagy hátramutató él (azaz a P-t leíró pont-él-pont-él… sorozatban kiinduló végpontja később van). Ezen élek halmazai rendre $E^{\text{előre}}(P)$, illetve $E^{\text{hátra}}(P)$ jelölje. Így $E(P) = E^{\text{előre}}(P)\dot{\bigcup}E^{\text{hátra}}(P)$.

Definíció. Legyen $H(\overrightarrow{G}, s, t, c)$ hálózat, ebben pedig egy f folyam. Legyen P egy irányítatlan értelemben vett út $\overrightarrow{G}$-ben (speciálisan használhatjuk az $E(P) = E^{\text{előre}}(P) \bigcup E^{\text{hátra}}(P)$ jelölést). P *javítóút* (f folyamra, $H(\overrightarrow{G}, s, t, c)$ hálózatban), ha

(o) P egy s-t út G-ban,

(J) $e \in E^{\text{előre}}(P)$ esetén $f(e) < c(e)$, míg $e \in E^{\text{hátra}}(P)$ esetén $f(e) > 0$, azaz ha az előrehaladó éleken a folyam nem használja ki a csőszakasz által engedet maximumot (az él kapacitását) valamint visszafele (a hátramutató éleken) történik bizonyos „visszafolyás”.



6. Lemma. *Legyen f egy folyam a $H(\overrightarrow{G}, s, t, c)$ hálózatban. Ekkor ha találunk egy P javító utat, akkor f folyam javítható, azaz nem maximális értékű.*

Bizonyítás. Legyen P egy javító út f-re. Legyen $min_{e\in E^{\text{előre}}(P)}(c(e) - f(e)) = \delta^{\text{előre}}$ (azaz, egy élhez tartozó szám azt mutatja meg, hogy legfeljebb mennyivel növelhető az anyagmennyiség ezen élen a kapacitás korlát megsértése nélkül), hasonlóan $\delta^{\text{hátra}} = min_{e\in E^{\text{hátra}}(P)} f(e)$, valamint a minimumuk: $\delta = min(\delta^{\text{hátra}}, \delta^{\text{előre}})$.

$$\widetilde{f}(e) = \begin{cases} f(e), & e \notin E(P), \\ f(e) + \delta, & e \in E^{\text{előre}}(P), \\ f(e) - \delta, & e \in E^{\text{hátra}}(P). \end{cases}$$

A következő észrevételek szolgálják a bizonyítás alapját:

(1) $\delta > 0$.

(2) $\widetilde{f}$ megengedett. Igazából δ definiálása úgy tört'ent, hogy a maximális olyan értéket választottuk, hogy anyagmennyiség növelése esetén ne menjünk a megfelelő kapacitás fölé, illetve csökkentés esetén ne kapjunk negatív mennyiséget.

(3) $\widetilde{f}$ teljesíti a megmaradási törvényeket. Egy $V(\overrightarrow{G}) - \{s, t\}$ csúcs eshet P-n kívülre, illetve P-re. Ez utóbbi esetben az ott összefutó két P-beli él irányít'asa négyféle lehet. Az öt eset mindegyikében egyszerű általános iskolai számtan adja, hogy az f-re érvényes megmaradási törvény továbbra is fennáll.

(4) $\text{é}(\widetilde{f}) = \text{é}(f) + \delta$. Egyszerű aritmetika.

(2) és (3) együtt igazolja, hogy $\widetilde{f}$ egy folyam. (1) és (4) együtt igazolja, hogy $\widetilde{f}$ értéke nagyobb mint f-é. ■

Azaz egy javítóút felismerése egy módot ad folyamunk javítására.

Vajon ez a módszer univerzális-e? Van-e ügyesebb módszer a folyamérték növelésére?

Egy ilyen módszer javító út hiányában, egy más logika alapján adna nagyobb értékű folyamot. Belátjuk, hogy ilyen „szuperokos” módszer nincs.

3. A folyamok alaptétele és következményei

A következő tétel a korábban feltett kérdések megválaszolásához vezet.

7. Tétel. *Legyen f egy folyam a $H(\overrightarrow{G}, s, t, c)$ hálózatban. A következő állítások ekvivalensek:*

(i) f folyam értéke maximális

(ii) f-hez van olyan $\mathcal{V} = \{S, T\}$ vágás, hogy $\text{é}(f) = c(\mathcal{V})$,

(iii) f-hez nincs javító út.

Bizonyítás. $(i) \Rightarrow (iii)$: Az előző lemma szerint javító út léte bizonyítja, hogy folyamunk nem optimális. A fenti implikáció ugyanezt az állítást tartalmazza némi logikai átfogalmazással.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Tetszőleges $\mathcal{V}$ vágás kapacitása tetszőleges folyam értékét felülről becsüli. Ha egy felső becslés egyben folyam érték is, akkor ez a folyam értéke biztos maximális.

A tétel lényege a $(iii) \Rightarrow (ii)$ állítás. Ennek bizonyításához az alábbi fogalmat vezetjük be:

Definíció. P ir'anyítatlan értelemben vett út *javítóút-kezdemény* (egy H hálózatban lévő f folyamra), ha:

(o)' s-ből induló út G-ben,

(J) tetszőleges $e \in E^{\text{előre}}(P)$ esetén $f(e) < c(e)$ és tetszőleges $e \in E^{\text{hátra}}(P)$ esetén $f(e) > 0$.

Azaz a javító útság feltételei közül csak azt dobjuk el, hogy az út a nyelőbe vezessen. Emiatt egy javítoút-kezdemény nem használható egy folyam növelésére. Ha a megfelelő lemma alapján a folyamunkat megváltoztatjuk, akkor az út x végpontjában a megmaradási törvény megsérül. A javítóút-kezdemény egy olyan út, aminél esélyt láthatunk hogy meghosszabbításával javítóutat kapjunk.

Legyen $S = \{x \in V : \text{található } sx \text{ javítóút-kezdemény}\}$, $T := V \backslash S = \overline{S}$. Megjegyezzük, ha $x \in S$, azaz x-be vezet javítóút-kezdemény, akkor ez az út végig S-ben vezet, hiszen A javítóút-kezdemény kezdőszeletei is javítóút-kezdemények.

(iii) miatt $t \notin S$. Az „s” út egy 0 hosszú út, ami nyilván javítóút-kezdemény, azaz $s \in S$ A fenti két halmaz egy $\mathcal{V} = \{S, T\}$ vágást határoz meg.

8. Állítás. *A $\mathcal{V} = \{S, T\}$ vágás bizonyítja (ii)-at, azaz $é(f) = c(\mathcal{V})$.*

Bizonyítás. Tudjuk, hogy a vágáson alapulva is felírhatjuk a folyam értékét:

$$\text{é}(f) = \sum_{e: e \in \overrightarrow{E}(\mathcal{V})} f(e) - \sum_{e: e \in \overleftarrow{E}(\mathcal{V})} f(e).$$

Legyen tetszőleges $\overrightarrow{xy} \in \overrightarrow{E}(\mathcal{V})$ él (azaz $x \in S$ és $y \in T$). Legyen P egy sx út (irányítatlan értelemben), ami $x \in S$-et bizonyítja (azaz javítóút-kezdemény). Ekkor $\widetilde{P} : P + \overrightarrow{xy}, y$ egy sy út, ami nem lehet javítóút-kezdemény, hiszen $y \notin S$. A javítóút-kezdeményság egyetlen módon „romolhat el": $f(\overrightarrow{xy}) = c(\overrightarrow{xy})$. Valóban $\overrightarrow{xy} \in E^{\text{előre}}(\widetilde{P})$ és $f(\overrightarrow{xy}) < c(\overrightarrow{xy})$ sérülése esetén csak $f(\overrightarrow{xy}) = c(\overrightarrow{xy})$ lehetőség marad egy folyamban.

Teljesen hasonló logika adja, hogy tetszőleges $\overrightarrow{xy} \in \overleftarrow{E}(\mathcal{V})$ él esetén $f(\overrightarrow{xy}) = 0$.

Így fent felírt, a folyam értéket adó kifejezést tovább írhatjuk:

$$\text{é}(f) = \sum_{e: e \in \overrightarrow{E}(\mathcal{V})} f(e) - \sum_{e: e \in \overleftarrow{E}(\mathcal{V})} f(e) = \sum_{e: e \in \overrightarrow{E}(\mathcal{V})} c(e) - \sum_{e: e \in \overleftarrow{E}(\mathcal{V})} 0 = c(\mathcal{V}),$$

ahogy bizonyítani kellett. ■

Az állítás bizonyítása az alaptétel bizonyítását teljessé tette. ■

9. Következmény (Maximális-folyam-minimális-vágás-tétel, Max-flow-min–cut-tetel, MFMC tétel).

$$max_{f \text{ folyam}} é(f) = min_{\mathcal{V} \text{ vágás}} c(\mathcal{V}).$$

Bizonyítás. Valóban. Már láttuk, hogy a bal oldal nem nagyobb mint a jobb oldal. Legyen F egy maximális értékű folyam. Az alaptétel szerint van hozzá (ii) pontban leírt tulajdonságú vágás. Ez éppen azt adja, hogy a jobb oldal sem nagyobb mint a bal oldal. ■

10. Következmény. *A következő algoritmus inputja egy hálózat. Az algoritmus leállásakor egy maximális értékű folyamot ad meg.*

Ford-Fulkerson algoritmus*:*
`Kiinduló lépés`*: Legyen $f \equiv 0$, azaz f az üres folyam.*
// A cél egy kiinduló folyam definiálása. Ha látunk egy nagyobb értékű folyamot,
// akkor kezdhetünk ezzel is.
`Keresés inicializálása`*: Legyen $S := \{s\}$.*
// S azon csúcsok halmaza, ahová javítóút-kezdeményeket találtunk.
`Javítóút-kezdemények növelése`*:*
// S növelése.
Legyen

$$B^{előre} = \{x \in V \backslash S : van\ olyan\ y \in S,\ hogy\ \overrightarrow{yx} \in E\ és\ f(\overrightarrow{yx}) < c(\overrightarrow{yx})\},$$

$$B^{hátra} = \{x \in V \backslash S : van\ olyan\ y \in S,\ hogy\ \overrightarrow{xy} \in E\ és\ f(\overrightarrow{xy}) > 0)\}.$$

Keressük meg $B^{előre} \cup B^{hátra}$ egy x elemét.

Ezután három esetet különböztetünk meg:

(*i*) `Bővítés:` *Ha* $x \neq t$ *akkor* $S \leftarrow S \cup \{x\}$ *és folytassuk a* `Javítóút-kezdemények növelése` *lépéssel.*

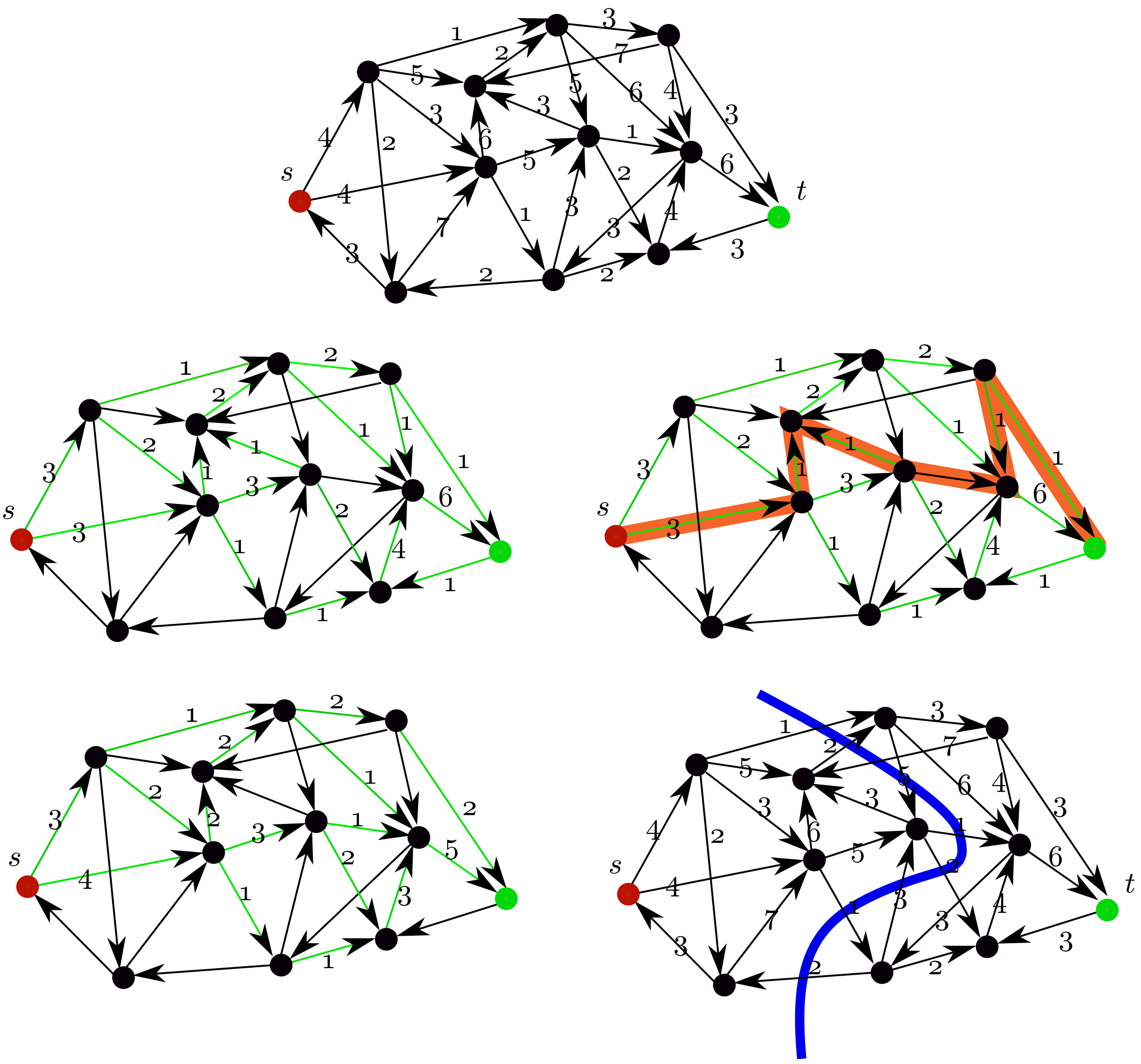
(*ii*) `Javítás:` *Ha* $x = t$ *akkor „nyomozzuk vissza” hogyan jutottunk el ide. Az „ok” egy javítóút lesz. Ez alapján javítsuk* f*-et:* $f \leftarrow \widehat{f}$ *(lásd a javító út definiáióját követő lemmát). Térjünk vissza a* `Keresés inicializálása` *lépésre.*

(*ii*) `Leállás:` $B^{előre} \cup B^{hátra} = \emptyset$.

// Ekkor $t \notin S$*.* S *konkrét értéke megegyezik azon halmazzal, amit a főtétel*

// (ii)⇒(i) bizonyításában szerepelt.

Ekkor STOP, az aktuális folyam értéke maximális.



A következmény igazolása nyilvánvaló a főtétel bizonyítása alapján: Leállás esetén az aktuális S halmaz egy $\mathcal{V} = (S, T)$ vágás ír le. Erre és az aktuális f-re $é(f) = c(\mathcal{V})$, azaz az output korrekt.

Megjegyzés. A fentiek alapján érdemes a Ford—Fulkerson-algorimtust úgy módosítani, hogy leálláskor a kiszámot $\mathcal{V}$ vágást is kiadja. Ez egy olyan vágás lesz, amely előremutató élein kapacitásnyi/maximális anyagmennyiség folyik, míg hátramutató élein nincs visszafolyás. Ez egy laikus számára is mutatja az output korrektségét, abban akkor is megbízhatunk, ha az algoritmus kódolása esetleg nem megbízható.

(Mondjuk a programozó egyetemi évei alatt nem teljesített egy gráfelmélet kurzust sem.)

Az algoritmus javítóutak növelésével próbálja elérni az optimális folyamot. A fenti következmény csak azt mondta, ha az algoritmus leáll, akkor outputja korrekt. Ciklizálhat-e az algoritmus? Azaz elképzelhető-e, hogy javítások végtelen sorozatát kapjuk, így sose érjük el az optimális folyamot. Ciklizálás esetén a kapott folyamsorozat értéke monoton nő és a halaózat által korlátozott. Azaz az értékek sorozata konvergens. A ciklizálásnak két kimenetele lehet. Jobb esetben a kiszámolt folyamok értékei az optimális folyamértékhez konvergálnak. Elképzelhető-e, hogy az algoritmus ciklizál, de a folyamértékek sorozatának limesze nem az optimális folyamérték (hanem nyilván annál kisebb)?

A fenti kérdésekre többféle válasz is adható.

1. válasz: Valóságban a kapacitásfüggvény értékkészlete nem a pozitív valós számok halmaza, hanem $\mathbb{Q}^+$, azaz a pozitív racionális számok halmaza. Ezek a kapacitás értékek (véges sok) skálázhatók úgy, hogy egészek legyenek (gondolhatunk arra, hogy alkalmas mértékegységváltást végzünk vagy a kapacitás értékeket leíró racionális számok közös nevezőjével minden beszorzunk).

Ha a kapacitások egészek és a kiinduló folyam is egészértékű (folyamot leíró függvény értékkészlete $\mathbb{N}$), akkor az algoritmus futása során végig csak egész számokkal dolgozik. Speciálisan $\delta > 0$ is egész lesz, azaz $\delta \geq 1$ (lásd a javítóút definícióját követő lemmát) Azaz a folyam minden javításánál a folyam értéke legalább 1-gyel nő, így nem lehet ciklizálás.

2. válasz: Elméletben elképzelhetjük, hogy pontos, valós aritmetikával dolgozunk. A fenti algoritmus javítóút-kezdemények növelése olyan szabadon van megfogalmazva, hogy tetszőleges javítóút megtalálásához vezet. Azaz sok rövid javítóút létezése esetén is lehetséges, hogy a fenti nem-determinisztikus leírás egy hosszú javítóutat talál meg. Példák adhatók, hogy ekkor elképzelhető az, hogy a kiszámolt folyamok értékeinek monoton növő korlátos sorozata nem az optimális folyamértékhez tart.

3. válasz: Módosítsuk a javítóút keresést a szélessségi keresés filozófiája szerint. Az így kapott algoritmus a Ford—Fulkerson-algoritmus Edmonds—Karp-változata. Ekkor csak a `Javítóút-kezdemények növelése` lépést változtatjuk meg az alábbiak szerint:

Határozzuk meg a $B = B^{\text{előre}} \cup B^{\text{hátra}}$ halmazt.
Ezután három esetet különböztetünk meg:

(i) `Bővítés:` Ha $t \notin B$ akkor $S \leftarrow S \cup B$ és folyatssuk a `Javítóút-kezdemények növelése` lépéssel.

// Ekkor az $S = S_{\text{új}}$ halmaz bővítésénél olyan x csúcsokat kell összegyűjteni,

// amelynél a hozzátartozó y csúcs a $B_{\text{régi}}$ halmazból kerül ki.

(ii) `Javítás:` Ha $t \in B$, akkor az eredeti algoritmus alapján járunk el.

(ii) `Leállás:` Ha $B^{\text{előre}} \cup B^{\text{hátra}} = \emptyset$, akkor az eredeti algoritmus alapján járunk el.

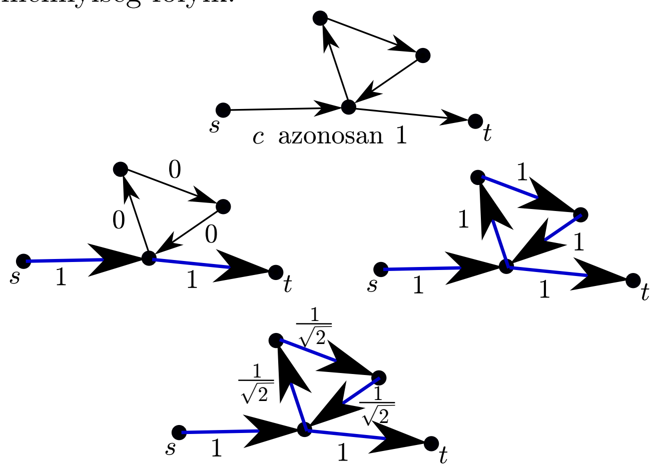
Ez a változat garantálja, hogy a legrövidebb javító utat találjuk meg. Belátható, hogy az Edmonds—Karp-algoritmus (sőt a Ford—Fulkerson-algoritmus minden olyan változata, ami a legrövidebb javítóutakkal javít) olyan, hogy $\mathcal{O}(|V|^4)$ javítás után leáll, speciálisan nincs ciklizálás. Persze a fenti állítás jóval erősebb. A futási idő végessége helyett egy felső becslést ad rá, ami az input méretében polinomiális. A fenti változat egy úgynevezett polinomiális algoritmus. A polinomiális jelző (amit a fenti vázalatos leírás magyaráz meg) az „elméletileg hatékonynak tekintendő” elfogadott formalizálása.

A 1. válasz gondolatmenetéből kapjuk a következő következményt.

11. Következmény. *Legyen $(\overrightarrow{G}, s, t, c)$ hálózat, amelyben $c : E(\overrightarrow{G}) \to \mathbb{N}^+$. Ekkor létezik $f : E(\overrightarrow{G}) \to \mathbb{N}$ optimális folyam.*

Megjegyezzük, hogy nem állítjuk, sőt nem is igaz, hogy minden optimális folyam szükségszerűen olyan, hogy minden élen egész anyagmennyiség folyik.

Példa. H hálózat $c \equiv 1$ kapacitásfüggvénnyel. Három optimális folyammal, amelyek közül kettő különböző, egész értékű és egy harmadik olyan, hogy egyes éleken irracionális anyagmennyiség folyik.



A végső alkalmazásunkhoz jobban megvizsgáljuk az azonosan-1 kapacitású hálózatokat (azaz minden él egy egyencső). Nevezzük az ilyeneket *uniform hálózatoknak*.

Vegyünk egy uniform hálózatot és benne egy $f : E(\overrightarrow{G}) \to \{0, 1\}$ folyamot. Egy ilyen folyam azonosítható $F \subset E(\overrightarrow{G})$ élhalmazzal: $f \mapsto F = \{e : f(e) = 1\}$. Természetesen ez a „kódolás” megfordítható. Adott F élhalmaza is „elolvasható” mint egy $f : E(\overrightarrow{G}) \to \{0, 1\}$ függvény:

$$f(e) = \begin{cases} 1, & e \in F, \\ 0, & e \notin F. \end{cases}$$

Természetesen az így kapott függvény elegettesz a megengedettségi feltételnek (c azonosan 1). A megmaradási törvény is megfogalmazható az élhalmaz gráfelméleti nyelvén.

Definíció. Legyen $\overrightarrow{G}$ irányított gráf, F egy élhalmaza, v egy csúcs. Ekkor $d_F^{ki}(v) = |\{e \in F : vKe\}|$ és $d_F^{be}(v) = |\{e \in F : vBe\}|$.

Észrevétel. Legyen F egy élhalmaz egy uniform hálózatban. F által kódolt $f : E(\overrightarrow{G}) \to \{0, 1\}$ fúggvény akkor és csak akkor teljesítis a megmaradási törvényt, ha minden $v \in V(\overrightarrow{G}) - \{s, t\}$ csúcsra

$$d_F^{ki}(v) = d_F^{be}(v).$$

Példa. Legyen F k darab éldiszjunkt irányított st út élhalmaza. Ekkor F egy folyam az uniform hálózatunkban. Értéke k.

Ez egy naív példa. Ennek ellenére célunk annak igazolása, hogy minden F k értékű folyamban ott van a k éldiszjunkt irányított st út. Így, ha van további él F-ben (ami elképzelhető) akkor azok feleslegesek.

12. Állítás. *Legyen F egy élhalmaz G-ben. A következők ekvivalensek:*

(i) F egy f folyamot ír le.

(ii) Minden nem nyelő és nem forrás v csúcsra $d_F^{ki}(v) = d_F^{be}(v)$.

(iii) F felírható $\dot\cup_i P_i \dot\bigcup \dot\cup_i Q_i \dot\bigcup \dot\cup_i C_i$ alakban, ahol a P_i halmazok egy-egy forrás-nyelő irányított út élhalmaza, a Q_i halmazok egy-egy nyelő-forrás irányított út élhalmaza, a C_i halmazok egy-egy irányított kör élhalmaza. (A jelölésben ott van az a feltétel, hogy az unió tagjai DISZJUNKT élhalmazok.)

Bizonyítás. (i) és (ii) ekvivalenciája nyilvánvaló, ahogy ezt az előző észrevételben leírtuk.

$(iii) \Rightarrow (ii)$ könnyen ellenőrizhető.

Az ekvivalencia „lényege” $(ii) \Rightarrow (iii)$. Ezt egy algoritmussal írjuk le.

1. eset: *F-ben van irányított kör.* Legyen C egy irányított kör élhalmaza. Ekkor $F - C$-re is teljesülnek (ii) fokszám feltételei. Rekurzív módon megkereshetjük $F - C$ felbontását/dekompozícióját, amihez C-t hozzáadva kapjuk a bizonyítandó felbontást F-re.

2. eset: *F-ben nincs irányított kör és F nem üres.* e egy él F-ben. Ekkor a fokszám feltételek miatt e-t előre/hátra kiterjeszthetjük egy P maximális úttá. Ennek két végpontja csak a forrás-nyelő pár lehet. Ekkor $F - P$-re is teljesülnek (ii) fokszám feltételei. Rekurzív módon megkereshetjük $F-P$ felbontását/dekompozícióját, amihez P-t hozzáadva kapjuk a bizonyítandó felbontást F-re.

A teljes (mohó) algoritmus F szétbontására:

```
Amíg F ≠ ∅
   Ha találunk, vegyük ki egy C irányított kör élhalmazát F-ből
   és F-et helyettesítsük F − C-vel.
      // A megtalált C egy lehetőség egy összetevőre.
      // Mohó módon az output részévé tesszük.
   Vegyük ki egy P irányított forrás-nyelő vagy nyelő-forrás út
   élhalmazát és F-et helyettesítsük F − P-vel.
      // A megtalált P egy lehetőség egy összetevőre.
      // Mohó módon az output
   részévé tesszük.
```
■

Az észrevételt egy kissé finomítjuk: Ha a fenti dekompozícióban k darab st-út, ℓ darab ts-út szerepel, akkor a megfelelő f folyamra érték$(f) = k - \ell$. Speciálisan, ha f egy optimális folyam, akkor $\ell = 0$. Sőt optimalitás esetén F dekompozíciójából elhagyhatók az irányított körök (amennyiben szerepelnek). Így egy F_0 szintén optimális folyamot kódoló élhalmazt kapunk.

Nevezzünk egy élhalmazt *egyszerűnek*, ha nincs benne irányított kör. Ekkor minden dekompozíciójában vagy csak st utak vagy csak ts utak szerepelnek. Minden folyamot leíró élhalmaz kiritkítható úgy, hogy egyszerű legyen, folyam maradjon és értéke ne változzon. A fenti megállapításainkat a következőképpen összegezhetjük.

13. Lemma. *Legyen $(\overrightarrow{G}; s, t; c)$ egy uniform hálózat. Ekkor van olyan optimális folyam, amely egy egyszerű élhalmazzal azonosított. A maximális folyamérték éppen az egyszerű dekompozícióban az st-utak száma.*

Bizonyítás. Hálózatunk kapacitásfüggvénye csak egész (igazából csak 1) értéket vesz fel. Így az optimális folyamok között van olyan, amely leírásában az értékkészlet $\{0, 1\}$. Azaz azonosítható egy F élhalmazzal. A fentiek alapján erről az élhalmazról feltehető, hogy egyszerű, azaz éldiszjunkt st irányított utak élhalmazinak uniója. Azaz folyamunk a naív példa egy esete. ■

Definíció. Egy uniform hálózatban egy élhalmazt *szeparáló/elvágó élhalmaznak* nevezünk, ha elhagyása után nem lesz irányított st út G-ben.

Példa. Legyen $\mathcal{V} = (S, T)$ egy vágás a hálózatban. Ekkor $\overrightarrow{E}(\mathcal{V})$ egy szeparáló élhalmaz.

Valóban minden st irányított úton végighaladva lesz egy él/ lépés, ami S-beli csúcsból indul ki és T-beli csúcshoz vezet (az út első csúcsa S-beli, utolsó csúcsa T-beli). Egy ilyen él $\overrightarrow{E}(\mathcal{V})$-beli él. Tehát $\overrightarrow{E}(\mathcal{V})$ éleit elhagyva nem maradhat st irányított út.

Példánk megint univerzális az alábbi értelemben:

14. Állítás. *Bármely L szeparáló élhalmaznak van olyan részhalmaza ami egy vágás élhalmaza.*

Bizonyítás. Valóban

$$\mathcal{V} = (s\text{-ből } \overrightarrow{G} - L\text{-ben elérhető csúcsok, } s\text{-ből } \overrightarrow{G} - L\text{-ben nem elérhető csúcsok})$$

vágás esetén $\overrightarrow{E}(\mathcal{V})$ élhalmaz L egy részhalmazát adják. ■

Ezekután már könnyen kapjuk az alábbi következményt:

15. Tétel (Menger-tétele). *$\overrightarrow{G}$ egy irányított gráf $s, t \in V$ két ($s \neq t$) kitüntetett csúccsal. Ekkor*

$$\begin{aligned}\max\{k : & P_1, \ldots, P_k \textit{ éldiszjunkt st utak}\} = \\ & = \min\{|L| : L \subseteq E(\overrightarrow{G}), \overrightarrow{G} - L\textit{-ben nincs } \overrightarrow{st} \textit{ út}\}.\end{aligned}$$

Megjegyzés. A tételt a következő „mesével” világíthatjuk meg: Tegyük fel, s lakótelep, t belváros, a rendőrök tudják, hogy bünözők a lakótelepről a belvárosba tartanak. Utak lezárásával szeretnék ellenőrizni a belvárosba bemenő forgalmat (amely a kresz betartásával történik, azaz az útszakaszok irányítása szerint halad mindenki). A bizonyítandó állítás bal oldala a bünözők független terveinek maximális száma, míg a jobb oldal a rendőrök számára lezárandó útszakaszok minimális száma.

Bizonyítás. $\leq$: Egyszerű. A fenti mesén alapuló konkrét példa jól megvilágítja az állítást. Tegyük fel, hogy a bal oldal értéke 10. Azaz a bünözők 10 éldiszjunkt tervvel állhatnak elő. Minden útlezárás legfeljebb egy tervet akadályozhat meg (itt használjuk a tervek függetlenségét/éldiszjunktságát). Azaz a rendőrök számára legalább 10 út lezárása szükséges.

A $\geq$ irány a tétel lényege. Igazából a teljes állítás könnyen következik az MFMC tételből:

A feladat gráfjában minden él kapacitása legyen 1. Az így kapott H uniform hálózatban az optimális folyamok közt lesz egy, amely egy egyszerű élhalmazzal azonosítható. Ha értéke k, akkor k éldiszjunkt st útra szétszedhető. Ez megfordítva is igaz. k éldiszjunkt st útból összerakható egy k értékű folyam. Azaz

$$\max\{k : P_1, \ldots, P_k \text{ éldiszjunkt } st \text{ utak}\} = \max\{\text{é}(f) : F \text{ folyam } H\text{-ban}\}$$

Egy szeparáló élhalmaz tartalmazza egy vágás forrás-nyelő éleit. Láttuk ennek megfordítását is. Egy vágás forrás-nyelő éleinek száma egy uniform hálózatben éppen a kapacitása. Azaz

$$\min\{c(\mathcal{V}) : \mathcal{V} \text{ egy } st\text{-vágás}\} = \min\{|L| : L \subseteq E(\overrightarrow{G}), \overrightarrow{G} - L\text{-ben nincs } \overrightarrow{st} \text{ út}\}.$$

Az MFMC-tétel következménye a Menger-tétel. ■

A tételben az alapgráf irányítottsága nem lényeges.

16. Következmény (Menger tétele (irányítatlan gráfban élfüggetlen utakra vonatkozó változat)). *Legyen G egy irányítatlan gráf, és s, t két pont a gráfban. Ekkor*

$$\begin{aligned}\max\{k : &P_1, \ldots, P_k \textit{ éldiszjunkt } st \textit{ utak}\} = \\ &= \min\{|L| : L \subset E(G), G - L\textit{-ben nincs } st \textit{ út}\}.\end{aligned}$$

Csak vázoljuk ennek egy lehetséges igazolását: Legyen $\overrightarrow{G}$ az a gráf, amelyet G-ből úgy kapunk, hogy minden $e = xy$ élét helyettesítjük két éllel: egy $\overrightarrow{xy}$ és egy $\overrightarrow{yx}$ éllel (azaz az e él oda-vissza irányított két példányával). Írjuk fel az MFMC-tételt.

A maximális folyamérték kombinatorikus leírásánál kell egy kissé óvatosnak lennünk. Vegyünk egy $f : E(\overrightarrow{G}) \to \{0, 1\}$ optimális folyamot és az ezt leíró F élhalmazt. Erről feltehető, hogy egyszerű. Speciálisan egyetlen eredeti élt helyettesítő oda-vissza élpár nem lesz benne. Így a megfelelő utak visszavetítése az eredeti gráfba éldiszjunkt utakat ad. Azaz a maximális folyamérték éppen a bizonyítandó egyenlőség bal oldala.

A további része a bizonyításnak teljesen analóg az irányított esettel.

Továbbá útrendszerünk éldiszjunktsága helyettesíthető az útrendszer belső ponthalmazainak páronkénti diszjunktságára vonatkozó feltétellel.

17. Következmény (Menger tétele (pontfüggetlen utakra vonatkozó változatok)).

(i) Legyen $\overrightarrow{G}$ egy irányított gráf, és legyen s, t két pont a gráfban. Tegyük fel, hogy nincs $\overrightarrow{st}$ irányított él a gráfban. Ekkor

$$\begin{aligned}\max\{k : &P_1, \ldots, P_k \textit{ pontfüggetlen } \overrightarrow{st} \textit{ út}\} = \\ &= \min\{|U| : U \subseteq V(\overrightarrow{G}) \setminus \{s, t\} \textit{ és } G - U\textit{-ban nincs } \overrightarrow{st} \textit{ út}\}.\end{aligned}$$

(ii) Legyen G egy irányítatlan gráf, és legyen s, t két pont a gráfban. Tegyük fel, hogy nincs st él a gráfban. Ekkor

$$\begin{aligned}\max\{k : &P_1, \ldots, P_k \textit{ pontfüggetlen } st \textit{ út}\} = \\ &= \min\{|U| : U \subseteq V(\overrightarrow{G}) \setminus \{s, t\} \textit{ elválasztja } s\textit{-et és } t\textit{-t}\}.\end{aligned}$$

Ismét csak vázoljuk mi a teendő, ha ezen változatot szeretnénk a fentiek után igazolni.

(i)-hez legyen $\overrightarrow{G}'$ az a gráf amely $\overrightarrow{G}$-ből nyerünk a következő módon: Legyen $V(\overrightarrow{G}') = \{s,t\} \cup \{x_{\mathrm{be}}, x_{\mathrm{ki}} : x \in V(\overrightarrow{G}) - \{s,t\}\}$. Minden $e = \overrightarrow{xy} \in E(\overrightarrow{G})$ élnek feleljen meg egy $e' = \overrightarrow{x_{\mathrm{ki}}, y_{\mathrm{be}}}$ él (legyen $s_{\mathrm{ki}} = s_{\mathrm{be}} = s$ és $t_{\mathrm{ki}} = t_{\mathrm{be}} = t$). $E(\overrightarrow{G}')$ élhalmazt alkossák ezek az élek és az $\{\overrightarrow{x_{\mathrm{be}}x_{\mathrm{ki}}} : x \in V(\overrightarrow{G}) - \{s,t\}\}$ élek.

Írjuk fel az MFMC-tételt $\overrightarrow{G}'$ gráfra. A kapott két egyenlőség két oldaláról lássuk be, hogy a bizonyítandó egyenlőség egy-egy oldalával egyenlők.

(ii)-hez korábbi ötleteinket kell összegezni. A részletek kidolgozását az érdeklődő hallgatókra bízzuk.

4. k-szorosan élösszefüggő és k-szorosan összefüggő gráfok jellemzése

18. Tétel. *Legyen G gráf, k pozitív egész.*

(i) G akkor és csak akkor k-szorosan élösszefüggő, ha bármely $x, y \in V(G)$-re létezik k darab páronként éldiszjunkt xy út G-ben.

(ii) G akkor és csak akkor k-szorosan összefüggő, ha $|V(G)| > k+1$, és bármely x, y csúcsra létezik k darab páronként pontfüggetlen xy út G-ben, azaz utak, amelyek belső pontjainak halmazai páronként diszjunktak.

Bizonyítás. Legyen G, x, y és k adott.

(i) Ha létezik tetszőleges x és y csúcsra létezik k darab éldiszjunkt xy út G-ben, akkor $k-1$ él elhagyásával még el lehet jutni x-ből y-ba, ezért G k-szorosan élösszefüggő.

Tegyük fel, hogy G k-szorosan élösszefüggő, és alkalmazzuk a Menger-tételt.

$$\begin{aligned} k \leq & \min\{|L| : \ L \subseteq E(G), G - L\text{-ben nincs } xy \text{ út}\} = \\ = & \max\{\ell : P_1, \ldots, P_\ell \text{ éldiszjunkt } xy \text{ utak}\} \end{aligned}$$

Ezért létezik k darab éldiszjunkt xy út G-ben.

(ii) Először tegyük fel, hogy tetszőleges x és y csúcsra létezik k darab pontfüggetlen xy út G-ben. Hagyjunk el k-nál kevesebb pontot G-ből. A maradékban levő tetszőleges u és v csúcsok közt eredetileg meglévő k pontfüggetlen utak valamelyike megmaradt, ezért G k-szorosan összefüggő.

Fordítva tegyük fel, hogy G k-szorosan összefüggő. Legyen az xy élek halmaza P, P elemszáma p. A P-beli élek pontfüggetlen xy utak. Ha $p \geq k$, akkor teljesül az állítás. Ha $p \leq k-1$, akkor $G-P$ $k-p$-szeresen összefüggő, azt kell belátni, hogy létezik $k-p$ pontfüggetlen xy út $G-P$-ben. Alkalmazzuk a Menger-tételének irányítatlan csúcs változatát ($G-P$-ben x és y nem szomszédos):

$$\begin{aligned} k - p \leq & \min\{|U| : \ U \subseteq V(G) \setminus \{x,y\}, \ G - P - U\text{-ban nincs } xy \text{ út}\} = \\ = & \max\{l : \ P_1, \ldots P_l \text{ pontfüggetlen } xy \text{ utak } G - P\text{-ben}\} \end{aligned}$$

Ezért létezik $k-p$ darab pontfüggetlen xy út $G-P$-ben, így k darab G-ben. ■

Definíció. A G gráf összefüggőségi paraméterei:

$$\kappa_e(G) = \begin{cases} \max\{k:\ G\ k\text{-szorosan élösszefüggő}\}, & \text{ha } G \text{ összefüggő} \\ 0, & \text{ha } G \text{ nem összefüggő} \end{cases}$$

$$\kappa(G) = \begin{cases} \max\{k:\ G\ k\text{-szorosan összefüggő}\}, & \text{ha } G \text{ összefüggő} \\ 0, & \text{ha } G \text{ nem összefüggő} \end{cases}$$

Észrevétel. Minden G gráfra teljesülnek a következők:

$$\begin{aligned} \kappa_e(G) &= \min_{x,y\in E(G)} \max\{k:\ P_1, ...P_k \text{ éldiszjunkt } xy \text{ utak}\} = \\ &= \min_{x,y\in E(G)} \min_{\mathcal{V}\ xy \text{ vágás}} |E(\mathcal{V})| = \min_{\mathcal{V} \text{ vágás}} |E(\mathcal{V})|, \end{aligned}$$

ahol $\mathcal{V} = \{S, T\}$, $S \cup T = V(G)$, $S \cap T = \emptyset$, $S, T \neq \emptyset$.

19. Lemma. *$\kappa_e(G)$ és $\kappa(G)$ is hatékonyan kiszámolható.*

Bizonyítás. Csak κ_e kiszámítására vázolunk egy algoritmust. Legyen $\kappa_e(G; x, y) = \max\{k:\ P_1, ...P_k \text{ éldiszjunkt } xy \text{ utak}\}$. Ez minden x, y csúcsra folyam-algoritmussal kiszámolható. Így $\kappa_e(G) = \min_{x,y\in V} \kappa_e(G; x, y)$ is számolható. ∎

Megjegyzés. $\max\limits_{\mathcal{V} \text{ vágás}} |E(\mathcal{V})|$ kiszámítása nehéz, $\mathcal{NP}$-teljes probléma.