**ALGORITMUSOK ÉS BONYOLULTSÁGELMÉLET**

Matematika MSc hallgatók számára

# 7. Előadás

*Előadó: Hajnal Péter*
*Jegyzetelő: Hajnal Péter* 2013. március 21.

**Emlékeztető.** Egy $\mathcal{L} \in_T \mathcal{NP}$ nyelvből logaritmikus tárral (így polinom időben) hálózatot konstruálhatunk, a hálózatban a bemenetet és a tanúszalagot kódoló polinom sok bit található, majd polinom kapun (amelyek szerepe a Turing-számítás polinom sok konfigurációjának kódjainak kiszámítása) keresztül eljutunk egy kapuhoz, ami által kiszámított bit kódolja a gép utolsó ELFOGAD/ELVET állapotát.

Azaz HÁLÓZAT-SAT egy $\mathcal{NP}$-teljes nyelv.

Ha egy $\mathcal{NP}$-beli $L$ nyelvet polinomiális időben redukálunk HÁLÓZAT-SAT-ra, akkor $L$ is $\mathcal{NP}$-teljes. Így további $NP$-teljes nyelvekhez jutunk. Ez korábban is így volt. A korábbi teljes nyelveinket is kiegészíthettük volna alternatív lehetőségekkel. Látni fogjuk, hogy $\mathcal{NP}$-teljes problémák listáján a matematika ágainak széles (talán teljes) köréből találunk példákát. Továbbá fontos, központi kérdések (amelyek látszólag függetlenek) olyanok, hogy az $\mathcal{NP}$ nyelv megragadására alkalmasak.

Először a legklasszikusabb $\mathcal{NP}$-teljes nyelvet imsertetjük. Majd további példákat sorolunk fel.

## 1. Cook—Levin-tétel

**Definíció.** Legyen $V = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ egy változó halmaz. Legyen $L = V \dot\cup \overline{V}$ a literálok halmaza ($\overline{V}$ a negált változók halmaza, azaz $\{\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n\}$). $L$ egy részhalmazát klóznak nevezzük. Esetünkben a klózra úgy gondolunk, hogy a hozzá tartozó literálokat $\vee$ logikai művelettel, azaz diszjunkcióval kapcsoljuk össze. Egy $\varphi$ konjunktív normálformában lévő formula (CNF formula) klózok egy halmaza. Erre a klózhalmazra úgy gondolunk, hogy a klózok $\wedge$ logikai művelettel, azaz konjukcióval kapcsoljuk össze. Egy $\varphi$ CNF formula kielégíthető, ha adható $V$ egy kiértékelése (ami természetes módon kiterjeszthető $L$ egy kiértékelésévé), amelyre minden klózban lesz igazzá kiértékelt literál.

$$\mathrm{SAT} = \{\lceil\varphi\rceil : \varphi \text{ kielégíthető CNF}\}$$

Azaz SAT az a probléma, ahol adott egy CNF formula és el kel döntenünk, hogy kielégíthető-e.

**1. Tétel (Cook—Levin-tétel).** *SAT (CNF formula kielégíthetősége) $\mathcal{NP}$-teljes.*

*Bizonyítás.* Korábban már szerepelt, hogy SAT $\in \mathcal{NP}$, így elég adnunk egy visszavezetést HÁLÓZAT-SAT-ról SAT-ra, hiszen ekkor az előző következmény (i) pontja és a polinomiálsi redukcio tranzitívitása alapján tetszőleges $L \in \mathcal{NP}$ nyelvet vissza tudunk vezetni SAT-ra. Ezt is két lépésben tesszük, a HÁLÓZAT-SAT-ot visszavezetjük BOOLE-EGYENLETRENDSZER-SAT-ra, majd azt SAT-ra.

**Definíció.** $\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \psi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, \ell$ egyenletrendszert, Boole-egyenletrendszernek nevezzük, ha $\varphi_i$ és $\psi_i$ Boole-formulák. Az $\{x_i\}_{i=1}^n$ változók egy 0-1/igaz-hamis értékadás az egyeneletrendszer megoldása, ha minden $i = 1, 2, \ldots, \ell$ esetén $\varphi_i$ és $\psi_i$ értéke ugyanaz.

BOOLE-EGYENLETRENDSZER-SAT az a nyelv, ami a megoldható/kielégíthető Boole-egyenletrendszerek kódját tartalmazza.

Legyen $H$ egy hálózat. Minden csúcsával azonosítunk egy változót. Ez input-csúcsok esetén a csúcs címkéje. A többi csúcsra (kapukra) mind különváltozókat feleltetünk meg. Minden kapuhoz tartozik egy egyenlet

- $x_g = \neg x_h$, ha a $g$ kapu negáció kapu és a $h$ kapuból kapja inputját ($\overrightarrow{hg}$ él a hálózatban).
- $x_g = x_h \wedge x_{h'}$, ha a $g$ kapu hálózatbeli címkéje konjunkció és inputjait $h$ és $h'$ kapukból kapja.
- $x_g = x_h \vee x_{h'}$, ha a $g$ kapu hálózatbeli címkéje diszjunkció és inputjait $h$ és $h'$ kapukból kapja.
- $x_g = 1$, ha a $g$ kapu a hálózat output kapuja.

Ezzel megkaptuk egy Boole-egyenletrendszert a hálózatból. Ha a hálózat 1-et számol ki egy értékadáson (az értékadás kielégíthetőséget bizonyít), akkor a kapuk által kiszámolt bitekkel együtt egy megoldását kapjuk az egyeneletrendszernek. Fordítva is igaz, ha az egyenletrendszer megoldásából kiemeljük az eredeti input változók értékadásait, akkor ezen a hálózat 1-et számol ki (sőt minden kapu a hozzárendelt változó megoldásbeli értékét számolja ki). Azaz a hálózatból legyártott egyenletrendszer megoldhatósága ekvivalens azzal, hogy a hálózat kielégíthető.

Az '=' jeleket '$\leftrightarrow$' logikai jelekre cserélve az egyes egyenleteknek megfelelő formulákat kapunk. Egy értékadás akkor és csak akkor teljesíti az egyenletet, ha igazzá teszi a hozzárendelt formulát. A kapott logikai kifejezések mindegyike legfeljebb három változót tartalmaznak. Könnyű őket CNF formára hozni. Ha az összes egyenletnek megfeleltetett CNF formulát 'és' logikai jellel összekapcsoljuk, szintén CNF formát kapunk. Így az egyenletrendszerhez hozzárendeltünk egy $\varphi$ CNF formulát. A hozzárendelés $\mathcal{P}$-ben kiszámolható. Az egyenletrendszer megoldhatósága ekvivalens a formula kielégíthetőségével.

Vagyis „programunk" második redukcióját is megadtuk, a tételt bebizonyítottuk. ■

# 2. További $\mathcal{NP}$-teljes problémák

Legyen (= 3)-SAT azon kielégíthető CNF formulák kódja, melyekben minden klóz pontosan 3 literált tartalmaz. Legyen ($\leq$ 3)-SAT azon kielégíthető CNF formulák kódja, melyekben minden klóz legfeljebb 3 literált tartalmaz.

**2. Lemma.** *(= 3)-SAT $\preceq_{\mathcal{P}}$ ($\leq$ 3)-SAT, továbbá ($\leq$ 3)-SAT$\preceq_{\mathcal{P}}$(= 3)-SAT.*

*Bizonyítás.* Az első redukció nyilvánvaló, hisz a (= 3)-SAT probléma egy speciális esete ($\leq 3$)-SAT-nek.

Fordítva legyen $\varphi$ a ($\leq 3$)-SAT egy inputja. Egy a kielégíthetőség szempontjából ekvivalens formulává alakítjuk, úgy, hogy a klózok mérete három legyen. Egy $\varphi$ input 3 méretű klózait tartsuk meg, míg a kicsi klózaikkal az alábbi operációt végezzük el (párhuzamosan): Egy $C : \langle \ell_1, \ell_2 \rangle$ „kicsi" klózt helyettesítsünk a $\langle \ell_1, \ell_2, u \rangle$, $\langle \ell_1, \ell_2, \overline{u} \rangle$ klózpárral. Természetesen formulánk kielegítése esetén $C$ is igazzá válik, ami a $C$-t helyettesítő klózokat is igazzá teszi. Fordítva: A $C$-t helyettesítő klózpárt csak úgy tudjuk kielégíteni, ha az eredeti $C$-t is kielégítjük.

A fenti példában a kicsi klóz két literált tartalmazott. Ennél is kisebb klózokra is alkalmazható ötletünk. Eredménye: ekvivalens formula eggyel nagyobb klózokkal. Ötletünket iteráltan kell alkalmazni, amíg minden klóz három méretűvé válik. ■

Ha két nyelv „oda-vissza" redukálható, akkor ekvivalensnek (polinomiális redukcióra) mondjuk. Ekkor a két probléma egyenértékű. A fenti tétel egy ekvivalenciát állít. Ez alapján a két probléma egyenértékű. Ha a 3-SAT nyelvet említjúk, akkor alatta a fenti két nyelv bármelyikét érthetjük. Természetesen, ha 3-SAT-ot redukáljuk, akor az input CNF-ről feltesszük, hogy minden klóza három literált tarrtalmaz. Ha 3-SAT-ra redukálunk, akkor nem zavar, ha a redukciós algoritmus háromnál kisebb klózokat is „gyárt".

**3. Tétel.** *3-SAT $\mathcal{NP}$-teljes.*

*Bizonyítás.* 3-SAT $\in \mathcal{NP}$ triviális (a SAT speciális esete).

3-SAT $\mathcal{NP}$-nehéz: SAT visszavezetése 3-SAT-ra (emlékeztetőül: egy SAT $\to$ 3-SAT: $\mathcal{C} \mapsto \mathcal{C}'$ polinomidőben kiszámítható függvény kell, amelyre teljesül, hogy $\mathcal{C} \in$ SAT $\Leftrightarrow \mathcal{C}' \in$ 3-SAT). A hozzárendelés a következő lesz: a $C = \langle \ell_1, \ldots, \ell_k \rangle$ klózra vezessünk be $u_1, \ldots, u_{k-1}$ új változókat és a következő klózokat vegyük fel $\mathcal{C}'$-be:

$$\langle \ell_1, \overline{u}_1 \rangle, \langle u_1, \ell_2, \overline{u}_2 \rangle, \ldots, \langle u_{i-1}, \ell_i, \overline{u}_i \rangle, \ldots, \langle u_{k-2}, \ell_{k-1}, \overline{u}_{k-1} \rangle, \langle u_{k-1}, \ell_k \rangle$$

Ezt minden $\mathcal{C}$-beli klózra végezzük el. Amit kapunk, az egy 3-CNF. A következőket kell belátni:

(i) $\mathcal{C}'$ meghatározható ($\mathcal{C}$ kódjának hosszában) polinomiális időben. Ez nyilvánvaló.

(ii) $\mathcal{C}$ pontosan akkor kielégíthető, ha $\mathcal{C}'$ az:

Ha $\mathcal{C}$ kielégíthető, akkor vegyük egy kielégíthető kiértékelését. $C = \langle \ell_1, \ldots, \ell_k \rangle$ klóz esetén legyen $\ell_i$ a klózban az első igaz literál. Ekkor $\ell_i$ értékeit megtartva, $u_1 = \ldots = u_{i-1} = h$ és $u_i = \ldots = u_{k-1} = i$ kiértékelés jó lesz.

Másik irány: $\mathcal{C}'$-nek nincs olyan kielégítő kiértékelése, amelyben valamely $\mathcal{C}$-beli $C = \langle \ell_1, \ldots, \ell_k \rangle$ klóz esetén $\ell_1 = \ldots = \ell_k = h$ lenne, mivel az

$$\langle \overline{u}_1 \rangle, \langle u_1, \overline{u}_2 \rangle, \ldots, \langle u_{i-1}, \overline{u}_i \rangle, \ldots, \langle u_{k-2}, \overline{u}_{k-1} \rangle \langle u_{k-1} \rangle$$

klózokat tartalmazó formula kielégíthetetlen.

■

Legyen $k$-SAT a következő probléma: adott egy konjunktív normálforma, amelyben minden klóz legfeljebb $k$ literált tartalmaz ($k$-CNF). Kielégíthető-e?

**Megjegyzés.** Egyszerűen látható, hogy 2-SAT $\in \mathcal{P}$. Sőt 2-SAT $\in co\mathcal{NL}$.

**Megjegyzés.** Nyilván igaz a következő redukciólánc:

$$2\text{-}SAT \preceq_{\mathcal{P}} 3\text{-}SAT \preceq_{\mathcal{P}} 4\text{-}SAT \preceq_{\mathcal{P}} \ldots \preceq_{\mathcal{P}} k\text{-}SAT \preceq_{\mathcal{P}} \ldots \preceq_{\mathcal{P}} SAT.$$

**Definíció.** $V$ egy kiértékelése egy klózt homogénné tesz, ha a klóz minden literálja ugyanazt a logikai értéket kapja. Azaz a klóz akkor nem lesz honogén, ha igazzá értékelődik ki (lesz benne igaz értékű literál), de nem minden literál igaz értékű (lesz benne hamis literál is)

Legyen

$$\text{NEM-MIND-IGAZ-SAT} = \{\lceil\varphi\rceil : \varphi \text{ CNF, amely kielégíthető úgy, hogy ne legyen olyan klóz, amelyben minden literál igaz}\}$$

**4. Tétel.** *NEM-MIND-IGAZ-SAT $\mathcal{NP}$-teljes.*

*Bizonyítás.* NEM-MIND-IGAZ-SAT $\in \mathcal{NP}$ triviális.

NEM-MIND-IGAZ-SAT $\mathcal{NP}$-nehéz: Legyen $\mathcal{C}$ a SAT egy inputja. Leírunk egy $\mathcal{C} \mapsto \mathcal{C}'$ polinomidőben kiszámítható függvényt, amelyre teljesül, hogy $\mathcal{C} \in$ SAT akkor és csak akkor teljesül, ha $\mathcal{C}' \in$ NEM-MIND-IGAZ-SAT). A hozzárendelés a következő lesz: a $C = \langle \ell_1, \ldots, \ell_k \rangle$ klózra vezessünk be $u_1, \ldots, u_k$ új változókat és a következő klózokat vegyük fel $\mathcal{C}'$-be:

$$\langle \ell_1, \overline{u}_1 \rangle, \langle u_1, \ell_2, \overline{u}_2 \rangle, \ldots, \langle u_{i-1}, \ell_i, \overline{u}_i \rangle, \ldots, \langle u_{k-2}, \ell_{k-1}, \overline{u}_{k-1} \rangle, \langle u_{k-1}, \ell_k, \overline{u}_k \rangle$$

Ezt minden $\mathcal{C}$-beli klózra végezzük el (diszjunkt $(u_i)$ változóhalmazokkal) és adjuk hozzá a

$$\langle u_1, u_2, \ldots, u_k \rangle$$

klózokat. Amit kapunk, az egy CNF. A következőket kell belátni:

(i) $\mathcal{C}'$ meghatározható ($\mathcal{C}$ kódjának hosszában) polinomiális időben. Ez nyilvánvaló.

(ii) $\mathcal{C}$ pontosan akkor kielégíthető, ha $\mathcal{C}'$ kielégíthető nem-mind-igaz módon:

Ha $\mathcal{C}$ kielégíthető, akkor vegyük egy kielégíthető kiértékelését. $C = \langle \ell_1, \ldots, \ell_k \rangle$ klóz esetén legyen $\ell_i$ a klózban az első igaz literál. Ekkor $\ell_i$ értékeit megtartva, $u_1 = \ldots = u_{i-1} = h$ és $u_i = \ldots = u_{k-1} = i$ kiértékelés jó lesz $\mathcal{C}$ klózaiból gyártott klózokra. A plusz klózok nem-mind-igaz módon kielégíthetők az $u_k$ változók alkalmas rögzítsével.

Másik irány: $\mathcal{C}'$-nek nincs olyan kielégítő kiértékelése, amelyben valamely $\mathcal{C}$-beli $C = \langle \ell_1, \ldots, \ell_k \rangle$ klóz esetén $\ell_1 = \ldots = \ell_k = h$ lenne, mivel az

$$\langle \overline{u}_1 \rangle, \langle u_1, \overline{u}_2 \rangle, \ldots, \langle u_{i-1}, \overline{u}_i \rangle, \ldots, \langle u_{k-2}, \overline{u}_{k-1} \rangle \langle u_{k-1}, \overline{u}_k \rangle$$

klózokat tartalmazó formula egyetlen módon kielégíthető: minden $u_i$ ért'eke hamis. Ekkor azonban $\mathcal{C}'$-ben a $C$-hez rendelt plusz klózt nem lenne kielégítve.

■

Legyen NEM-MIND-IGAZ-3-SAT azon CNF-ek halmaza, amelyben minden klóz legfeljebb három literált tartalmaz és van olyan kiértékelése a változóknak, hogy $\varphi$ összes klóza nem homogén.

**5. Következmény.** *NEM-MIND-IGAZ-3-SAT $\mathcal{NP}$-teljes.*

*Bizonyítás.* Ha egy 3-SAT inputra alkalmazzuk az előző visszavezetést, akkor egy olyan formulát kapunk, amelyben minden klóz legfeljebb három literált tartalmaz. ■

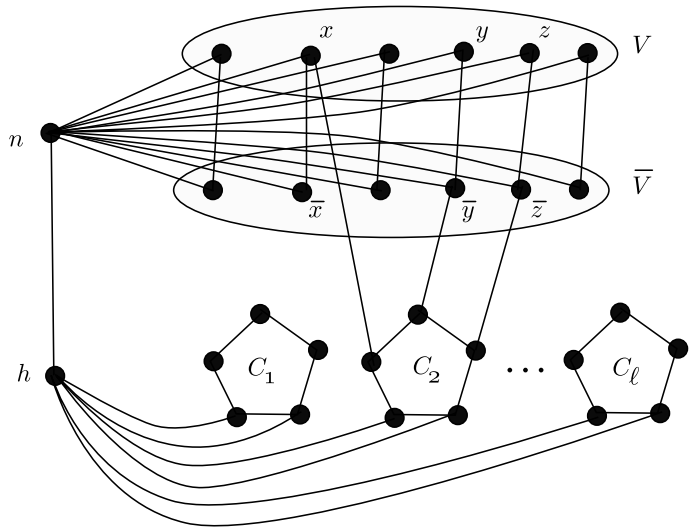
## 2.1. Gráfelméleti problémák

**Definíció.** $k$-SZÍNEZHETŐSÉG a következő probléma: adott egy gráf, kiszínezhető-e $k$ színnel?

**6. Tétel.** *3-SZÍNEZHETŐSÉG $\mathcal{NP}$-teljes.*

*Bizonyítás.* 3-SZÍNEZHETŐSÉG $\in \mathcal{NP}$: tanú egy színezés, polinom időben ellenőrizhető, jó színezés-e.

3-SZÍNEZHETŐSÉG $\mathcal{NP}$-nehéz: 3-SAT-ot vezetjük rá vissza. $\mathcal{C}$ 3-CNF-hez hozzárendeljük $G_{\mathcal{C}}$ gráfot, amely csúcsai $n, h, \mathcal{C}$ változói és azok negáltjai, és minden $C \in \mathcal{C}$ klózra $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$, $C_5$. $G_{\mathcal{C}}$ élei a következők lesznek: $uv$, minden $x_i$ változóra $x_i\overline{x}_i$, $ux_i$ és $u\overline{x}_i$, illetve minden $C = \langle z_1, z_2, z_3\rangle$ klózra $C_1C_2$, $C_2C_3$, $C_3C_4$, $C_4C_5$, $C_5C_1$, $C_1z_1$, $C_2z_2$, $C_3z_3$, $C_4v$, $C_5v$.



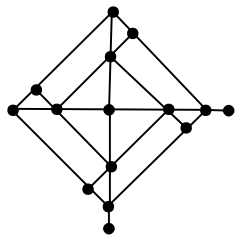

Könnyű ellenőrizni, hogy $G_{\mathcal{C}}$ polinom időben meghatározható, és pontosan akkor 3-színezhető, ha $\mathcal{C}$ kielégíthető (felhasználva azt az észrevételt, hogy $z_1, z_2, z_3, v$ 3-színezése pontosan akkor terjeszthető ki $C = \langle z_1, z_2, z_3\rangle$ klózhoz tartozó ötszögre jó színezésként, ha a 4 csúcs színe nem azonos). ■

**Megjegyzés.** Könnyen ellenőrizhető, hogy 2-SZÍNEZHETŐSÉG $\in co\mathcal{NL}$.

**7. Tétel.** *SÍKGRÁF 3-SZÍNEZHETŐSÉGE $\mathcal{NP}$-teljes.*

*Vázlat.* $\mathcal{NP}$-beliség triviális.

SÍKGRÁF 3-SZÍNEZHETŐSÉGE $\mathcal{NP}$-nehéz: 3-SZÍNEZHETŐSÉG-et vezetjük rá vissza. Lerajzolás után a kereszteződő éleket kell helyettesíteni az alábbi kis gráffal:



Azt kell meggondolni, hogy megtehetők a helyettesítések úgy, hogy nem hoznak be új metszéseket, és a keletkezett gráf pontosan akkor 3-színezhető, ha az eredeti is. ■

**Megjegyzés.** A 2-színezhetőség $co\mathcal{NL}$-beli, síkgráfokra a 4-színezhetőség triviális a négyszíntétel (Appel, Haken 1977) alapján.

**Definíció.** SZÍNEZÉSI PROBLÉMA: adott egy $G$ gráf és egy $k$ természetes szám. Van-e $G$-nek jó $k$-színezése?

**8. Tétel.** *SZÍNEZÉSI PROBLÉMA $\mathcal{NP}$-teljes.*

*Bizonyítás.* SZÍNEZÉSI PROBLÉMA $\in \mathcal{NP}$: tanú egy színezés, polinom időben ellenőrizhető, jó színezés-e.

A SZÍNEZÉSI PROBLÉMA $\mathcal{NP}$-nehéz, mivel a 3-SZÍNEZHETŐSÉG általánosítása. ■

⋆ ⋆ ⋆

**Definíció.** FÜGGETLEN CSÚCSHALMAZ: adott egy $G$ gráf és egy $k$ természetes szám. Van-e $G$-ben $k$-elemű független csúcshalmaz?

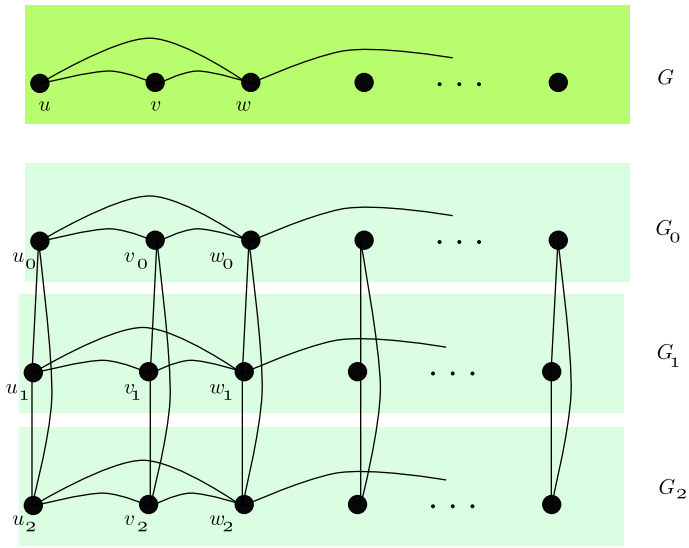
**9. Tétel.** *FÜGGETLEN CSÚCSHALMAZ $\mathcal{NP}$-teljes.*

*Bizonyítás.* FÜGGETLEN CSÚCSHALMAZ $\in \mathcal{NP}$: tanú egy független csúcshalmaz.

FÜGGETLEN CSÚCSHALMAZ $\mathcal{NP}$-nehézségére két bizonyítást adunk.

I. SAT visszavezetése: $\mathcal{C} = (C_1 = \langle z_{1,1}, \ldots, z_{1,r_1}\rangle, \ldots, C_k = \langle z_{k,1}, \ldots, z_{k,r_k}\rangle) \mapsto (G_{\mathcal{C}}, k)$ ($(i,j)$ jelentése: $i$-edik klóz $j$-edik literálja), $V(G_{\mathcal{C}}) = \{(i,j) : i \leq k, j \leq r_i\}$, $E(G_{\mathcal{C}}) = \{(i,j),(i',j') : i = i' \text{ vagy } z_{i,j} = \overline{z}_{i',j'}\}$. Könnyű meggondolni, hogy $G_{\mathcal{C}}$ polinom időben meghatározható és pontosan akkor van benne $k$ elemű független halmaz, ha $\mathcal{C}$ kielégíthető, mivel kiértékelés akkor kielégítő, ha minden klózból ki tudunk választani egy igaz literált (az élek garantálják, hogy változó és negáltja egyszerre ne szerepeljenek, illetve minden klózból legfeljebb egy literált válasszunk).

II. SZÍNEZÉSI PROBLÉMA visszavezetése: $G \mapsto (G', |V(G)|)$, ahol $V(G') = \{(v,i) : v \in V(G), i \in [3]\}$ (itt $(v,i)$ jelentése az, hogy $v$ az $i$ színt kapja), $E(G') = \{(v,i)(v',i') : v = v', i \neq i' \text{ vagy } vv' \in E(G), i = i'\}$ (vagyis: élek a tiltások, tiltott, hogy egy csúcs több színt kap vagy összekötött csúcsok azonos színt kapnak).




Könnyű meggondolni, hogy $G'$ és $|V(G)|$ is polinom időben meghatározható, és pontosan akkor van $G'$-ben $|V(G)|$ elemű független halmaz, ha $G$ gráf 3-színezhető. ■

**Megjegyzés.** Szemben a SZÍNEZÉSI PROBLÉMÁval, ha $k$ nem az input része, hanem konstans, akkor az így kapott $k$-FÜGGETLEN HALMAZ probléma már polinom időben megoldható (egy $n$ csúcsú gráfnak $n$-ben polinomiális sok $k$-elemű részhalmaza van, ha $k$ fix).

⋆

**Definíció.** KLIKK probléma: adott egy $G$ gráf és egy $k$ természetes szám. Van-e $G$-ben $k$ méretű klikk?

**Definíció.** LEFOGÓ PONTHALMAZ: adott egy $G$ gráf és egy $k$ természetes szám. Van-e $G$-ben $k$-elemű lefogó ponthalmaz?

**10. Következmény.** *KLIKK és LEFOGÓ PONTHALMAZ $\mathcal{NP}$-teljesek.*

*Bizonyítás.* Ekvivalensek a FÜGGETLEN CSÚCSHALMAZ problémával. ■

⋆

Egy gráf vágása csúcsainak két diszjunkt részre bontása. A vágás élhalmaza azon éleket tartalmazza, amelyek egyik végpontja az egyik, másik végpontja a másik részbe esik.

**Definíció.** MAX-CUT probléma: adott egy $G$ gráf és egy $k$ természetes szám. Van-e $G$-ben olyan vágás, amely legalább $k$ élű?

**11. Tétel.** *MAX-CUT $\mathcal{NP}$-teljes.*

*Bizonyítás.* MAX-CUT $\in \mathcal{NP}$: tanú egy színezés, polinom időben kiszámolható az élszáma, amit $k$-val összehasonlíthatunk.

MAX-CUT $\mathcal{NP}$-nehéz: NEM-MIND-IGAZ-3-SAT-ot vezetjük rá vissza. $\mathcal{C}$ 3-CNF-hez hozzárendeljük $G_{\mathcal{C}}$ gráfot, amely csúcsai $\mathcal{C}$ változói és azok negáltjai (a

literálok). Minden $C \in \mathcal{C}$ klózra a benne szereplő három literált páronként összekötjük. (Ezekre az élekre mint klóz-élekre hivatkozunk.) Minden klózchoz három klóz-él tartozik. Ha két literál több klózban is együtt szerepel, akkor többszörös élek lesznek a redukció által megkonstruált gráfban. Minden $x$ változóra $x$ és $\overline{x}$ közé is behúzunk egy élt. (Ezekre az élekre mint változó-élekre hivatkozunk.) Ezzel leírtuk a $G_{\mathcal{C}}$ gráf összes élét.

Könnyű ellenőrizni, hogy $G_{\mathcal{C}}$ polinom időben meghatározható, és pontosan akkor van benne $|V| + 2|\mathcal{C}|$ élű vágás, ha van olyan kiértékelése a változóinknak, hogy $\mathcal{C}$ minden klóza nem-homogén. Valóban, $G_{\mathcal{C}}$ minden vágása lefeljebb (az összes) $|V|$ literál-élet és minden klóz három klózéléből legfeljebb 2-t tartalmaz. Azaz $|V|+2|\mathcal{C}|$ egy felső becslés $G_{\mathcal{C}}$ tetszőleges vágásának élszámára. Ha egy $(I, H)$ vágás eléri ezt a felső becslést, akkor minden literálélet tartalmaz, azaz minden $x$ változóra $x$ és $\overline{x}$ közül egyik $I$-be, másik $H$-ba esik. Azaz a vágás definiál egy kiértékelés'et a változóinknak. Továbbá minden klóz három klózéléből kettőt tartalmaz a vágás, azaz a leírt kiértékelés nem-mind-igaz módon ielégíti (a tetszőlegesen választott) klózt $\mathcal{C}$-ből. ■

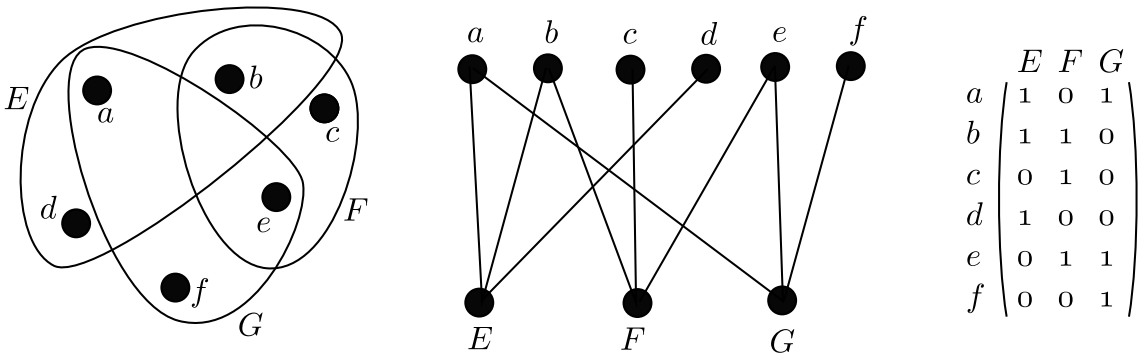
**Megjegyzés.** A MIN-CUT probléma annak tesztelését kéri, hogy van-e olyan vágás, amely élszáma $k$-nál nem nagyobb. Ez a probléma polinom időben megoldható. A folyamok elmélete alapján a legkisebb vágás élhalmaza meghatározható.

# 3. Halmazrendszerekre vonatkozó problémák

**Definíció.** $\mathcal{H}$ halmazrendszer a $V$ halmaz felett, ha $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{P}(V)$. $\mathcal{H}$ elemei a halmazrendszer élei. $k$-uniform halmazrendszer olyan halmazrendszer, amely összes éle $k$ elemű. Tehát az egyszerű gráfok pontosan a 2-uninform halmazrendszerek.

**Észrevétel.** $V, \mathcal{H}$ halmazrendszer könnyen leírható $B$ páros gráffal. A két színosztály $V$ (felső pontok) és $\mathcal{H}$ (alsó pontok). Az alaphalmaz egy $v$ eleme/csúcs akkor és csak akkor van összekötve $\mathcal{H}$ egy $E$ elemével/éllel, ha $v \in E$.

A halmazrendszert lehet kódolni pont-él illeszkedési mátrixszal. Ez egy $n \times m$ méretű 0-1 mátrix, ahol $n = |V|$ és $m = |\mathcal{H}|$




1. ábra. Egy halmazrendszer a középiskolai Venn-diagrammal lerajzolva, a hozzá tartozó, őt kódoló $B$ páros gráf és a pont-él-illeszkedési mátrix

⋆

**Definíció.** A gráfelmélet független csúcshalmazának fogalmát kétféleképpen terjeszthetjük ki halmazrendszerekre:

- $I$ független, ha minden $E \in \mathcal{H}$ élre $E \not\subseteq I$.
- $I$ független*: ha minden $E \in \mathcal{H}$ élre $|E \cap I| \leq 1$.

**Definíció.** FGTLEN-CSÚCSOK-HALMAZRENDSZERBEN=

$$\{\lceil V, \mathcal{H}, k\rceil : \text{van olyan } I \text{ független csúcshalmaz, hogy } |I| = k\}.$$

FGTLEN*-CSÚCSOK-HALMAZRENDSZERBEN=

$$\{\lceil V, \mathcal{H}, k\rceil : \text{van olyan } I \text{ független}^* \text{ csúcshalmaz, hogy } |I| = k\}.$$

A páros gráf kódoláson alapulva könnyű leírni a független* halmazokat. Ezeknek $B$-ben felső pontok egy olyan $I$ halmaza tartozik, amelyekre nem illeszkedik $V$-alak, azaz olyan $a \in A, f, f' \in I \subset F$ ponthármas, ahol $a$ összekötött $f$ és $f'$-vel.

**Definíció.** Legyen $B$ egy halmazrendszert leíró páros gráf. Az alsó/felső szerepek felcserélésével a $B^*$ páros gráfot kapunk. Ez a $B^*$ „elolvasható halmazrendszerként" visszaalakítva halmazrendszerré a $V^* = \mathcal{H}$, $\mathcal{H}^* = V$ duális halmazrendszert kapunk.

A redukciók sorozatát egy trivialitással kezdjük.

**12. Tétel.** *(i) FGTLEN-CSÚCSOK $\preceq$ FGTLEN-CSÚCSOK-HRSZBEN*
*(ii) FGTLEN-CSÚCSOK $\preceq$ FGTLEN*-CSÚCSOK-HRSZBEN*

Valóban, a gráfelméleti problémá gráfja a halmazrendszerek egy speciális esete. A gráfelméleti függetlenség mindkét halmazrendszeres függetlenség fogalom speciális esete.

**Definíció.** FGTLEN-ÉLEK-HRSZBEN =

$$\{\lceil V, \mathcal{H}, k^\rceil : \mathcal{H}\text{-ban } J \ k \text{ db olyan él, amelyek páronként diszjuntak}\}.$$

A következő tétel már kevésbé nyilvánvaló.

**13. Tétel.** *FGTLEN*-CSÚCSOK-HRSZBEN $\preceq$ FGTLEN-ÉLEK-HRSZBEN*

*Bizonyítás.* $V, \mathcal{H}, k$-ból képezzük a duális halmazrendszert, a $k$ értékét pedig tartsuk meg: $V^*, \mathcal{H}^*, k$.

Azt kell eldöntenünk, hogy az erdeti halmazrendszert leíró $B$ páros gráfban van-e $k$ felső pont úgy, hogy ne támaszkodjon rá $\vee$ alak. $V^*, \mathcal{H}^*$ páros gráfja éppen a fejetetejére állított $B$. Azaz az eredeti döntési feladat ekvivalens azzal, hogy fejrefordított $B$ gráfban van-e $k$ alsó csúcs ($k$ darab él), hogy ne támaszkodjon rá $\wedge$, azaz páronként diszjunktak legyenek. Azaz FGTLEN-ÉLEK-HRSZBEN problémát kell megoldani $V^*, \mathcal{H}^*, k$ esetén.

Azaz a kiinduló transzformáció a tételt igazoló redukció. ■

**Megjegyzés.** FGTLEN-ÉLEK-GRÁFOKBAN probléma, másképpen PÁROSÍTÁS $= \{\lceil G, k\rceil : \nu(G) \geq k\}$. Az Edmonds-algoritmus alapján ez egy $\mathcal{P}$-beli probléma. Azaz a gráfokra vonatkozó eset könnyen kezelhető.

**Definíció.** PARKETTÁZÁS =

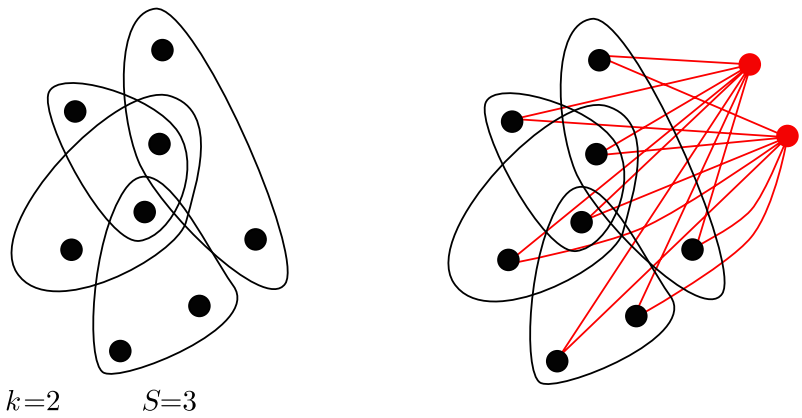
$$\{\lceil V, \mathcal{H} \rceil : \text{ léteznek } E_1, \ldots, E_k \text{ páronként diszjunkt élek, hogy } \dot{\cup} E_i = V\}$$

**14. Tétel.** *FGTLEN-ÉLEK-HRSZBEN$\preceq$PARKETTÁZÁS.*

*Bizonyítás.* Legyen $V, \mathcal{H}, k$ az input. Legyen $S$ a maximális élméret paraméter. El kell dönteni, hogy van-e $k$ db diszjunkt él.

A konstrukciót több lépésben végezzük el. Először $\mathcal{H}$-t úgy transzformáljuk, hogy uniform legyen: Minden $E$ élhez $S - |E|$ sok új pontot veszünk fel (különböző élekhez különböző új pontokat használunk). A módosított halmazrendszerre vonatkozó probléma nyilván ekvivalens a kiinduló problémával.

A konstrukció második lépésében már feltesszük, hogy $\mathcal{H}$ egy $S$-uniform halmazrendszer. Ebben a lépésben $V(H)$-hoz hozzáveszünk $|V(H)| - k \cdot S$ darab új csúcsot (legyen $\widetilde{V}$ a kapott ponthalmaz), $\widetilde{\mathcal{H}}$ elemei pedig $\mathcal{H}$ elemei és minden régi-új csúcspárra egy-egy őket tartalmazó kételemű halmaz.




2. ábra. Az 5. Tétel redukciója. $|V| - kS = 8 - 2 \cdot 3 = 2$. A két új pont és a hozzájuk tartozó gráfélek a jobb oldalon szerepelnek pirosban.

**Észrevétel.** $(\widetilde{V}, \widetilde{\mathcal{H}})$ parkettázásához le kell fedni a $|V| - kS$ darab új csúcsot, ami csak a $|V| - kS$ darab új csúcskettőssel lehet. A maradék parkettázó élek csak régi élek lehetnek, amelyek $kS$ csúcsot fednek le. Azaz a parkettázás ad $k$ független elt $\mathcal{H}$-ban.

Az észrevétel gondolatmenetének megfordításá teszi teljessé a bizonyítás elméleti részét. ■

⋆ ⋆ ⋆

**Definíció.** HALMAZRENDSZEREK SZÍNEZÉSI PROBLÉMÁJA: adott egy $H$ halmazrendszer és egy $k$ természetes szám. Kiszínezhetők-e $V(H)$ elemei $k$ színnel, hogy semelyik $H$-beli halmaz ne legyen monokromatikus?

**15. Tétel.** *HALMAZRENDSZEREK SZÍNEZÉSI PROBLÉMÁJA $\mathcal{NP}$-teljes.*

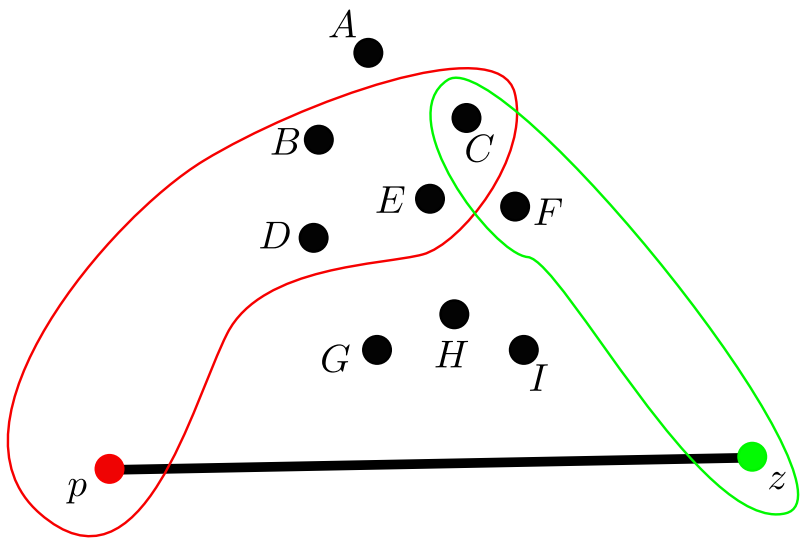
*Bizonyítás.* A gráfelméleti színezési probléma általánosítása. ■

Gráfok esetén a 2-színezhetőség esete könnyen kezelhető volt.

**Definíció.** HALMAZRENDSZEREK-2-SZÍNEZHETŐSÉGE: Adott egy $\mathcal{H}$ halmazrendszer. Döntsük el: kiszínezhetők-e $V(H)$ elemei 2 színnel úgy, hogy semelyik $H$-beli halmaz ne legyen monokromatikus.

**16. Tétel.** *PARKETTÁZÁS $\preceq$ HALMAZRENDSZEREK-2-SZÍNEZHETŐSÉGE.*

*Bizonyítás.* Adott egy $V, \mathcal{H}$ input a parkettázás problémához.
**Konstrukció:** $\widetilde{V} = \mathcal{H} \cup \{p, z\}$. $\widetilde{H}$-hoz minden $E, F$ metsző $\mathcal{H}$-beli élpárra legyen $Z_{E,F} = \{E, F, z\}$ egy él. Minden $v \in V$ esetén legyen $R_v = \{E : v \in E \in \mathcal{H}\} \cup \{p\}$ egy $\widetilde{\mathcal{H}}$-beli él. Továbbá legyen $\{p, z\}$ is egy $\widetilde{\mathcal{H}}$-beli él.




3. ábra. $A, B, C, \ldots, H, I$ pontosan a halmazrendszerünk élei. $B, C, D, E$ pontosan az $a$ elemet tartalamzó élek. $C$ és $F$ élek metszőek. A fenti információkból kiolvasható éleket rajzoltuk be az ábrába, amely a redukció megfelelő töredékét tartalmazza.

**Észrevétel.** $\widetilde{V}, \widetilde{\mathcal{H}}$ egy 2-színezése esetén legyen $p$ színe piros, $z$ színe zöld (a $\{p, z\}$ él kényszerít a teljes paletta használatára). Az eredeti éleknek megfelelő csúcsok közül a zöld szín kijelöl egy élhalmazt. Ezek parkettázzák az eredti halmazrendszert.

Valóban, köztük két metsző él egy $Z_{E,F}$ típusú zöld-homogén élhez vezetne a redukció eredményében. Míg egy lefedetlen $v$ csúcs (az eredeti halmazrendszerben) adna egy $R_v$ piros-homogén élt.

A gondolatmenet megfordítható, a bizonyítás teljes. ■

⋆ ⋆ ⋆

Az alábbi problémák mindegyike $\mathcal{NP}$-teljes. Ezek nem szerepeltek előadáson. Csak megemlítjük az érdeklődő olvasóknak és ötletet adunk az igazoláshoz.

**Definíció.** HÁRMASÍTÁS: adott három azonos méretű halmaz és ennek transzverzálisaiból álló 3-uniform halmazrendszer. Van-e a halmazrendszernek olyan részhalmaza, amely a három halmaz uniójának partícióját adja?

**Ötlet.** Szokásos visszavezetés: 3-SAT.

**Definíció.** 3-UNIFORM HALMAZRENDSZER PARTÍCIÓ: adott egy 3-uniform halmazrendszer. Van-e olyan részhalmaza, ami az alaphalmaz partíciója?

**Ötlet.** HÁRMASÍTÁS általánosítása.

## 3.1. Aritmetizált problémák

**Definíció.** DIOPHANTOSZI-EGYENLŐTLENSÉGRENDSZER: adott egy $Ax \leq b$ egész együtthatós lineáris egyenlőtlenségrenszer. Van-e megoldása egész számokban?

**17. Tétel.** *DIOPHANTOSZI-EGYENLŐTLENSÉGRENDSZER $\mathcal{NP}$-teljes.*

*Bizonyítás.* $\mathcal{NP}$-beliségre tanú egy megoldás.

Az $\mathcal{NP}$-nehézség bizonyításához a SAT-ot vezetjük vissza a problémára: adott egy konjunktív normálforma. Minden $x_i$ változóra bevezetjük a $0 \leq x_i \leq 1$, és minden $\langle z_1, \ldots, z_k \rangle$ klózra a $t_1 + \ldots + t_k$ egyenlőtlenséget, ahol $t_i = x_j$, ha $t_i = x_j$ és $t_i = 1 - x_j$, ha $t_i = \overline{x}_j$. Könnyű látni, hogy az egyenlőtlenségrendszer polinom időben megkonstruálható, és pontosan akkor megoldható, ha a konjunktív normálforma kielégíthető. ■

**Definíció.** RÉSZLETÖSSZEG=

$$\{\lceil A, b \rceil : A \subset \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}, \text{van olyan } R \subset A, \text{ hogy az } R\text{-beli számok összege } b\}.$$

A feladat egy egyszerű értelmezése: $A$ a pénztárcánkban lévő érmék értékeit összegyűjtő halmaz . $A, b$ kódja akkor tartozik az elfogadandó nyelvhez, ha $b$ összeget pontosan ki tudunk fizetni a pénztárcánkból.

**18. Tétel.** *RÉSZLETÖSSZEG $\mathcal{NP}$-teljes.*

*Bizonyítás.* RÉSZLETÖSSZEG nyilván $\mathcal{NP}$-beli. Belátjuk, hogy PARKETTÁZÁS $\preceq$ RÉSZLETÖSSZEG.

Legyen $V, \mathcal{H}$ a PARKETTÁZÁS egy inputja. Ki lehet-e választani olyan parkettahalmazt/élhalmazt, amivel ki lehet parkettázni a $V$-t/padlót?
**Konstrukció:** Legyen $w : V \to \{1, a, a^2, \ldots, a^{|V|-1}\}$ tetszőleges bijekció. Az értékkészletre gondoljunk mint az $a$ alapú számrendszer helyiértékei.

Legyen $E \in \mathcal{H}$ esetén $a_E = \sum_{v:v \in E} w(v)$. Legyen $A = \{a_E : E \in \mathcal{H}\}$ és $b = 11\ldots1_a = \sum_{v:v \in V} w(v)$. Ezzel leírtuk a részletösszeg probléma egy inputját.

**Észrevétel.** Ha $a$ értékét $|\mathcal{H}| + 1$-nek választjuk, akkor $a_i \in A$ számok olyanok, hogy minden részletösszeg az $a$ alapú számrendszerben maradék továbbvitele nékül kiszámolható.

Az észrevétel egyből adja, hogy a csupa 1-es számjegyből álló szám előállítása mint részletösszeg ekvivalens az eredeti halmazrendszerre vonatkozó PARKETTÁZÁS feladattal (alkalmasan nagy $a$ esetén).

A redukció során előforduló legnagyobb szám $S = \sum_{i=0}^{|V|-1} a^i = \frac{a^{|V|}-1}{a-1} < a^{|V|}$. Kódjának hossza $|V| \log a = |V| \log(|\mathcal{H}| + 1)$. Redukciónk polinomiális. ■

⋆ ⋆ ⋆

Az alábbi problémák mindegyike $\mathcal{NP}$-teljes. Ezek nem szerepeltek előadáson. Csak megemlítjük az érdeklődő olvasóknak és ötletet adunk az igazoláshoz.

**Definíció.** HÁTIZSÁK: Adott tárgyak $T$ halmaza. Minden $t \in T$ tárgyhoz tartozik egy $V_t$ térfogat és egy $v_t$ érték ($v_t, V_t \in \mathbb{N}$). Adott egy hátizsák, amelybe legfeljebb $H$ össztérfogatú tárgyakat pakolhatunk. Továbbá adott egy $L$ értékhatár. ($H, L \in \mathbb{N}$.) Kiválasztható-e $T$ egy részhalmaza úgy, hogy elférjen a hátizsákban és összértéke legalább $L$ legyen?

**Ötlet.** Szokásos visszavezetés: 3-UNIFORM HALMAZRENDSZER PARTÍCIÓ.

**Definíció.** LÁDAPAKOLÁS: adott egész számok $A$ halmaza, egy $b$ és egy $c$ egész szám. Meg lehet-e adni $A$ egy legfeljebb $b$ osztályú partícióját, amelyben minden osztály összege legfeljebb $c$?

**Ötlet.** Szokásos visszavezetés: HÁRMASÍTÁS.