**ALGORITMUSOK ÉS BONYOLULTSÁGELMÉLET**

Matematika MSc hallgatók számára

# 5. Előadás

*Előadó: Hajnal Péter*
*Jegyzetelő: Hajnal Péter*

2013. március 7.

## 1. Nehézség, relatív nehézség

A korábbiakban több nyelvosztályt bevezettünk ($\mathcal{L}, \mathcal{P}, \mathcal{D}, \mathcal{EXP}$). Láttunk több példát központi matematikai problémákra (HAMILTON, $\overrightarrow{st}$-ELÉRHETŐSÉG, SZÓPROBLÉMA, FAKTORIZÁCIÓ,...). Központi kérdés, hogy az egyes problémákat elhelyezzük a bevezetett hierarchiában. Cél egy fontos probléma minél pontosabb helyének/bonyolultságának meghatározása.

A „hely" meghatározása két feladatból áll.

(1) Egy $L$ nyelv/probléma bonyolultságának felső becslése (azaz annak bizonyítása, hogy $L \in \mathcal{C}_1$) egy algoritmus megadását kívánja, majd az algoritmus analízését, ami mutatja, hogy a $\mathcal{C}_1$ osztályhoz tartozást igazol. Ilyen típusú eredmények (amelyek jóval a számítógépek megjelenése előtt felismerhetők a matematika történetben) alkotják az algoritmuselmélet kiindulópontját.

(2) Egy $L$ nyelv/probléma bonyolultságának alsó becslése (azaz annak bizonyítása, hogy $L \notin \mathcal{C}_2$) jóval összetettebb. Azt kívánja, hogy rámutassunk egy elméleti nehézségre ami megakadályozzá, hogy hatékony algoritmussal megoldhassunk egy feladatot, legyünk bármilyen okosak, legyenek bármilyen zseniális ötletünk.

Az (1) feladatot intenzíven vizsgálják, sok új algoritmus, algoritmuselméleti technika születik nap mint nap. A (2) feladat joíval nehezebb, szinte azt mondhatjuk semilyen eredmény sem született ebben az irányban. Két fontos „támadási irányt" említünk meg:

(a) A Turing-gép általános modelljét helyettesítsük egy egyszerűbb számítási modellel (ami így várhatóan nem univerzális számítási fogalom) és próbáljunk ott alsó becsléseket bizonyítani. Például a SORTING ($n$ szám nagyság szerinti sorbarendezése) problémánál csak két input szám összehasonlítása és az eerdmény szerinti szétágazás alapján dolgozzon eljárásunk. A megkötés természetes. A legtöbb algoritmus ilyen. Belátható, hogy legalább $n \log n$ összehasonlítás szükséges az otuput kiszámításához.

(b) Ne (abszolút) nehézséget vizsgáljunk, hanem relatívet. Tehát célünk csak annak igazolása, hogy egy problémá legalább olyan nehéz mint egy másik.

Az utóbbi út nagyon gyümölcsözőnek bizonyult. Erről lesz szó ebben az előadásban.

# 2. Problémak redukciói

Egy $L$ nyelv/probléma $\omega$ inputja lényegében egy kérdés: $\omega$ hozzátartozik $L$-hez? A redukció egy olyan hozzárendelés/számolás, ami a kérdés megválaszolása helyett egy új kérdést számol ki: „Leírok egy $\widetilde{\omega}$ új inputot és megkérdezem, hogy egy új $\widetilde{L}$ nyelvhez tartozik-e. Ha valaki megmondja a választ, akkor én meg tudom mondani az eredeti kérdésre a választ. Sőt az ugyanaz lesz mint az én kérdésemre." A gondolat furcsa, de fontos. Lássuk a formalizmust:

**Definíció.** Legyen $L, \widehat{L} \subset \Sigma^*$ két nyelv és $\mathcal{C}$ egy bonyolultsági osztály. $L$ redukálható $\widehat{L}$-ra $\mathcal{C}$-ben, jelben: $L \preccurlyeq_{\mathcal{C}} \widehat{L}$, ha létezik $R$ kiszámítható Turing-gép, hogy

(i) $R$ egy $\mathcal{C}$ komplexitású gép/eljárás,

(ii) $\omega \in L$ pontosan akkor, ha $\widetilde{\omega} \in \widehat{L}$, ahol $\widetilde{\omega}$ az $\omega$-ból $R$ által kiszámolt jelsorozat.

A bevezetett reláció olvasata: $L$ redukálható $\widehat{L}$-re $\mathcal{C}$-ben. Az $L$-ben rejlő kérdés visszavezethető az $\widehat{L}$-ben rejlő kérdésre. Jelentése: Az $\widehat{L}$ nyelv eldöntési feladata „legalább olyan nehéz", mint az $L$-é „modulo $\mathcal{C}$".

Más redukció fogalmak is léteznek. A fenti definíció Karp munkásságában rejlik és általában Karp-redukcióként hivatkozzák. Ha szükség van ennek hangsulyozására, akkor a $\preccurlyeq_{\mathcal{C}}^{\text{Karp}}$ jelölést használjuk. Ebben a kurzusban legtöbbször ilyen redukciót látunk. Legtöbbször le is hagyjuk a felső indexet.

## 2.1. Egyszerű példák

Legyen

$$\begin{array}{lcl} \text{KLIKK} & = & \{\lceil G,k\rceil : G\text{-ben van } k \text{ elemű klikk}\} \\ \text{FÜGGETLEN-CSÚCSHALMAZ} & = & \{\lceil G,k\rceil : G\text{-ben van } k \text{ elemű független} \\ & & \quad \text{csúcshalmaz}\} \\ \text{LEFOGÁS} & = & \{\lceil G,k\rceil : G \text{ lefogható } k \text{ csúccsal}\} \end{array}$$

Az alábbi redukciók lényege jól ismert a BSc-s Kombinatorika tárgyból.

**Példa.** KLIKK$\preccurlyeq_{\mathcal{P}}$FÜGGETLEN-CSÚCSHALMAZ.

A redukció rendkívül egyszerű: Adott egy $\omega = \lceil G,k\rceil$ inputja a KLIKK problémának. Ekkor $G$ kódjából kiszámoljuk a komplmenterét (annak kódját). $\widetilde{\omega}$ a $\lceil \overline{G},k\rceil$ karaktersorozat lesz. A korábbi gráfelméleti tanulmányainkból az új „kérdés" ekvivalens az eredetivel. $\widetilde{\omega}$ kiszámításának bonyolultsága nyilván polinomiális (igazából logaritmikus tárban megoldható).

**Példa.** FÜGGETLEN-CSÚCSHALMAZ$\preccurlyeq_{\mathcal{P}}$LEFOGÁS.

A redukció rendkívül egyszerű: Adott egy $\omega = \lceil G,k\rceil$ inputja a FÜGGETLEN-CSÚCSHALMAZ problémának. Ekkor $G$ és $k$ kódjából kiszámoljuk $|V(G)| - k$ értéket. $\widetilde{\omega}$ a $\lceil G, |V(G)| - k\rceil$ karaktersorozat lesz. A korábbi gráfelméleti tanulmányainkból az új „kérdés" ekvivalens az eredetivel. $\widetilde{\omega}$ kiszámításának bonyolultsága nyilván polinomiális (igazából logaritmikus tárban megoldható).

**Példa.** LEFOGÁS$\preccurlyeq_{\mathcal{P}}$KLIKK.

A redukció rendkívül egyszerű: Adott egy $\omega = \lceil G, k \rceil$ inputja a LEFOGÁS problémának. Ekkor $G$ és $k$ kódjából kiszámoljuk a komplmenterét és $|V(G)| - k$-t. $\widetilde{\omega}$ a $\lceil \overline{G}, |V(G)| - k \rceil$ karaktersorozat lesz. A korábbi gráfelméleti tanulmányainkból az új „kérdés" ekvivalens az eredetivel. $\widetilde{\omega}$ kiszámításának bonyolultsága nyilván polinomiális (igazából logaritmikus tárban megoldható).

Megjegyezzük, hogy se a KLIKK, se a LEFOGÁS, se a FÜGGETLEN-CSÚCS-HALMAZ nyelvre nem ismert hatékony algoritmus. Ha bármelyikre lenne, akkor az a másik problémára is jelentős kihatással lenne.

A teljessség kedvéért megemlítünk egy másik fajta redukciót. Ezt Turing nevéhez fűzik.

## 2.2. Turing-redukció

**Definíció.** Legyen $L, \widehat{L} \subseteq \Sigma^*$ két nyelv és $\mathcal{C}$ egy bonyolultsági osztály.

$L \preccurlyeq_{\mathcal{C}}^{\text{Turing}} \widehat{L}$ pontosan akkor, ha megadható $R$ eldöntő Turing-gép, amelyre

(i) $L$-et dönti el és $R$ egy $L_2$-orákulumos gép.

(ii) $R$ bonyolultsága $\mathcal{C}$-beli.

(i)-ben szerepel egy eddig ismeretlen fogalom, amit tisztáznunk kell.

**Definíció.** Legyen $O \subset \Sigma^*$ egy nyelv. $R$ egy $O$-orákulumos gép, ha van egy extra kérdés/orákulum-szalagja. Erre csak írhat a gép (nincs szem a szalag felett, a kéz csak jobbra mozogva írhat). Az írott karakterek $\Sigma \cup \{?\}$ elemei, azaz az $O$ nyelv ábécéjének elemei és egy speciális '?' jel. A kérdésszalagra a ? jel feírása egy kérdés feltételét jelenti. Az előző kérdőjel (vagy szalag-kezdet jel) és közte lévő $\Sigma^*$-eli karaktersorozatról kérdezi meg a gép/algoritmus, hogy az orákulum $O$ nyelvéhez tartozik-e. Az állapothalmaz

$$\{\text{ORÁKULUM-IGEN}, \text{ORÁKULUM-NEM}\} \times S_0$$

alakú. Az átmeneti függvény a következő konfigurációnak az állapotában csak a második komponensre hat. Az első komponens csak akkor változik, ha az algoritmus kérdést tesz fel az orákulumhoz. A változást a kérdés karaktersorozat $O$-hoz való viszonyától függ természetes módon. Azaz a kérdés ára 1 időegység és 0 tár. Ezek után a futás (a kiinduló konfigurációból generált konfigurációsorozat), a kiszámított nyelv értelemszerűen definiálható.

A Karp-redukció nagyon speciális Turing-redukció: Szokásos számolás után egyetlen kérdés hangozhat el az $\widehat{L}$ nyelvhez tartozásról. A kérdésre adott válasz egyben a kiszámított bit is.

A Turing-redukció nyilván sokkal erősebb fogalom. Az $\widehat{L}$-ra úgy gondolhatunk, mint egy megíratlan szubrutin. A redukció lényege, hogy ha a $\widehat{L}$ szubrutint valaki hatékonyan leírja, akkor $L$ hatékonyan eldönthető (feltéve, hogy $R$ hozzájárulása (ami $\mathcal{C}$ bonyolultságú) is hatékonynak tekinthető). Mi nem kívánjuk a a szubrutin megvalósítását, „meghívását" és az eredmény megkapását egyetlen egy lépésnek számoljuk.

## 2.3. Redukálhatóság tulajdonságai

Végül megemlítünk egy fontos tulajdonságát a redukcióknak.

**1. Lemma.** *(i)* $\preccurlyeq_{\mathcal{P}}$ *tranzitív.*

*(ii)* $\preccurlyeq_{\mathcal{L}}$ *tranzitív.*

*(iii) Legyen* $s(n) \geq \log n$ *szép tárfüggvény. Ha* $L_1 \preccurlyeq_{\mathcal{SPACE}(\mathcal{O}(s(n)))} L_2$ *és* $L_2 \preccurlyeq_{\mathcal{L}} L_3$ *, akkor* $L_1 \preccurlyeq_{\mathcal{SPACE}(\mathcal{O}(s(n)))} L_3$

***Bizonyítás.*** (i) Tegyük fel, hogy $L_1 \preccurlyeq_{\mathcal{P}} L_2$ és $L_2 \preccurlyeq_{\mathcal{P}} L_3$. Továbbá $R_1$ és $R_2$ kettő, a két redukciót igazoló algoritmus. Speciálisan $R_1$ és $R_2$ is polinomiális. Legyen $p_1$ és $p_2$ két polinom, ami $R_1$ és $R_2$ időkorlátját adják. $p_2$-ről feltehetjük, hogy monoton növő.

Egy $\omega$ inputon futtassuk $R_1$-et, ami $\widetilde{\omega}$ karaktersorozatot számolja ki. Majd $R_2$-t futtasuk $\widetilde{\omega}$-n, ami $\widetilde{\widetilde{\omega}}$ kiszámításához vezet. Az így kapott Turing-gép legyen $R$. Belátjuk, hogy $R$ a $L_1 \preccurlyeq_{\mathcal{P}} L_3$ redukciót igazolja.

$\omega \in L_1$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\widetilde{\omega} \in L_2$. Ami akkor és csak akkor teljesül, ha $\widetilde{\widetilde{\omega}} \in L_3$ban,

Be kel még látni, hogy $R$ polinomiális. $\omega$ inputon $R$ időigénye $p_1(|\omega|) + p_2(|\widetilde{\omega}|)$. $\widetilde{\omega}$-t egy $p_1$ időkorlátú gép számolja ki $\omega$-ból, így $|\widetilde{\omega}| \leq p_1(\omega)$. Így $\omega$-n a futási idejére a következő felső becslés adódik

$$p_1(|\omega|) + p_2(|\widetilde{\omega}|) \leq p_1(|\omega|) + p_2(p_1(|\omega|)).$$

Ez egy polinomiális felső becslés.

(ii) Tegyük fel, hogy $L_1 \preccurlyeq_{\mathcal{L}} L_2$ és $L_2 \preccurlyeq_{\mathcal{L}} L_3$. Továbbá $R_1$ és $R_2$ kettő, a két redukciót igazoló algoritmus. Speciálisan $R_1$ és $R_2$ is logaritmikus tárigényű.

A két redukcióból az előző módon rakunk össze egy $R$ algoritmust: Egy $\omega$ inputon futtassuk $R_1$-et, ami $\widetilde{\omega}$ karaktersorozatot számolja ki. Majd $R_2$-t futtasuk $\widetilde{\omega}$-n, ami $\widetilde{\widetilde{\omega}}$ kiszámításához vezet.

Az így kapott algoritmus NEM jó. A közbülsőnek kiszámolt $\widetilde{\omega}$-ra a munkaszalagon an szükség. Ez várhatóan nem fér el logaritmikus tárban. Ennek ellenére ezen $R$ algoritmus futása legyen a fejünkben. Az igazi $\widetilde{R}$ redukcióban felismerjük $R$ futásának töredékeit.

$\widetilde{R}$ munkaszalagjai megfelelnek $R_1$ munkaszalgjainak plusz $R_2$ munkaszalgajainak. Lesz két plusz szalagunk a korábbi szalag helyett, ami $R_1$ output- és a vele közös $R_2$ inputszalagja volt. A plusz két szalag közül az első $R_1$ output szalagjának egy pozíciójának indexét (a szalag feletti kéz pozícióját) tartalmazza, míg másik szalag tartalma $R_2$ inputszalagján egy pozíció indexe (a szalag feletti szem pozíciója).

$\widetilde{R}$ az $R_2$ szimulációját végzi az $\widetilde{\omega}$ inputszalag tartalom nélkül. Minden olvasási feladatnál meg kell dolgoznunk. Ekkor tudjuk, hogy az $R_1$ által kiszámolt karaktersorzat hanyadik karakterére vagyunk kiváncsiak. El kezdjük $R_1$ szimulálását. A szimuláció során a kiszámolt karaktereket nem írjuk le, csupán az output-kéz pozícióját tároljuk. Ha $R_1$ ír, akkor az új pozíciót összeasonlítjuk az olvasni kívánt pozícióval. Ha megegyezik a két pozíció, akkor a le nem írt karaktert kiolvassuk az állapotból és az $R_1$-szimulációt leállítjuk, folytatjuk az $R_2$-szimulációt. Ha a két pozíció különbözik, akkor az $R_1$-szimulációt folytatjuk.

(iii) Az előző bizonyítás ötletei most is működnek. ■

A fenti bizonyítás egy kis módosítása az alábbi lemmához vezet.

**2. Lemma.**

*(i)* $L \preccurlyeq_{\mathcal{P}} \widehat{L}$ *és* $\widehat{L} \in \mathcal{P}$*, akkor* $L \in \mathcal{P}$*.*

*(ii)* $L \preccurlyeq_{\mathcal{L}} \widehat{L}$ *és* $\widehat{L} \in \mathcal{L}$*, akkor* $L \in \mathcal{L}$*.*

***Bizonyítás.*** Tekintsünk egy $A$ Turing-gépet, amely az $L$-ről $\widehat{L}$-ra történő redukciót végzi, valamint $\widehat{A}$-ot, amely a $\widehat{L}$ nyelvehz tartozási feladatot dönti el $\mathcal{P}$-ben. Legyen adott az $\omega$ input.

Ekkor végezzük el a

$$\omega \to A(\omega) \in \Sigma^{p(n)} \to \widehat{A}(A(\omega)) \in \{\text{ELFOGAD}, \text{ELVET}\}$$

számolást. Az első időigényét az $n$ inputméretben egy $p$ polinom korlátozza. A leghosszabb input, amit kiszámolhatunk $\Sigma^{p(n)}$-ba esik. A második lépés időigényét az inputméretben egy $q$ polinom korlátozza. Az összidő $(p + q \circ p)(n)$, ami $n$ egy polinomiális függvénye.

A két algoritmus együttese a Karp-redukció fogalma alapján éppen az $L$ nyelvet dönti el, vagyis $L$ is eldönthető polinom időben.

(ii) Az (i) rész és az előző lemma ötletei alapján nyilvánvaló. ■

## 2.4. Egy további példa

**Példa.** Legyen $L$ egy tetszőleges $\mathcal{NL}$-beli nyelv. Ekkor

$$L \preccurlyeq_{\mathcal{L}} \overrightarrow{st}\text{-ELÉRHETŐSÉG}.$$

A példához tartozó igazolás tulajdonképpen már elhangzott korábban. Korábban elhangzottakat foglal össze az alábbi tétel:

**3. Tétel.** *Legyen* $L \in_T \mathcal{NL}$*. Feltehető, hogy a tartalmazást igazoló Turing-gépnek adott hosszúságú inputokon kétféle leálló konfigurációja van (így elfogadó futások ugyanabban a konfigurációban érnek véget).*

$\omega \in \Sigma^*$*-hoz rendelhető a* $T$ *logaritmikus tárú Turing-gép redukált konfigurációinak (irányított)* $\overrightarrow{G} = \overrightarrow{G}_{T,\omega}$ *gráfja. Ebben ott van* $v_0$ *a kiinduló konfigurációnak megfelelő csúcs és* $v_+$ *az elfogadó konfigurációnak megfelelő csúcs. Ez a hozzárendelés olyan, hogy*

*(i)* $\omega \in L$ *akkor és csak akkor, ha* $\lceil \overrightarrow{G}_{\omega,T}, v_0, v_+ \rceil \in \overrightarrow{st}$*-ELÉRHETŐSÉG.*

*(ii) A hozzárendelés kiszámítható és tárigénye* $\mathcal{O}(\log(n))$*.*

A tételből következik a példa korrektsége. Ez a példa jóval általánosabb mint a korábbi példa. Hogy ezt lássuk nézzük meg néhány következményét.

**4. Következmény.** *Ha* $\overrightarrow{st}$*-ELÉRHETŐSÉG* $\in \mathcal{P}$*, akkor* $\mathcal{NL} \subset \mathcal{P}$*.*

A feltétel igaz, ez egyszerűen adódik például az algoritmuselméleti előadásokon megismert gráf-bejárási algoritmusok leírásából és elemzéséből. A fenti következmény a $\mathcal{NL} \subset \mathcal{P}$ tartalmazásra adott korábbi bizonyításunk újratárgyalása.

**5. Következmény.** *Ha* $\overrightarrow{st}$*-ELÉRHETŐSÉG* $\in \mathcal{L}$*, akkor* $\mathcal{NL} = \mathcal{L}$*.*

A konkluzió igazából $\mathcal{NL} \subset \mathcal{L}$ (a másik irányú tartalmazás nyilvánvaló). Itt a feltétel igazsága nem ismert, sőt sokan úgy hiszik nem is igaz. Ennek egy indoka lehet, hogy két bonyolultságiosztály váratlan egybeesését vonná magával.

# 3. Teljesség

A fenti okoskodás nagyon fontos. A gondolatmenetet lényege, hogy a példa alapján $\overrightarrow{st}$-ELÉRHETŐSÉG az egész $\mathcal{NL}$ nyelvosztály nehézségét magában foglalja. Ez vezet el egy általánosabb fogalom megalkotásához:

**Definíció.** $\widehat{L}$ nyelv *teljes* a $\mathcal{C}$ osztályban az $\mathcal{R}$ bonyolultságú rekurzióra, ha:

(i) $\widehat{L} \in \mathcal{C}$,

(ii) minden $L \in \mathcal{C}$ esetén $L \preccurlyeq_{\mathcal{R}} \widehat{L}$.

Két speciális esetet kiemelünk.

**Definíció.** Az $\widehat{L}$ nyelv $\mathcal{NP}$-teljes ha teljes $\mathcal{NP}$-ben a $\mathcal{P}$ redukcióra. Azaz $\widehat{L}$ nyelv $\mathcal{NP}$-*teljes*, ha

(i) $\widehat{L} \in \mathcal{NP}$,

(ii) minden $L \in \mathcal{NP}$ esetén $L \preccurlyeq_{\mathcal{P}} \widehat{L}$.

A fenti megállapodás egy alternatívája a $\preccurlyeq_{\mathcal{L}}$ redukcióval való dolgozás. Ez a szigorúbb értelmezés is igaz lesz a legtöbb későbbi $\mathcal{NP}$-teljességet igazoló redukciókra. Mi azonban csak a redukciók könnyebben ellenőrizhető polinom időbeliségét követeljük meg.

**Definíció.** Az $L$ nyelv $\mathcal{NL}$-teljes, ha teljes $\mathcal{NL}$-ben az $\mathcal{L}$ redukcióra nézve.

**Definíció.** $\widehat{L}$ *nehéz* a $\mathcal{C}$ osztályra $\mathcal{R}$ bonyolultságú redukcióval, ha minden $L \in \mathcal{C}$ esetén $L \preccurlyeq_{\mathcal{R}} \widehat{L}$.

Azaz a nehézség a teljesség fogalma az (i) feltétel nélkül. Azaz nem követeljük meg az osztályhoz tartozást csak az osztály elemeinek visszavezethetőségét rá. Gyakran kiszámíthatósági feladatokra is mondják, ha $\mathcal{C}$-nehéz, ha van olyan redukciós algoritmus, amely által kiszámolt $\widetilde{\omega}$ karaktersorozatra a feladat olyan értéket ad, amiből $\omega$ nyelvhez tartozása könnyen látható.

A következő tétel az új fogalmak segítségével tömören fogalmazza meg egy korábbi eredményeinket.

**6. Tétel.** *$\overrightarrow{st}$-ELÉRHETŐSÉG $\mathcal{NL}$-tétel.*

A redukciók vizsgálatánál láttuk az $\mathcal{NL}$-nehézséget. Még korábban láttuk az $\mathcal{NL}$-hez tartozást.

A tétel alapján az $\overrightarrow{st}$-ELÉRHETŐSÉG-ről szerzett tudásunk egész $\mathcal{NL}$-re kihat. Erre már láttunk egy példát: $\overrightarrow{st}$-ELÉRHETŐSÉG$\in \mathcal{P}$. Ez alapján adódott, hogy $\mathcal{NL} \subset \mathcal{P}$. A következőkben $\overrightarrow{st}$-ELÉRHETŐSÉG-et vizsgáljukmeg alaposabban.

# 4. IRÁNYÍTOTT-ELÉRHETŐSÉG és $\mathcal{NL}$

Egy újabb algoritmust adunk, aminek tárfelhasználása lesz nagyon takarékos:

$$\overrightarrow{st}\text{-ELÉRHETŐSÉG} \in \cup_{\alpha\in\mathbb{N}}\mathcal{SPACE}(\alpha\log_2^2 n) = \mathcal{SPACE}(\log^2 n).$$

Ezt a következő rekurzív algoritmus bizonyítja.

**Savitch-algoritmus:**

KORLÁTOZOTT-$\overrightarrow{st}$-ELÉRHETŐSÉG$(x, y, 2^\ell)$:

// Adott $x$ és $y$ csúcsok esetén teszteli, hogy van-e köztük legfeljebb $2^\ell$ lépéses
// séta. A sétára gondolhatunk úgy, mint egy „lusta" séta. Minden lépésnél
// két lehetőségünk van: vagy egy szomszédba mozgunk, vagy maradunk.
// Lusta sétánál feltehetjük, hogy a hossz pontosan $2^\ell$.

Ha $\ell = 0$, akkor teszteljük, hogy $x = y$ vagy $\overrightarrow{xy}$ egy él. Ha a teszt sikerül, akkor ELFOGAD állapottal, különben ELVET állapottal leállunk.

Ha $\ell > 0$, akkor

Összes $k \in V$ esetén

// $k$ a lusta séta középső pontja, azaz $x$-ből $k$-ba $2^{\ell-1}$ lusta lépés vezet és $k$-ból
// $y$-ba is $2^{\ell-1}$ lusta lépés vezet. Az összes lehetőséget végigpróbáljuk.

(1) KORLÁTOZOTT-$\overrightarrow{st}$-ELÉRHETŐSÉG$(x, k, 2^{\ell-1})$
ha NEM, akkor következő $k$ és vissza (1)-hez
ha NEM, és nincs következő $k$ ($V$ kimerült) akkor ELVET.
ha IGEN, akkor

(2) KORLÁTOZOTT-ELÉRHETŐSÉG$(k, y, 2^{\ell-1})$
ha IGEN, akkor ELFOGAD állapot és leáll
ha NEM, akkor következő $k$ és vissza (1)-hez
ha NEM, és nincs következő $k$ ($V$ kimerült) akkor ELVET.

A fenti algoritmus $\ell = \lceil |V(G)| \rceil$ paraméterrel futtatva megoldja az elérhetőséget. Az algoritmust Savitch Turing-gépen implementálta tár-takarékos módon.

**7. Tétel (Savitch-tétel).** *A fenti rekurzív algoritmus Turing-gépen megvalósítható úgy, hogy minden konfigurációban a munkaszalagon legfeljebb $\ell$ (a rekurzió mélysége sok) darab szakaszt írunk, ahol egy szakasz hossza $\mathcal{O}(\log |V|)$ (véges sok csúcs tárolására alkalmas hely).*

A pontos megvalósítást/implementációt nem végezzük el.

Az $\overrightarrow{st}$-ELÉRHETŐSÉG-ről tudtunk valami „okosat" mondani: Savitch-algoritmus/Savitch-tétel. Mi adódott $\mathcal{NL}$-re?

**8. Következmény (Savitch-tétel).** *(i)* $\mathcal{NL} \subseteq \mathcal{SPACE}(\log^2 n)$.

*(ii)* $\mathcal{NPSPACE} \subseteq \mathcal{PSPACE}$, *azaz* $\mathcal{PSPACE} = \mathcal{NPSPACE} = co\mathcal{NPSPACE}$.

***Bizonyítás.*** (i) Legyen $L$ egy tetszőleges nyelv $\mathcal{NL}$-ben. Vezessük vissza az ELÉRHETŐSÉG nyelvre. A visszavezetés által legyárott inputon futtassuk a Savitch-algoritmust. Az eredő algoritmusból kiküszöbölhető a legyárott input leírása (lásd például az $\mathcal{L}$ redukció tranzitivitásának indoklását). Így az eredő algoritmus (amely egy tetszőleges választott $\mathcal{NL}$-beli nyelvet dönt el) $\mathcal{O}(\log^2 n)$ tárigényű.

(ii) Vegyünk egy tetszőleges $L \in_T \mathcal{NPSPACE}$ nyelvet.

Végezzünk el egy redukciót a teljes nyelvre: Gyártsuk le a redukált konfigurációk $(\overrightarrow{G}_{\omega,T}, v_0, v_+)$ gráfját, mint az $\overrightarrow{st}$-ELÉRHETŐSÉG probléma egy inputját.

Alkalmazzuk a teljes nyelvről ismerteket: Az új probléma megoldását a Savitch-algoritmussal végezzük el.

A redukcióhoz polinomiális tár kell. A Savitch-algoritmus a gráf egy csúcshoz szükséges tárigény négyzetét igényli. $(\overrightarrow{G}_{\omega,T}, v_0, v_+)$ egy csúcsának kódolásához $\omega$ hosszában polinomiális mező kell. Polinom négyzete is polinom. A $(\overrightarrow{G}_{\omega,T}, v_0, v_+)$ kódjának felírása kiküszöbölhető az algoritmusból (lásd $preccurlyeq_{\mathcal{L}}$ redukcio tranzitivtásának bizonyításában szereplő trükk). Kapjuk a bizonyítandót. ■

Természetesen a polinomiális tárkorláttal azért tudtunk kényelmesen dolgozni, mert polinom négyzete is polinom. Általában is megfogalmazható a következő tétel:

**9. Következmény** $^+$. *Legyen $S$ szép tárfüggvények egy osztálya, ami zárt a négyzetre emelésre. Ekkor $\mathcal{NPSPACE}(\cup_{s\in S} s(n)) = \mathcal{PSPACE}(\cup_{s\in S} s(n))$.*

*Speciálisan $\mathcal{NPSPACE}(\cup_{s\in S} s(n))$ zárt a komplementálásra, azaz*

$$\mathcal{NPSPACE}(\cup_{s\in S} s(n)) = co\mathcal{NPSPACE}(\cup_{s\in S} s(n)).$$

Így speciálisan $\mathcal{EXPSPACE} = \mathcal{NEXPSPACE}$.

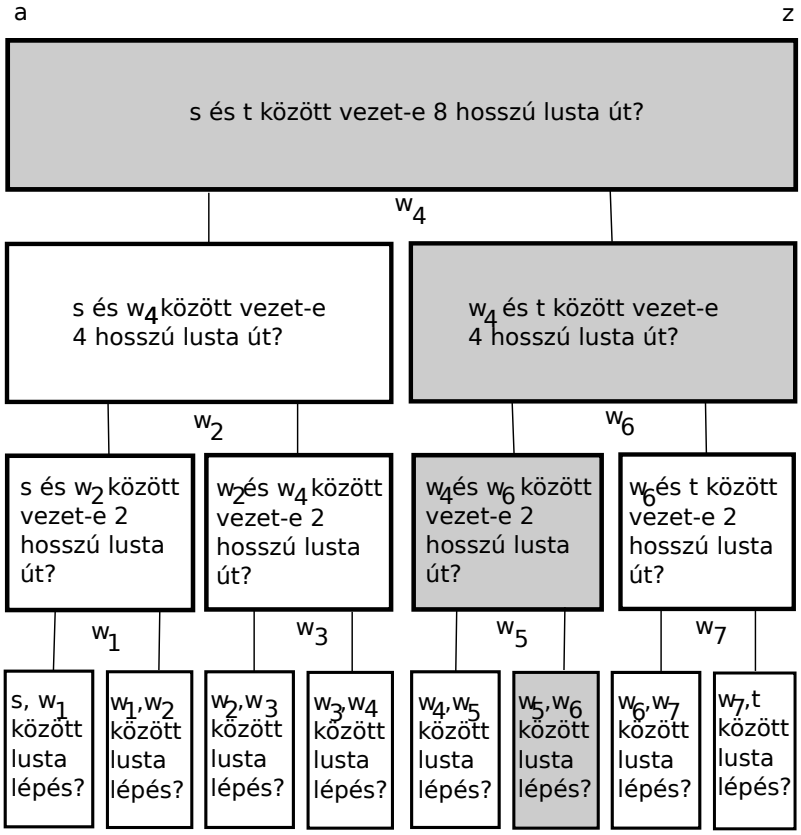
# 5. APPENDIX: Savitch-algoritmus implementációja Turing-gépen

A rekurzióban felmerülő kérdéseket struktúráját egy fával reprezentálhatjuk. A fa gyökere az ELÉRHETŐSÉG probléma, azaz az, hogy van-e $2^\ell$ hosszú lusta séta? Minden $p$=($u$-ból $v$-be vezet-e $2^\ell$ hosszú lusta séta) probléma két részfeladatra bomlik: Egy középső $w$ csúcsra $p_{bal}(w)$= (vezet-e $u$-ból $w$-be $2^{\ell-1}$ hosszú lusta séta), illetve $p_{jobb}(w)$= (vezet-e $w$-ból $v$-be $2^{\ell-1}$ hosszú lusta séta) a $p$ probléma két részfeladata. A két feladat egymás *testvére*.

Egy új $p$ problémának (ha $\ell \neq 0$) — amennyiben jelöltünk van egy $w$ középső csúcsra — két gyerek-problémája lesz. Ha mindkettőt igenlően eldöntöttük, akkor tudjuk, hogy $p$ is igaz. Ha valamelyikre nemleges a válasz, akkor a $w$ *rossz* középső csúcs $p$-re. A $V$ csúcshalmaz elemeit felsoroljuk, a leheséges középső csúcsok eszerint a sorrend szerint következnek. Az aktuális $w$-nél először a bal-gyerek kerül a munkaszalgra. Eleinte a munkaszalag tartalmaz csak bővül amíg fánkban egy levélhez nem jutunk.

A levélnek megfelelő probléma könnyen ellenőrizhető (akár plusz munkaszalag-igény nélkül, csak az input olvasásával).

- Ha a bal-gyerek problémája IGENlően dől el, akkor a jobb-gyerek feladatával felülírjuk.
- Ha a bal-gyerek problémája NEMlegesen dől el, akkor $w$ *rossz* jelölt volt. A feladatot töröljük a munkaszalagról és az apafeladattal foglalkozunk.
  - A következő $w$-re térünk át, azt mondjuk $w$-t *léptetjük*. A továbbiakat a fenteik alapján folytatjuk.




1. ábra. Az ábrán $|V| = 8$ esetén látjuk, hogy elfogadó futás esetén milyen részfeladatokat kell megoldani/ellenőrizni. A részfeladatok egy gyökeres bináris fában foglalhatók össze. A munkaszalag tartalma mindig egy feladat (csúcs a fában) a gyökérhez vezetett úttal együtt. Egy példát kiemeltünk sötétítéssel.

  - Ha nincs rákövetkező $w$ (azt mondjuk a megfelelő középső csúcs *kimerült*), akkor tudjuk, hogy $p$-re/az apafeladatra NEMleges a válasz. Töröljük a munkaszalagról és a továbbiakat a fenteik alapján folytatjuk.

- Ha a jobb-gyerek problémája IGENlően dől el, tudjuk, hogy $p$-re/az apafeladatra IGENlő a válasz. Töröljük a munkaszalagról és a továbbiakat a fenteik alapján folytatjuk.

- Ha a jobb-gyerek problémája NEMlegesen dől el, akkor $w$ *rossz* jelölt volt. A feladatot töröljük a munkaszalagról és az apafeladattal foglalkozunk, ugyanúgy mint fentebb.

A munkaszalag tartalmaznak szervezése/felülírásának szabályai (idegen szóval update-szabály) megköveteli, hogy minden problémánál tudjuk, hogy ő bal vagy jobb gyerek. Ezt érdemes a probléma leírásába befoglalni (habár az apaproblémával összevetve ez ki is olvasható a tömörebb kódolásból). A fenti update-szabályoknak van egy szokásos értelmezése/interpretációja: A problémákat egy *veremben* tároljuk. A verem szó azért jogos, mert csak a verem tetején lévő feladatot látjuk, amit olvashatunk, kivehetünk a veremből, vagy rápakolhatunk. Fent éppen egy ilyen verem kezelési útmutatóját írtuk le. A verem tartalma (ez lesz amunkaszalagon) mindig egy gyökérből induló út csúcsai. Ahogy a gyökérből indulva végigmegyünk

az úton, a veremben növekvő magasságban lesznek a feladatok. A verem tetején lévő probléma az út végén lévő csúcsnak felel meg.

Ha $V$ elemei 0-1 sorozatokkal van kódolva ($\mathcal{O}(\log |V|)$ hosszúakkal) és a sorozataink kódjainak lexikografikus rendezésében az első $|V|$ darabot vesszük csúcskódnak, akkor a LÉPTETÉS lépés lehet eggyel való növelés, a KIMERÜLÉS tesztelése pedig az utolsó csúcs kódjának és a legnagyobb kódnak az összehasonlításából adódik. A leállási szabályok: Ha a gyökér-feladatot igenlően válaszoljuk meg, akkor gépünk ELFOGAD állapottal megáll. Ha a gyökér-feladat középső $w$ csúcsa kimerül, akkor a gépünk ELVET állapottal megáll. A konstruált gép nyilván az ELÉRHETŐSÉG nyelvet fogadja el.

Az átmeneti függvény leírását (a munka-ábécé, állapothalmaz választását beleértve), azaz a technikai részletek kidolgozását nem végezzük el. A programozásban jártas hallgató elvégezheti. Könnyen ellenőrizhető, hogy a munkaszalag tartalma legfeljebb $\ell$ probléma leírása, amelyek mindegyike két csúcs kódja, egy $k \leq \ell$ paraméter, és egy bit (apjának — amennyiben nem a gyökér — bal vagy jobb gyereke). A teljes tárigény $\mathcal{O}(\ell \cdot \log n) = \mathcal{O}(\log^2 n)$.