ALGORITMUSOK ÉS BONYOLULTSÁGELMÉLET

Matematika MSc hallgatók számára

2. Előadás: Nyelvosztályok

Előadó: Hajnal Péter 2015. tavasz

Emlékeztető. Az előző előadásban bevezettünk egy számítási modellt, amelyet a későbbiek során *standard modellnek* fogunk nevezni. Elevenítsük fel a modell részeit!

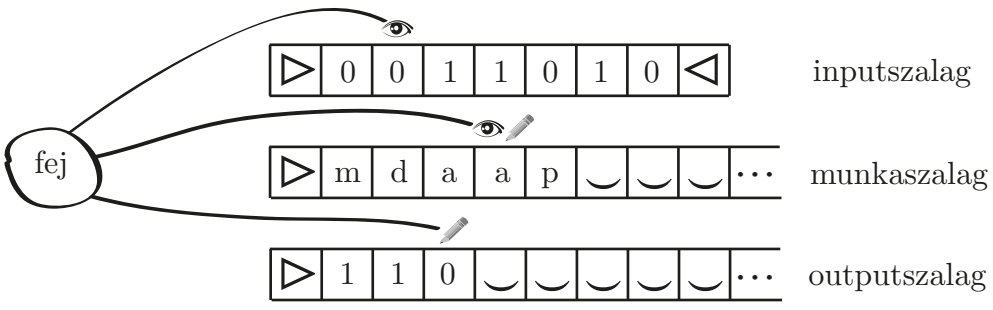
A standard modellben a számításokhoz három eltérő funkcióval rendelkező szalagot használunk. Ezek egy irányban (általában jobbra) végtelen mezősorozatok, a nevük: inputszalag, munkaszalag, outputszalag. A Turing-gép feje a szalagok jellegétől függően a mezők leolvasását és felülírását végzi. Az *inputszalag* a Σ ábécé karaktereiből álló véges hosszúságú *szót* tartalmazza $\triangleright$ és $\triangleleft$ szimbólumok között, amelyek az input kezdetét és végét jelzik. A fej karakterenként látja az inputot egy szemmel, amely az inputszalagon mindkét irányban képes mozogni. A *munkaszalag* első mezője szintén a szalag kezdetét jelölő $\triangleright$ „bevésett" (nem felülírható) karaktert tartalmazza. A szalag mezőibe a Γ-val jelölt ún. *munkaábécé* karaktereit írhatjuk. A fej a munkaszalag mezőit egy jobbra-balra együtt mozgó szemmel és „ceruzát tartó" kézzel olvassa, ill. írja. Végül az ugyancsak $\triangleright$ jellel kezdődő *outputszalagra* kerül a számítás eredménye, melyen a fej egy „ceruzát tartó" kézzel ír, a mezőkön egyenként jobbra haladva. A fejnek egy fontos jellemzője az állapota, amely a véges S állapothalmaz eleme.

A Turing-gép működését az f átmeneti függvény szabja meg. Ennek értelmezési tartományát az ún. *látható részek* alkotják, amelyek alapján f egy „update-elést" (frissítést) hajt végre. A látható részek a fej

(1) inputszalagon futó szeme által látott karakter,

(2) munkaszalagon futó szeme által látott karakter,

(3) állapota.



1. ábra. A standard modell.

Az átmeneti függvény megadja, hogy a látható részek alapján

(4) milyen irányba lépjen az inputszalagot pásztázó szem,

(5) milyen karakter kerüljön a munkaszalag aktuális mezőjébe,

(6) merre mozduljon a munka szem-kéz,

(7) mi kerüljön az outputszalagra,

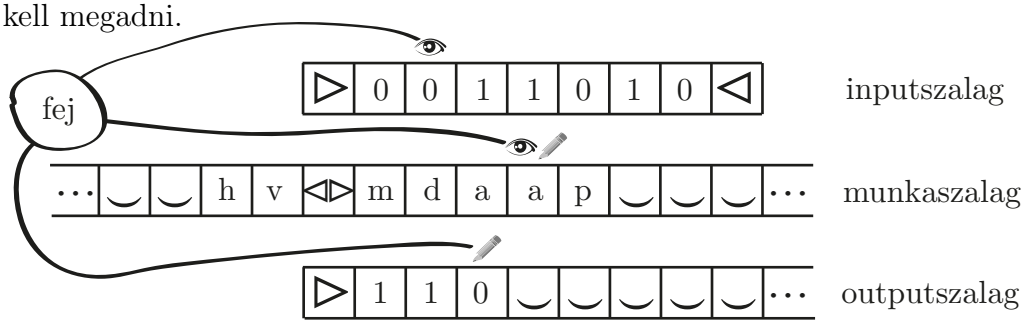
(8) végül pedig meghatározza, hogy a fej milyen állapotba kerüljön.

$$f\colon \underbrace{(\Sigma \cup \{\triangleright, \triangleleft\})}_{(1)} \times \underbrace{(\Gamma \cup \{\triangleright, \smile\})}_{(2)} \times \underbrace{S}_{(3)} \to \underbrace{\{\leftarrow, ., \rightarrow\}}_{(4)} \times \underbrace{\Gamma}_{(5)} \times \underbrace{\{\leftarrow, ., \rightarrow\}}_{(6)} \times \underbrace{(\Sigma \cup \{.\})}_{(7)} \times \underbrace{S}_{(8)}$$

1. A standard modell változatai

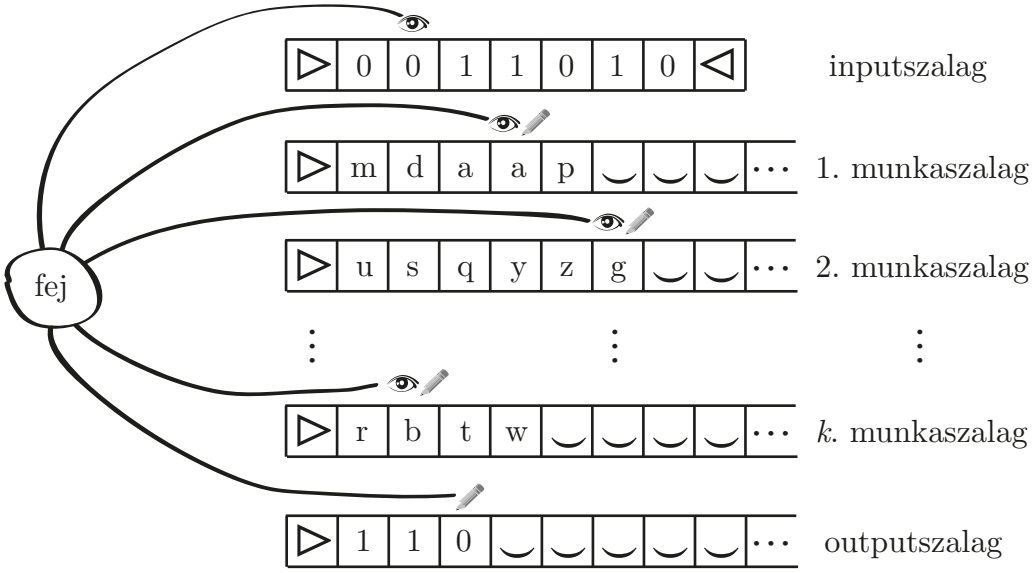
A fent leírt standard modell esetleges, hiszen például az, hogy egy irányban végtelen szalagokat használunk továbbá, hogy éppen három szalagon dolgozunk önkényes választások. Így természetesen léteznek más változatok is, íme néhány példa:

- **Két irányban végtelen munkaszalag:** A munkaszalag bal és jobb irányban is végtelen és nem tartalmaz]idezszalag eleje jelet, csupán egy kezdeti mezőt kell megadni.



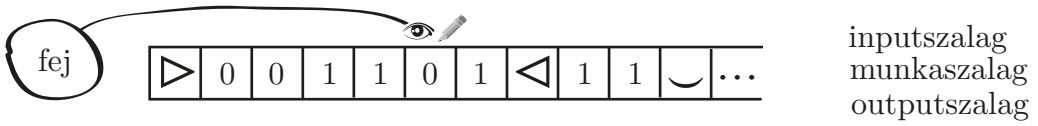
2. ábra. A két irányban végtelen munkaszalag.

- ***k*-szalagos modell:** Rögzített $k \in \mathbb{N}$ számú munkaszalagot használunk, és minden egyes munkaszalaghoz tartozik egy szem-kéz páros. Fontos megjegyezni, hogy k nem függ az input méretétől.



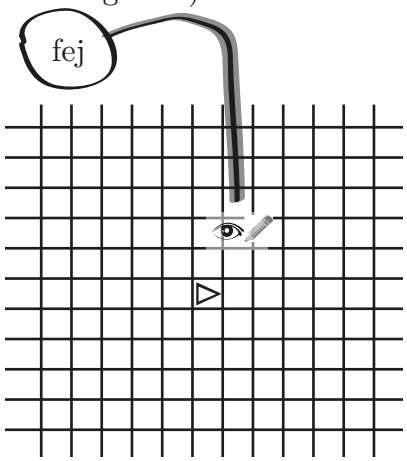
3. ábra. A k-szalagos modell.

- **Egyszalagos modell:** Minden művelet egyetlen szalagon történik, amely így egyszerre input-, munka-, és outputszalag. A szalag jobbra végtelen és a kezdeti mezőket az input foglalja el $\triangleright$,$\triangleleft$ jelek között. Ebben a modellben az input is felülírható és az output a szalag tartalma a $STOP \in S$ állapot elérésekor.



4. ábra. Az egyszalagos modell.

- **Kétdimenziós munkaszalag:** Érdemes a munkaszalagot úgy elképzelni, mint egy végtelen négyzethálós füzetlapot (ez lehet a teljes síkot lefedő háló vagy csupán egy negyedsíknak megfelelő). Ebben az esetben is ki kell jelölnünk egy kezdeti mezőt.



5. ábra. Munkaszalag a síkon.

Nyilvánvaló, hogy a különböző modellekhez más látható részek tartoznak, ebből adódóan pedig eltérőek a modellek átmeneti függvényei. (Ha $\mathcal{D}$ változna a modellel, akkor a Church-tézist „megcáfolnánk”.) Bizonyítás nélkül megemelítjük, hogy az eldönthető nyelvek/kiszámítható függvények osztálya nem függ a fenti változtatásoktól. Az indoklás a különböző modellben felírt algoritmusok/Turing-gépek szimulálása egy másik modellben.

Egy érdekesség, hogy ha léteznek forradalmian új számítási modellek. A fizikusok a (klasszikus mechanika, fizikán alapuló) Turing-géppel szemben bevezetették (az egyelőre meg nem épített) kvantum számítógép fogalmát. Az erre alapított kiszámítható nyelvek/$\mathcal{D}$ osztály ugyanaz maradt.

Ennek ellenére az apróságok lényegesen kihatnak konkrét algoritmusokra. A múlthéten ismertetett standard modellt használó algoritmusunkat módosíthatjuk, ha két munkaszalagunk van: Az inputot másoljuk át mindkét munkaszalagra. Ezt tegyük úgy meg, hogy a munka-ábécé legyen olyan nagy, hogy minden mezőn 100 bitnyi információ férjen el ($|\Gamma| > 2^{100}$). Az input 100-as bit-blokkjai kerüljenek a munkaszalagra (ehhez az állpothalmazt is meg kell növelnünk). Így n hosszú inputnál $\lceil n/100 \rceil$ karakter lesz a munkaszalagokon. Majd az első munkaszalag veszi át az inputszalag szerepét, míg a második játsza a standard modell munkaszalgjának szerepét. Az algoritmus formális leírása könnyen megoldható. Mi a különbség? Az eredeti $3n + \mathcal{O}(1)$ futási idő helyett $1{,}02n + \mathcal{O}(1)$ lesz a futási idő. A gyorsulásnak megvan az „ára”: Hatalmas S, Γ halmazunk lett.

2. A PALINDROM nyelv példája

Múltkor láttuk a

$$PALINDROM = \{\omega = \omega_1, \ldots \omega_n : \text{ahol } \omega_i = \omega_{n+1-i} \text{ minden } i \in \{1, 2, \ldots, n\} \text{ esetén}\}$$

nyelv eldöntési algoritmusát a standard modellben.

Most megnézzük mi a helyzet, ha egyetlen szalagunk van, ami input- és munkaszalagként is funkcionál.

Legyen

$$\Gamma = \{0, 0^{\checkmark}, 1, 1^{\checkmark}\}.$$

Az algroitmus „magas szintű" leírása: A fej ingázni fog az input bal és jobb oldal között. Utazás közben az egyik oldalom látott karaktert fejben tartja, majd a másik oldalon teszteli a palindromságot. Ha az input „lebukott", akkor leállunk. Ha nem, akkor a karaktert „kipipáljuk".

A szükséges állapothalmaz:

$$S = \{\text{START, HÁTUL-PIPÁL, HÁTUL-TESZT-0, HÁTUL-TESZT-1, HÁTUL-TESZT-0-MOST, HÁTUL-TESZT-1-MOST, ELŐL-PIPÁL, ELŐL-TESZT-0, ELŐL-TESZT-1, ELŐL-TESZT-0-MOST, ELŐL-TESZT-1-MOST, ELFOGAD, ELVET}\}.$$

Részletesebben az algoritmus/átmeneti függvény: A START állapotból egyet jobbra lép az input szem/kéz (a szalaghatároló jel utáni első mező, az input első karaktere felett lesz). Az új állapot ELŐL-PIPÁL lesz:

$$(\triangleright, \text{START}) \mapsto (\star, J, \text{ELŐL-PIPÁL})$$

A karaktert „megjegyzi", felülírja pipált változatával és megkeresi az utolsó inputkaraktert (általában az utolsó pipálatlan input karaktert). Ehhez HÁTUL-TESZT-0, HÁTUL-TESZT-1 állapotokat használjuk.

$$(0, \text{ELŐL-PIPÁL}) \mapsto (0^{\checkmark}, J, \text{HÁTUL-TESZT-0})$$

$$(1, \text{ELŐL-PIPÁL}) \mapsto (1^{\checkmark}, J, \text{HÁTUL-TESZT-1})$$

Ekkor az input szem/kéz folyamatosan jobbra mozog. Ez akkor áll le, amikor az inputszalagon az $\triangleleft$ jel vagy pipált karakter nem olvasható, majd egyet visszalép és HÁTUL-TESZT-0-MOST, HÁTUL-TESZT-1-MOST állapotba kerül (a hozott állapotban tárolt információtól függően).

$$(0, \text{HÁTUL-TESZT-0}) \mapsto (0, J, \text{HÁTUL-TESZT-0})$$

$$(1, \text{HÁTUL-TESZT-0}) \mapsto (1, J, \text{HÁTUL-TESZT-0})$$

$$(\triangleleft, \text{HÁTUL-TESZT-0}) \mapsto (\star, B, \text{HÁTUL-TESZT-0-MOST})$$

$$(0^{\checkmark}, \text{HÁTUL-TESZT-0}) \mapsto (0^{\checkmark}, B, \text{HÁTUL-TESZT-0-MOST})$$

$$(1^{\checkmark}, \text{HÁTUL-TESZT-0}) \mapsto (1^{\checkmark}, B, \text{HÁTUL-TESZT-0-MOST})$$

// Az ismertetett hozzárendelések listája nem teljes.

Ekkor megtalálta a keresett karaktert és teszteli, hogy megegyezik-e a megjegyzett karakterrel: Az állapot bitje az előlről hozott „emlékezet". Ha a látott bit nem egyezik a hozott emlékezettel, akkor a gép ELVET állapotba kerül, leáll. Ha egyezik, akkor felülírja a karaktert a pipált változatával és egyet balra lép, HÁTUL-PIPÁL állapotba kerül.

$$(0, \text{HÁTUL-TESZT-0-MOST}) \mapsto (0^{\checkmark}, B, \text{HÁTUL-PIPÁL})$$

$$(1, \text{HÁTUL-TESZT-0-MOST}) \mapsto (1, ., \text{ELVET})$$

$$(0, \text{HÁTUL-TESZT-1-MOST}) \mapsto (0, ., \text{ELVET})$$

$$(1, \text{HÁTUL-TESZT-1-MOST}) \mapsto (1^{\checkmark}, B, \text{HÁTUL-PIPÁL})$$

Itt az olvasott karaktertől függően (feltesszük, hogy ez nem pipált bit) ELŐL-TESZT-0, ELŐL-TESZT-1 állapotba kerül: balra megy, amíg el nem ér egy pipált karaktert és ennek elérésekor visszalép. Ezzel ELŐL-TESZT-0-MOST és ELŐL-TESZT-1-MOST állapotok egyikébe kerül, ahol a bit a „hátulról hozott emlékezet". Vagy leállunk, vagy pipálunk és egyet jobbra lépünk. Az itt látott karakter alapján HÁTUL-TESZT-0, HÁTUL-TESZT-1 állapotok egyikébe kerülünk. A szükséges hozzárendeléseket/az átmeneti függvény leírásának komponenseinek felírását az érdeklődő hallgatóra bízzuk.

Az elfogadó leállás (ha az input szó palindrom) kétféle módon történhet (az input hosszának paritától függően).

Páros inputnál zz összes input-bitet kipipáltuk és egy PIPÁL állapotba kerülünk (ez $4k+2$ alakú hossznál HÁTUL-PIPÁL, $4k$ alakú hossznál ELŐL-PIPÁL), de már pipált karaktert látunk.

$$(0^{\checkmark}, \text{ELŐL-PIPÁL}) \mapsto (0^{\checkmark}, ., \text{ELFOGAD})$$

$$(1^{\checkmark}, \text{ELŐL-PIPÁL}) \mapsto (1^{\checkmark}, ., \text{ELFOGAD})$$

$$(0^{\checkmark}, \text{HÁTUL-PIPÁL}) \mapsto (0^{\checkmark}, ., \text{ELFOGAD})$$

$$(1^{\checkmark}, \text{HÁTUL-PIPÁL}) \mapsto (1^{\checkmark}, ., \text{ELFOGAD})$$

Vagy (pártalan hosszú palindrom inputnál) a pipálással merítjük ki az input biteket és amikor a tesztelendő bitet keressük, akkor vesszük ezt észre:

$$(0^{\checkmark}, \text{ELŐL-TESZT-0-MOST}) \mapsto (0^{\checkmark}, ., \text{ELFOGAD})$$

$$(1^{\checkmark}, \text{ELŐL-TESZT-0-MOST}) \mapsto (1^{\checkmark}, ., \text{ELFOGAD})$$

$$(0^{\checkmark}, \text{HÁTUL-TESZT-O-MOST}) \mapsto (0^{\checkmark}, ., \text{ELFOGAD})$$

$$(1^{\checkmark}, \text{HÁTUL-TESZT-0-MOST}) \mapsto (1^{\checkmark}, ., \text{ELFOGAD})$$

A teljes kidolgozást (például annak meggondolását, hogy üres inputszalagot hogy kezelje a gép/algoritmus) az érdeklődő hallgatóra bízzuk.

Könnyű látni, hogy minden ω inputon a fenti gép futása $\mathcal{O}(|\omega|^2)$. (Ezzel egy felső becslést adtunk a futás hosszára.) Ha ω egy palindrom szó, akkor a fenti T' gép futásának hosszát könnyen kiszámíthatjuk és ennek nagyságrendje valóban $|\omega|^2$ lesz.

Észrevétel. A fenti algoritmus négyzetes rendű:

$$TIME(\omega, T) = \mathcal{O}(|\omega|^2).$$

A konstansokat nem számoltuk ki. Lényegtelen is, az állapotok számának növelésével a futási idő csökkenthető. Például használhatnánk a HÁTUL-TESZT-000, HÁTUL-TESZT-001, HÁTUL-TESZT-010, HÁTUL-TESZT-011, HÁTUL-TESZT-100, HÁTUL-TESZT-101, HÁTUL-TESZT-110, HÁTUL-TESZT-111 állapotokat input bitek hármasainak együttes tesztelésére és az ingázás „amplitúdója" gyorsabban csökken. A futási idő négyzetes marad, de a nagy-ordó mögé rejtett konstans tetszőlegesen kicsivé tehető (nagyon kicsi konstans ára hatalma S).

A múlt órai lineáris algoritmus lényege egy második szalag volt. A mostani modellünkben az az eljárás nem valósítható meg (ezért ingáztunk).

Van-e harmadik mód a PALINDROM nyelv eldöntésére, amely az egy szalagos modellben négyzetes futási időnél gyorsabban megoldja a problémát?

3. A PALINDROM bonyolultsága az egy szalagos modellben

A következő tétel szerint, ha egyszalagos modellt használó algoritmussal akarjuk eldönteni a *PALINDROM* nyelvet, akkor a négyzetes időigény nem javítható.

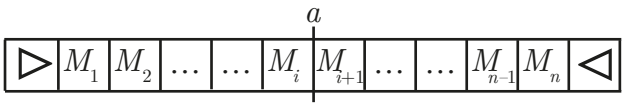
1. Tétel. *Ha T egy olyan Turing-gép, amely az egyszalagos modellben eldönti a PALINDROM nyelvet, akkor valamely α_T pozitív konstansra minden n inputméretre van olyan n hosszú ω input, hogy*

$$TIME(\omega, T) \geq \alpha_T |\omega|^2.$$

A tétel bizonyításához szükségünk lesz néhány új fogalomra.

Definíció.

Az inputszalag két szomszédos mezőjének közös határát *ajtónak* nevezzük. Ha az inputszalag mezőit úgy képzeljük el, mint végtelen egymásba nyíló szobasorozatot, akkor azt mondhatjuk, hogy a fej csak az ajtókon át tud közlekedni.



6. ábra. Az M_i és M_{i+1} mezőket elválasztó a ajtó.

Tekintsük egy T Turing-gép ω inputon való futását. Ekkor egy

$$\kappa_0(\omega) \to \kappa_1 \to \kappa_2 \to \ldots \to \kappa_\ell$$

konfigurációsorozatot kapunk, ahol

$$\ell := \min\{n \mid T \text{ állapota } \kappa_n\text{-ben } ELFOGAD \text{ vagy } ELVET\}$$

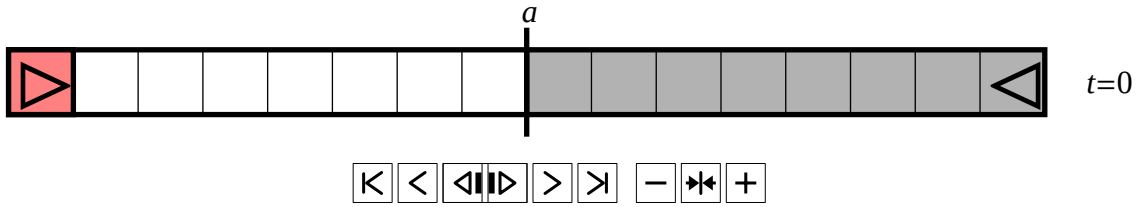
az időpont, amelyben eldöntjük, hogy ω eleme-e a *PALINDROM* nyelvnek. Ez az időpont biztosan véges, hiszen a *PALINDROM* nyelv az eldönthető nyelvek osztályába tartozik (ezt igazolják a korábban említett T_1, T_2 algoritmusok).

Most vegyük azokat a κ_j, κ_{j+1} konfigurációkat, amelyekben az inputszem egyszer az M_i, másszor az M_{i+1} mezőt nézi. Jelölje s_j a mezőket elválasztó a ajtón történő átlépéskor a Turing-gép állapotát. Ezen s_j állapotok sorozatát $\sigma(a,\omega)$ jelöli. Szemléletesen úgy képzelhetjük a $\sigma(a,\omega)$ sorozatot, hogy az a ajtóban egy őr áll, amely a fej minden áthaladásakor feljegyzi annak állapotát.

Nyilvánvaló, hogy a $\sigma(a,\omega)$ sorozatból kiolvasható az ajtón való áthaladás iránya, hiszen a fej balról érkezik, ezért a páratlan sorszámú állapotok a balról-jobbra($\rightarrow$) történő átlépéskor, míg a páros sorszámú állapotok a jobbról-balra($\leftarrow$) történő átlépéskor kerülnek feljegyzésre.

Jelölje $\omega \overset{a}{|}$ az ω input a ajtó előtti (tőle balra található) részét és $\overset{a}{|}\omega$ az ω input a ajtó utáni (tőle jobbra található) részét. Ha például az a ajtó a 6. ábrának megfelelően helyezkedik el, akkor $\omega \overset{a}{|} = \omega_1 \dots \omega_i$ és $\overset{a}{|}\omega = \omega_{i+1} \dots \omega_n$. Természetesen a két rész kiadja a teljes ω inputot: $\omega = \left(\omega \overset{a}{|}\right)\left(\overset{a}{|}\omega\right)$.

Észrevétel. Ha ismerjük az $\omega \overset{a}{|}$ inputrészletet és a $\sigma(a,\omega)$ állapotsorozatot, akkor meg tudjuk mondani, hogy a Turing-gép „hogyan működik”, amikor a szem az a ajtó előtti mezőket pásztázza. Azt nem tudhatjuk, hogy a szem meddig volt a jobb oldalán, de amint átlépi az ajtót (és amíg a bal oldalon marad) képesek vagyunk T futását leírni. Természetesen ugyanez elmondható az $\overset{a}{|}\omega$ darabra is; ekkor az ajtó jobb oldalán ismerjük T lépéseit. Az alábbi animáció illusztrálja az inputszem mozgását és az ajtó elválasztó szerepét. A megfigyelt mezők pirosak, ha $\omega \overset{a}{|}$ elemei és kékek, ha az $\overset{a}{|}\omega$ részei. A $\sigma(a,\omega)$ állapotsorozat a színváltások előtti állapotokból tevődik össze.



2. Következmény. *Legyenek $\omega, \omega' \in \Sigma^n$ tetszőleges inputok és a egy ajtó. Tegyük fel, hogy $\sigma(a,\omega) = \sigma(a,\omega')$ és a T Turing-gép futásának eredménye megegyezik a két inputon. Ekkor az $\widetilde{\omega} = \left(\omega \overset{a}{|}\right)\left(\overset{a}{|}\omega'\right)$ inputon is ugyanazt számolja ki T. Valójában ennél többet is mondhatunk, hiszen az ajtón történő áthaladások számától függ, hogy melyik inputon (ω-n vagy ω'-n) fejeződik be a futás.*

Definíció. Tegyük fel, hogy $3 \mid n$. Legyen

$$I_0 := \{\alpha 0^{\frac{n}{3}} \overleftarrow{\alpha} : \alpha \in \Sigma^{\frac{n}{3}}\} \subseteq PALINDROM \cap \Sigma^n.$$

Tehát I_0 azon n hosszú palindrom szavakból áll, amelyekben egy $n/3$ hosszú szó és fordítottja $n/3$ nullát fog közre.

Megjegyzés. Mivel egy $\alpha 0^{\frac{n}{3}} \overleftarrow{\alpha} \in I_0$ elemet egyértelműen meghatároz az α szó, ezért $|I_0| = |\Sigma|^{\frac{n}{3}} = |\{0,1\}|^{\frac{n}{3}} = 2^{\frac{n}{3}}$.

3. Következmény. *Legyenek ω, $\omega' \in I_0$ különböző szavak és a egy középső ajtó (azaz valamelyik a középső $n/3$ nullát elválasztó ajtó közül). Ekkor $\sigma(a,\omega) \neq \sigma(a,\omega')$.*

Bizonyítás. Indirekt módon tegyük fel, hogy $\sigma(a,\omega) = \sigma(a,\omega')$. Ekkor az előző következmény alapján, ha mindkét inputon *ELFOGAD* állapottal áll le a Turing-gép, akkor az $\widetilde{\omega} = \left(\omega \overset{a}{|}\right)\left(\overset{a}{|} \omega'\right) = \alpha 0^{\frac{n}{3}} \overleftarrow{\alpha'}$ inputot is elfogadja, vagyis $\widetilde{\omega} \in I_0$. Azonban $\omega \neq \omega'$, így $\alpha \neq \alpha'$, amiből $\widetilde{\omega} \notin I_0$ következik. Ez az ellentmondás igazolja az állítást. ■

Észrevétel. Ha feltételezzük, hogy $|\Sigma| \geq 2$ és $|S| \geq 3$, akkor a t-nél rövidebb állapotsorozatok számára az

$$1 + |S| + \cdots + |S|^{t-1} = \frac{|S|^t - 1}{|S| - 1} < |S|^t - 1 < |S|^t$$

felső becslés adható.

4. Következmény. *Ha $|I_0| = |\Sigma|^{\frac{n}{3}} \geq |S|^t$, akkor $\exists\, \omega \in I_0$, hogy $\sigma(a,\omega)$ hossza legalább t, ahol a egy középső ajtó.*

Bizonyítás. Indirekt módon tegyük fel, hogy nincs ilyen ω. Ekkor bármely $\omega \in I_0$ és a középső ajtó esetén $\sigma(a,\omega)$ hossza kisebb, mint t. Ez $|I_0| > |S|^t$ állapotsorozatot jelent. Azonban a t-nél rövidebb állapotsorozatok számára adott becslés alapján, mint $|I_0| < |S|^t$. Ez ellentmondás, tehát az állításban szereplő ω input létezik. ■

Megjegyzés. Az előbbi következményből az is leolvasható, hogy $|I_0| = |\Sigma|^{\frac{n}{3}} \geq |S|^t$ esetén $t \sim \beta_T \cdot n$.

5. Következmény. *Ha $|I_0| \geq 2|S|^t$, akkor létezik legalább $|I_0|/2$ olyan szó I_0-ban, amelyre $|\sigma(a,\omega)| \geq t$ és mindegyik különböző állapotsorozatot ad, amikor kiszámítjuk. Ezek halmazát jelölje I_1. Tehát*

$$I_1 = \{\omega \in I_0 : |\sigma(a,\omega)| \geq t\} \subseteq I_0.$$

Az előbbi megjegyzés alapján $t \sim \gamma_T \cdot n$, alkalmas γ_T konstansra.

Ezek után térjünk rá az 1. Tétel bizonyítására

Bizonyítás. Azok az időpontok nyilván nem relevánsak, amikor a fej nem mozdul, ezért az alábbi alsó becslés adható

$$\sum_{\omega \in I_0} TIME(\omega, T) \geq \sum_{\omega \in I_0} \sum_{\substack{a \text{ középső} \\ \text{ajtó}}} |\{t : t \text{ időpillanatban a fej átlép } a\text{-n}\}|$$

az összegben megjelenő halmaz számossága $\sigma(a,\omega)$ definíciója alapján $|\sigma(a,\omega)|$,

$$= \sum_{\omega \in I_0} \sum_{\substack{a \text{ középső} \\ \text{ajtó}}} |\sigma(a,\omega)| = \sum_{\substack{a \text{ középső} \\ \text{ajtó}}} \sum_{\omega \in I_0} |\sigma(a,\omega)|$$

ahol kettős összegben a szokásos sorrendcsere történt. Az 5. Következmény alapján

$$\geq \sum_{\substack{a \text{ középső} \\ \text{ajtó}}} \sum_{\omega \in I_1} t = \sum_{\substack{a \text{ középső} \\ \text{ajtó}}} |I_1| \cdot t \geq \sum_{\substack{a \text{ középső} \\ \text{ajtó}}} \frac{|I_0|}{2} \cdot t$$

mivel a középső ajtók száma $n/3$, ezért ez

$$= \frac{n}{3} \cdot \frac{|I_0|}{2} \cdot t = \frac{\gamma_T}{6} \cdot n^2 \cdot |I_0|$$

ahonnan $|I_0|$-val való osztás után

$$\frac{1}{|I_0|}\sum_{\omega\in I_0} \mathit{TIME}(\omega,T) \geq \frac{\gamma_T}{6}\cdot n^2$$

adódik. Tehát azt kaptuk, hogy az átlagos futásidő négyzetesen függ az input hosszától. A γ_T konstans függ a Turing-géptől, ezáltal értéke csökkenthető, de a négyzetes jelleg megmarad. ■

4. Bonyolultsági mértékek

Most definiáljuk egy algoritmus/Turing-gép időigényét és tárigényét.

Definíció. Egy T *Turing-gép időigénye* egy ω inputon $\ell := \mathit{TIME}(\omega,T)$, ha futása $\{\kappa_i\}_{i=0}^{\ell}$, vagyis az ℓ-edik konfigurációban kerül először STOP állapotba, illetve ∞, ha futása végtelen (nem éri el a STOP állapotot).

Definíció. Egy T *Turing-gép tárigénye* egy ω inputon $s := \mathit{SPACE}(\omega,T)$, ha futása során a munkaszem/kéz alatti mező legnagyobb indexe s, illetve ∞, ha a munkaszem/kéz tetszőleges messze elmozdul a munkaszalag baloldali határától.

Mivel a Turing-gép legfeljebb annyi mezőt látogathat meg a munkaszalagon, amennyit mozog, ezért ezen jellemzők között fennáll a nyilvánvaló

$$\mathit{SPACE}(\omega,T) \leq \mathit{TIME}(\omega,T)$$

összefüggés. A futás idő- és tárigényét nyilván az input hosszától való függése alapján ítélhetjük meg. A következő definícióval ezen függést tudjuk kifejezni.

Definíció. Legyen $t\colon \mathbb{N}\to\mathbb{R}$ egy tetszőleges függvény. Azt mondjuk, hogy egy T Turing-gép eleme a $\mathtt{TIME(t(n))}$ halmaznak,

$$\mathit{TIME}(\omega,T) \leq t(|\omega|).$$

Definíció. Legyen $s\colon \mathbb{N}\to\mathbb{R}$ egy tetszőleges függvény. Azt mondjuk, hogy egy T Turing-gép eleme a $\mathtt{SPACE(s(n))}$ halmaznak,

$$\mathit{SPACE}(\omega,T) \leq s(|\omega|).$$

Természetesen ezek az osztályok nyelvosztályokkként is megfogalmazhatók:

Definíció. Legyen $t\colon \mathbb{N}\to\mathbb{R}$ egy tetszőleges függvény. Azt mondjuk, hogy egy L nyelv eleme a $\mathit{TIME}(t(n))$ halmaznak, ha létezik olyan T Turing-gép, amely

(i) eldönti L-et, és

(ii) $\mathit{TIME}(\omega,T) \leq t(|\omega|)$.

Definíció. Legyen $s\colon \mathbb{N}\to\mathbb{R}$ egy tetszőleges függvény. Azt mondjuk, hogy egy L nyelv eleme a $\mathit{SPACE}(s(n))$ halmaznak, ha létezik olyan T Turing-gép, amely

(i) eldönti L-et, és

(*ii*) $SPACE(\omega, T) \leq s(|\omega|)$.

Az imént bevezetett $TIME(t(n))/SPACE(s(n))$ jelöléseknél hasznosabbak azok az osztályok ahol az idő, illetve tár korlátozást nem egy függvénnyel, hanem egy „nagyságrenddel" írjuk elő.

Definíció. ∘ *Polinomiális időben eldönthető nyelvek*:

$$\mathcal{P} := \bigcup_{a\in\mathbb{N}} TIME(an^a + a) = \bigcup_{p\in\mathbb{R}[x]} TIME(p(n)).$$

Az a szorzó az 1 hosszúságú inputokon szükséges 2 lépés végett szükséges, így írhatnánk a helyett 2-est is. A két unió, azért egyezik meg, mert bármely $p \in \mathbb{R}[x]$ polinomhoz létezik olyan $a \in \mathbb{N}$ természetes szám, melyre $p(n) \leq an^a + a$, ahol $n \in \mathbb{N}$.

∘ *Exponenciális időben eldönthető nyelvek*:

$$\mathcal{EXP} := \bigcup_{a\in\mathbb{N}} TIME(2^{an^a+a}).$$

∘ *Polinomiális tárral eldönthető nyelvek*:

$$\mathcal{PSPACE} := \bigcup_{a\in\mathbb{N}} SPACE(an^a + a).$$

∘ *Exponenciális tárral eldönthető nyelvek*:

$$\mathcal{EXPSPACE} := \bigcup_{a\in\mathbb{N}} SPACE(2^{an^a+a}).$$

∘ *Logaritmikus tárral eldönthető nyelvek*:

$$\mathcal{L} := \bigcup_{a\in\mathbb{N}} SPACE(a \log n),$$

itt megjegyezzük, hogy $\log n$ az $n = 0$ esetben nyilván nem értelmezhető, azonban ettől az elfajuló (nulla hosszúságú input) esettől eltekintünk. Továbbá $\mathcal{L}$ miatt szükséges az inputszalag és a munkaszalag elkülönítése is, mert máskülönben nehéz lenne a logaritmikus tárat mérni/kimutatni.

Könnyen belátható, hogy a nyelvosztályok között az alábbi tartalmazások teljesülnek:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \mathcal{L} & \subseteq & \mathcal{PSPACE} & \subseteq & \mathcal{EXPSPACE} & \subseteq & \mathcal{D} & \subseteq & \mathcal{S} & \subseteq & \mathcal{P}(\Sigma^*) \\ & & \cup| & & \cup| & & & & & & \\ & & \mathcal{P} & \subseteq & \mathcal{EXP} & & & & & & \end{array}$$

$\star$

Természetesen további kapcsolatok is vannak, ezekről a későbbiek során esik szó. Nyelvosztályokból is jelentősen több létezik, mint amit itt megadtunk, a részletekért lásd a Qwiki oldalát: http://qwiki.stanford.edu/index.php/Complexity_Zoo.

A bonyolultságelmélet „feladata” a $\mathcal{D}$ nyelvosztály finomítása, az ide tartozó nyelvek vizsgálata. $\mathcal{D}$-n kívüli nyelvek összehasonlítása és vizsgálata inkább matematikai logika jellegű kérdésekhez vezet.

$\star$

Emellett egy természetesen felmerülő kérdés, hogy függ-e a modell megválasztásától egy adott számítási feladat megoldásának „nehézsége”? Ugyanazt a problémát megoldó, de eltérő modellek esetleg különbözhetnek futásidő, tárigény tekintetében? A válasz: „Elmosott” idő/tár-korlánál a modell nem számít. Az

$$\mathcal{L}, \mathcal{P}, \mathcal{PSPACE}, \mathcal{EXP}, \mathcal{EXPSPACE}, \mathcal{D}, \mathcal{S}$$

nyelvosztályok változatlanok maradnak a különböző modelleknél.

$\star$

Ha azonban finomabb osztályokat nézünk, akkor a modell választása lényegesen kihat a nyelvosztályunkra. Például „lineáris idő”:

$$\cup_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}} TIME(\alpha n + \beta)$$

más lesz, ha a standard modellre alapítjuk, illetve ha az egyszalagos modellen nyugszik (lásd PALINDROM nyelv). Ha szükségünk van ilyen finomabb nyelvosztályra, akkor a definíció lényegét érintő „létezik T Turing-gép” kifejezés alatt egy k-szalagos modell létezését értjük. Azaz a létezik kvantor kibontva: $\exists k \in \mathbb{N} \quad \exists \Gamma \quad \exists \quad \exists f$.

Megjegyezzük, hogy

$$L \in \mathcal{P}$$

egy alkalmas Turing-gép létezését jelenti. Ha ez a feltevésünk és hivatkozni szeretnénk egy T gépre, amely „bizonyítja” a $\mathcal{P}$ osztályhoz tartozást, akkor a

$$L \in_T \mathcal{P}$$

jelölést használjuk.

$\star$

Azt gyanítjuk, hogy a(z egyelőre meg nem valósított) kvantum számítógépeknél A polinomiális idő fogalma megváltozik ($\mathcal{P}_{kvantum} \supsetneq \mathcal{P}$).