ALGORITMUSOK ÉS BONYOLULTSÁGELMÉLET

Matematika MSc hallgatók számára

9. Előadás: $\mathcal{P}$ és $\mathcal{PSPACE}$ között

Előadó: Hajnal Péter 2015. tavasz

1. Egy $PSPACE$-teljes probléma

Definíció (kvantifikált Boole-formula probléma, QBF). Legyen a φ Boole-formula a következő alakú: $\varphi(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n)$. Ekkor a

$$\forall x_1 \exists y_1 \forall x_2 \exists y_2 \ldots \forall x_n \exists y_n \varphi(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n)$$

vagy igaz, vagy hamis. A probléma az, hogy döntsük el, hogy melyik.

1. Tétel. *QBF $\mathcal{PSPACE}$-teljes, vagyis*

- *(i) QBF $\in \mathcal{PSPACE}$*
- *(ii)* $\forall L \in \mathcal{PSPACE} : L \prec_{\mathcal{P}} QBF$

Bizonyítás. Azt látjuk be, hogy QBF $\mathcal{NPSPACE}$-teljes. Ez a tétel állítása, hiszen tudjuk, hogy $\mathcal{NPSPACE} = \mathcal{PSCPACE}$.

(i) Könnyen belátható.

(ii) Ahogy általában a tár korlátozott döntéseknél tettük, egy tetszőleges $L \in_T \mathcal{NPSPACE}$ nyelvre az ω L-hez tartozásának döntési feladatát visszavezethetjük az ELÉRHETŐSÉG eldöntésére a ($G_{T,\omega}$, START, ELFOGAD) input esetén, ahol $G_{T,\omega}$ a redukált konfigurációk gráfja:

$$\omega \in L \Leftrightarrow \text{ létezik START-ELFOGAD (irányított) út } G_{T,\omega}\text{-ban.}$$

$G_{T,\omega}$ egy 2^{n^α} pontszámú gráf. Egy csúcs kódja logaritmikus a csúcsok számában. Vagyis mindegyik csúcs n^α hosszban kódolható.

Persze nem az ELÉRHETŐSÉG inputját gyártjuk le. Ennek „költsége" $\mathcal{PSPACE}$, ami megegyezik L bonyolultságával, így nincs értelme. (A gondolatmenet $\mathcal{NL}$ és $\mathcal{L}$ viszonyában működött.)

Az „igazi" visszavezetés egy formulát gyárt le. Ehhez szükségünk lesz néhány jelölésre.

Jelölés. Legyen $N := n^\alpha$.

$u \overrightarrow{\sim} v$ jelölje azt, hogy alapgráfunkban u-ból elérhető (irányított értelemben) a v csúcs.

$u \overrightarrow{\sim}_{\leq i} v$ jelölje azt, hogy alapgráfunkban u-ból legfeljebb i lépéssel elérhetünk v-be.

Esetünkben az alapgráf $G_{T,\omega}$, pontszáma 2^N. Így $u \overrightarrow{\sim} v$ akkor és csak akkor, ha $u \overrightarrow{\sim}_{\leq 2^N} v$.

Az alapötletünk az, hogy felosztjuk az utunkat két részre egy középső k csúccsal, előbb csak egy k csúcsig megyünk el START-ból maximum 2^{N-1} lépésben, majd onnan szintén maximum 2^{N-1} lépésben ELFOGAD-ig.

Eddigi ötleteink formalizálva:

$$\omega \in L \quad \Leftrightarrow \quad \text{START} \overrightarrow{\sim}_{\leq 2^N} \text{ELFOGAD},$$
$$\text{START} \overrightarrow{\sim}_{\leq 2^N} \text{ELFOGAD} \quad \Leftrightarrow \quad \exists_V k (\text{START} \overrightarrow{\sim}_{\leq 2^{N-1}} k) \wedge (k \overrightarrow{\sim}_{\leq 2^{N-1}} \text{ELFOGAD}).$$

Az összes csúcs (START,k,ELFOGAD) N (n-ben polinomiális) hosszú bitsorozattal kódolt. A $\exists_V k$ azt jelenti, hogy N hosszú kódszavak (csúcsokat kódoló bitsorozatok) között létezik. Azaz N darab, bitekre vonatkozó egzisztenciális kvantor sorozata.

Gondolhatunk arra, hogy nincs mit tenni csak iterálni kell ezeket az ötleteket. Formulánkban két helyen is szerepel az $\overrightarrow{\sim}_{\leq 2^{N-1}}$ reláció. Iterálásnál (N mélységre van szükségünk) a formula nagysága exponenciálisan nagy lenne. Még egy ötletre van szükségünk. A fenti formulánk ekvivalens azzal, hogy

$$\exists_V k \forall_V c \forall_V c' : (c = \text{START} \wedge c' = k) \vee (c = k \wedge c' = \text{ELFOGAD}) \rightarrow c \overrightarrow{\sim}_{\leq 2^{N-1}} c'.$$

Ezt a gondolatmenetet iterálva már a kapott formula mérete polinomiális lesz. $N = n^\alpha$ iterálás kell és mindegyik csak hozzáad a fomrulához egy polinomiális hosszú új részt. A bizonyítás befejezéseként csak ellenőrizzük, hogy az iteráció elindul: Az iteráció legmélyén lévő formulák: $u \overrightarrow{\sim}_{\leq 1} v$ azt jelentik, hogy '$u = v$ vagy u-ból vezet él v-hez'. Ez egy egyszerű (kvantor nélküli) Boole-formulával megfogalmazható reláció.

Az $\exists_V v$ jelölés csalóka. v N darab bittel kódolt, ezek mindegyike létezik kvantorral kötött. Úgy tűnik, hogy az alternáló kvantorok feltétele nem teljesül. Nincs probléma. Új változók bevezetésével a kvantorok alternálása megoldható. Ha az új változókat csak kvantifikált formában használjuk, akkor nem befolyásolják a formula logikai értékét. ■

Megjegyzés. A QBF feladat inputjában nem az volt a fontos, hogy a létezik kvantor után egy minden kvantor következik és fordítva, hanem az, hogy kvantorok váltakozásának száma tetszőlegesen nagy lehet.

Az

$$\mathcal{NL} \subset \mathcal{P} \subset \mathcal{NP} \subset \mathcal{PSPACE}$$

osztályok mindegyikére találtunk teljes problémát. Azaz olyan problémákat, amelyek tükrözik a nyelvosztály teljes nehézségét. Ha ezekről a teljes problámákról tudunk valami „okosat" mondani, akkor az egész osztályról kapunk fontos információt.

A következőkben a $\mathcal{P}$ és $\mathcal{PSPACE}$ osztályok közötti részt nézzük meg „finomabban".

2. További osztályok, polinomiális hierarchia

Emlékeztető. Akkor mondjuk, hogy $L \in \mathcal{NP}$, ha létezik olyan tanúszalagos (nemdeterminisztikus) T Turing-gép, ami úgy működik, hogy pontosan az L-beli ω szavakhoz létezik τ tanúszalag-tartalom úgy, hogy $T(\omega, \tau)$ ELFOGAD állapottal és ω hosszában polinomiális időben leáll. Formálisan:

$$\begin{aligned} L \in \mathcal{NP} \quad \Longleftrightarrow \quad & \text{van olyan } T \text{ nem-determinisztikus Turing-gép, hogy} \\ & T \text{ polinomiális } |\omega|\text{-ban és} \\ & \omega \in L \quad \Leftrightarrow \quad \exists \tau : \ T(\omega, \tau) \text{ elfogadó} \end{aligned}$$

Emlékeztető. Akkor mondjuk, hogy $L \in co\,\mathcal{NP}$, azaz $\overline{L} \in \mathcal{NP}$, ha létezik olyan tanúszalagos (nemdeterminisztikus) T Turing-gép, ami úgy működik, hogy pontosan az L-beli ω szavakhoz nem létezik τ tanúszalag-tartalom úgy, hogy $T(\omega, \tau)$ ELFOGAD állapottal áll le ω hosszában polinomiális időben. Formálisan:

$$\begin{aligned} L \in co\,\mathcal{NP} \iff & \text{ van olyan } T \text{ nem-determinisztikus Turing-gép, hogy} \\ & T \text{ polinomiális } |\omega|\text{-ban és} \\ & \omega \in L \quad \Leftrightarrow \quad \forall \tau: \ \ T(\omega, \tau) \text{ elvető} \end{aligned}$$

Definíció ($\Sigma_i\mathcal{P}$ nyelvosztály).

$$\begin{aligned} L \in \Sigma_i\mathcal{P} \iff & \exists T \text{ polinomiális Turing-gép, melyre } \exists\tau_1, \forall\mu_2, \exists\tau_3, \ldots, QX_i \text{ úgy,} \\ & \text{hogy } \omega \in L \Leftrightarrow T(\omega, \tau_1, \mu_2, \tau_3, \ldots, X_i) \text{ ELFOGADÓ,} \\ & \text{ahol } Q = \begin{cases} \exists, & \text{ha } i \text{ páratlan,} \\ \forall, & \text{ha } i \text{ páros.} \end{cases} \text{ és } X_i = \begin{cases} \mu_i, & \text{ha } i \text{ páros,} \\ \tau_i, & \text{ha } i \text{ páratlan,} \end{cases} \end{aligned}$$

Definíció $\Pi_i\mathcal{P}$ nyelvosztály.

$$\begin{aligned} L \in \Pi_i\mathcal{P} \iff & \exists T \text{ polinomiális Turing-gép, melyre } \forall\mu_1, \exists\tau_2, \forall\mu_3, \ldots, QY_i \text{ úgy,} \\ & \text{hogy } \omega \in L \Leftrightarrow T(\omega, \mu_1, \tau_2, \mu_3, \ldots, Y_i) \text{ ELFOGADÓ,} \\ & \text{ahol } Q = \begin{cases} \exists, & \text{ha } i \text{ páros,} \\ \forall, & \text{ha } i \text{ páratlan.} \end{cases} \text{ és } Y_i = \begin{cases} \mu_i, & \text{ha } i \text{ páratlan,} \\ \tau_i, & \text{ha } i \text{ páros,} \end{cases} \end{aligned}$$

Észrevétel.

- $\Pi_0\mathcal{P} = \Sigma_0\mathcal{P} = \mathcal{P}$.
- $\Sigma_1\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.
- $\Pi_1\mathcal{P} = co\,\mathcal{NP}$.
- $\mathcal{P} = \Sigma_0\mathcal{P} = \Pi_0\mathcal{P} \subseteq \Sigma_1\mathcal{P},\ \Pi_1\mathcal{P} \subseteq \Sigma_2\mathcal{P} \cap \Pi_2\mathcal{P} \subseteq \Sigma_2\mathcal{P},\ \Pi_2\mathcal{P} \subseteq \Sigma_3\mathcal{P} \cap \Pi_3\mathcal{P} \subseteq \Sigma_3\mathcal{P},\ \Pi_3\mathcal{P} \subseteq \ldots \subseteq \Sigma_n\mathcal{P} \cap \Pi_n\mathcal{P} \subseteq \Sigma_n\mathcal{P},\ \Pi_n\mathcal{P} \subseteq \Sigma_{n+1}\mathcal{P} \cap \Pi_{n+1}\mathcal{P} \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{PSPACE}$.

Definíció (Polinomiális hierarchia, $\mathcal{PH}$). $\mathcal{PH} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \Pi_i\mathcal{P} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \Sigma_i\mathcal{P}$.

Észrevétel. A definíció második egyenlősége tulajdonképpen egy állítás, aminek a bizonyítása egy egyszerű meggondolás, ahol azt kell belátni, hogy a jobb oldali felülről becsüli a bal oldalit, és fordítva.

2.1. Példák

A következőkben példákat mutatunk olyan problémákra, amleyek a polinomiális hierarchiából jönnek.

Az első példához szükségünk lesz a konjuktív normálformákról tanultakra, ezért elevenítsük fel ezeket.

Definíció. A φ formula konjuktív normálforma (CNF), ha előáll

$$\varphi = \bigwedge_{i=1}^{l} C_i$$

alakban, ahol minden C_i klóz literálok diszjunkciója, azaz

$$C_i = \bigvee_{j=1}^{l_i} l_j^{(i)}.$$

A φ CNF felfogható úgy is, mint egy $\{C_i\}$ klózhalmaz, és minden klóz értelmezhető úgy, mint egy $\{l_i\}$ literálhalmaz. Ez utóbbi meggondolás alapján a φ CNF hosszán a $|\varphi| = \Sigma_i |C_i|$ számot értjük. Például, ha $\varphi = (x \vee y \vee \neg t) \wedge (\neg x \vee z) \wedge (z \vee \neg w \vee \neg u) \wedge u$, akkor $|\varphi| = 3 + 2 + 3 + 1 = 9$.

Példa. Legyen OPT-CNF az a probléma, hogy egy φ CNF-fel kapcsolatban azt akarjuk igazolni, hogy a φ által leírt Boole-függvényt nem tudjuk $|\varphi|$-nál kisebb méretű CNF-fel megfogalmazni, azaz a φ a lehető legrövidebben írja le a Boole-függvényt.

- OPT-CNF $\in \mathcal{PSPACE}$

  Ennek a bizonyítására adható egy olyan naív algoritmus, mellyel megvizsgálunk minden szóba jöhető lehetőséget. Így tulajdonképpen exponenciálisan sok lehetőséget írunk a munkaszalagra, viszont ezek felülírhatók, ezért elég a polinomtár. Csak azokból a változókból építkezünk, amik φ-ben is vannak, kiválasztunk bizonyos kisebb méretű literál-részhalmazokat, és az összes értékadásra teszteljük, és azt kell tapasztalnunk, hogy minden $|\varphi|$-nél kisebb méretű ψ CNF esetén van olyan kiértékelés, amire ψ és φ értéke különbözik.

- A probléma formalizált változata a következő:

$$\ulcorner\varphi\urcorner \in \text{OPT-CNF} \iff \forall \ulcorner\psi\urcorner \text{ CNF-hez } \exists \ulcorner\upsilon\urcorner \text{ kiértékelés úgy, hogy } (|\psi| < |\varphi| \Rightarrow \psi(\upsilon) \neq \varphi(\upsilon)).$$

  Emlékezzünk vissza az fejezet elején felelevenített definíciókra. Ott $\exists\tau$ és $\forall\tau$ szerepel. Ez is hasonló probléma, csak itt két kvantorok szerepel/alternál.

- A probléma „valahol $\mathcal{P}$ és $\mathcal{PSPACE}$ között” található.

Példa. Legyen PONTOS_FGTLEN_CSÚCSOK az a probléma, hogy egy adott G gráfról és egy adott t számról azt akarjuk igazolni, hogy a G gráfban lévő független csúcsok maximális száma pontosan t, azaz

$$\text{PFC} := \text{PONTOS\_FGTLEN\_CSÚCSOK} = \{\ulcorner G, t\urcorner : \ \alpha(G) = t\}.$$

- A probléma formalizált változata a következő:

$$\ulcorner G, t\urcorner \in \text{PFC} \iff (\exists I \subseteq V(G) : \ I \text{ független és } t = |I|) \bigwedge (\forall I \subseteq V(G) : \ I \text{ független} \rightarrow |I| \leq t).$$

Azt vehetjük észre, hogy a konjukció bal oldalán álló probléma $\mathcal{NP}$-beli, a jobb oldalán álló pedig *co* $\mathcal{NP}$-beli. Mindkét kvantorra szükségünk van, továbbá

$$\text{PONTOS\_FGTLEN\_CSÚCSOK} \in \mathcal{PSPACE},$$

viszont a PFC $\in \mathcal{NP}$ és PFC $\in$ *co* $\mathcal{NP}$ megállapítások közül egyiket sem mondhatjuk biztosnak. (A probléma ugyan $\mathcal{PSPACE}$-en belül van, viszont úgy érezzük, hogy $\mathcal{NP}$-n és *co* $\mathcal{NP}$-n kívül.)

Definíció. Legyen $\mathcal{H}$ egy halmazrendszer V felett, azaz $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{P}(V)$. Bevezetjük a $\mathcal{H}$-nak az A-beli nyomát:

$$\text{Trace}_A\mathcal{H} = \{A \cap E :\ E \in \mathcal{H}\},\ \text{ahol } A \subseteq V.$$

Nyilván $\text{Trace}_A\mathcal{H} \subseteq \mathcal{P}(A)$. Az A ponthalmazt telítettnek nevezzük, ha $\text{Trace}_A\mathcal{H} = \mathcal{P}(A)$. Most már definiálhatjuk a Vapnyik—Cservonyenszki-dimenziót:

$$\text{VCs-dim}\mathcal{H} = \max\{|A| :\ A \text{ telített}\}.$$

Észrevétel. A Vapnyik—Cservonyenszki-dimenzió a matematika sok területén előfordul, például a geometriában, kombinatorikában, mesterséges intelligenciában, illetve a statisztikában is. A dimenzió névadói is statisztikusok voltak.

Példa. Legyen VCS-DIM az a nyelv, hogy egy adott $\mathcal{H}$ halmazrendszerről és egy adott k számról azt akarjuk igazolni, hogy $\mathcal{H}$ VCs-dimenziója legalább k, azaz

$$\text{VCS-DIM} = \{\ulcorner V, \mathcal{H}, k \urcorner :\ \text{VCs-dim}\mathcal{H} \geq k\}.$$

- A halmazrendszereket tömör kódolással kódoljuk.
- A $\ulcorner V, \mathcal{H}, k \urcorner$ hármasban a $(V, \mathcal{H})$ pár tulajdonképpen felfogható egy $C_{\mathcal{H}}$ hálózatnak, ahol a $v \in V$ csúcsok $\log|V|$ biten kódolhatók, az $E \in \mathcal{H}$ élek pedig $\log|\mathcal{H}|$ biten, és $C_{\mathcal{H}}$ kiszámolja, hogy v eleme-e E-nek. Ilyen kódolásnál a véletlen séta generálása rendkívül gyorsan megy, még egy milliószor milliós szomszédségi mátrix-szal megadható gráf esetén is.
- A probléma formalizált változata a következő:

$$\ulcorner V, \mathcal{H}, k \urcorner \in \text{VCS-DIM} \Longleftrightarrow \exists A\, \forall R\, \exists E\ \left(|A| = k \bigwedge (R \subseteq A \Rightarrow R = A \cap E)\right).$$

- VCS-DIM $\in \mathcal{PSPACE}$.

3. Alternáló polinomiális idő

Definíció (Alternáló polinomiális idő, $\mathcal{AP}$).

$$\begin{aligned} L \in \mathcal{AP} \iff\ & \exists T \text{ Turing-gép, melyre } \exists\tau_1, \forall\mu_1, \exists\tau_2, \forall\mu_2, \ldots, \exists\tau_N, \forall\mu_N \text{ úgy,} \\ & \text{hogy } \omega \in L \Leftrightarrow T(\omega, \tau_1, \mu_1, \ldots, \tau_N, \mu_N) \text{ ELFOGADÓ,} \\ & T \text{ polinomiális } |\omega|\text{-ban.} \end{aligned}$$

Megjegyzés. A gép polinomialitásából következik, hogy N is legfeljebb polinomiális. Lehetséges, hogy N függ $|\omega|$-tól. Ez egy többlet a polinomiális hierarchiához képest.

2. Tétel. *(i)* $\mathcal{PH} \subseteq \mathcal{AP}$.

(ii) $\mathcal{AP} = \mathcal{PSPACE}$.

Bizonyítás. (Vázlat)

A tétel (i) része triviális.

A (ii) rész bizonyításához azt kell kihasználnunk, hogy QBF $\in \mathcal{PSPACE}$ és QBF $\in \mathcal{AP}$. Tudjuk, hogy a QBF az $PSPACE$-teljes és könnyen belátható, hogy a QBF nyelv $\mathcal{AP}$-teljes is. Korábban tanult dolgokat kell alkalmazni, például egy Turing gépet átírni Boole-formulává polinomidőben, megfelelő hálózatot gyártani, ahogy ezeket már korábban megcsináltuk. Továbbá, visszavezetések alkalmazásával kijön, hogy $\mathcal{AP} \subseteq \mathcal{PSPACE}$ és $\mathcal{AP} \supseteq \mathcal{PSPACE}$, és ebből már következik a köztük lévő egyenlőség. ■