ALGORITMUSOK ÉS BONYOLULTSÁGELMÉLET

Matematika MSc hallgatók számára

14. Előadás

Előadó: Hajnal Péter

Jegyzetelő: Hajnal Péter

2011. május 16.

1. Összeszámolási problémák bonyolultsága

1.1. Példák

Lássunk néhány példát összeszámlálási feladatokra.

Példa. Adott egy G gráf, hány feszítőfája van? A megfelelő függvény neve legyen #SPANNING-TREE.

Példa. Adott egy G gráf, hány Hamilton köre van? A megfelelő függvény neve legyen #HAMILTON.

Példa. Adott egy φ hálózat, hány kielégítő kiértékelése van a változóinak? A megfelelő függvény neve legyen #HÁLÓZAT-SAT.

Példa. Adott egy CNF formula, hány kielégítő kiértékelése van a változóinak? A megfelelő függvény neve legyen #SAT.

Példa. Adott egy 3CNF formula, hány kielégítő kiértékelése van a változóinak? A megfelelő függvény neve legyen #3SAT.

Példa. Adott egy G gráf, hány teljes párosítása van? A megfelelő függvény neve legyen #PÁROSÍTÁS.

Példa. Adott egy G egyszerű páros gráf, hány teljes párosítása van? A megfelelő függvény neve legyen #PÁROS-GRÁF-PÁROSÍTÁS.

Példa. Adott M_{nxn} $\{0,1\}$-mátrix (vagy $\mathbb{Z}$-mátrix, vagy $\mathbb{Q}$-mátrix). Határozzuk meg

$$detM := \sum_{\pi\in S_n}\prod_{i=1}^{n}(-1)^{sign(\pi)}M_{i,\pi(i)}$$

értékét (az M mátrix determinánsa). A megfelelő függvény neve legyen DETERMINÁNS.

Példa. Adott M_{nxn} természetes számokat tartalmazó mátrix. Határozzuk meg

$$perM := \sum_{\pi\in S_n}\prod_{i=1}^{n}M_{i\pi i}$$

értékét (az M mátrix permanense). A megfelelő függvény neve legyen PERMANENS.

Példa. Adott M_{nxn} $\{0,1\}$-mátrix. Határozzuk meg $perM := \sum_{\pi\in S_n}\prod_{i=1}^{n} M_{i\pi i}$ értékét (az M mátrix permanense). A megfelelő függvény neve legyen 0-1PERMANENS.

Észrevétel. Néhány fenti feladatról érezzük, hogy nehéz. $3SAT$ egy $\mathcal{NP}$-teljes probléma: azt kérdezi, hogy a kielégítő értékelések száma 0 vagy nem. A pontos összeszámlálás nyilván nehezebb.

Más esetben kezelhető problémákat látunk. A determinánsra már Gauss ismert hatékony kiszámítási módszert. (A Gauss-elimináción alapuló determináns kiszámító algoritmus analízise munkás. Számolnunk kell a műveletek során a számok hosszának változásával az alapműveletek Turing-gép implementációjával. Ha ezt a (numerikus analízis és bonyolultságelmélet hatarán lévő) feladatot valaki elvégzi, akkor azt kapja, hogy a DETREMINÁNS függvény polinom időben kiszámolható.)

#SPANNING-TREE visszavezethető a determináns kiszámításra. Ez az MSc-s Diszkrét matematika kurzusban látott Kirchoff-tétel következménye.

Néhány közbülső problémánál azonban tanácstalanok vagyunk: #PÁROS-GRÁF-PÁROSÍTÁS esetén a teljes párosítások számának 0/nem-0 voltának eldöntése BSc-s Kombinatorika anyag: a magyar-módszer alapján polinom időben megoldható. A pontos összeszámlálás azonban problémásabb.

A permanens formulája egyszerűbb mint a determinánsé (hiányoznak a váltakozó előjelek. Viszont a Gauss-elimináció nem működik.

Az azonban könnyen látható, hogy #PÁROS-GRÁF-PÁROSÍTÁS és a PERMANENS probléma ekvivalens: Egy egyenlő színosztályokkal ($|A| = |F| = n$) rendelkező egyszerű páros gráfban az alsó/felső csúcsok szomszédsági mátrixában a kifejtési tagok pontosan a teljes párosításoknak felelnek meg, a mátrix permanense éppen a teljes párosítások száma.

1.2. Összeszámolási problémákkal kapcsolatos nyelvosztályok

Emlékeztető. Egy nem-determinisztikus Turing-gép ω inputján a futásai halmaza egy gyökeres fában foglalhatók össze. A fa levelei ELFOGAD vagy ELVET címkével vannak címkézve. Egy futás egy gyökér-levél út. Ezeket az utakat/futásokat a levél címkéje két kategóriába sorolja.

Emlékeztető. A T nem-determinisztikus Turing-gépről tegyük fel, hogy polinomiális, azaz létezik $t(x) \in \mathbb{R}[x]$, ami egy korrekt futásának hosszát becsüli. Minden polinom szép idő-függvény, így feltehető, hogy gépünk ω-n legfeljebb $t(|\omega|)$ lépést tesz. Azaz a tanúszalag „levágható” úgy, hogy $t(|\omega|)$ karaktert tartalmazzon. Így az összfutások száma, felülről becsülhető $|\Sigma_{\text{tanú}}|^{t(n)}$-nel.

Definíció.

$$\begin{aligned}\#\mathcal{P} = \{f : \Sigma^* \to \mathbb{N} |\ \exists\ T &\text{ polinomiális nem-determinisztikus Turing-gép,}\\ &\text{hogy } \omega\text{-n az elfogadó futások száma } = f(\omega)\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{MAJ}\text{-}\mathcal{P} = \{L \subseteq \Sigma^* |\ \exists\ T &\text{ polinomiális nem determinisztikus Turing-gép,}\\ &\text{hogy } \omega \in L \text{ pontosan akkor teljesül, ha } \omega\text{-n}\\ &\text{az elfogadó futások száma } > \text{az elvető futások száma}\}\end{aligned}$$

$$\oplus\mathcal{P} = \{L \subseteq \Sigma^* |\ \exists\, T \text{ polinomiális nem-determinisztikus Turing-gép, hogy } \omega \in L \text{ pontosan akkor teljesül, ha } \omega\text{-n páros sok elfogadó futás van}\}$$

$\mathcal{MAJ}$-$\mathcal{P}$ szokásos jele $\mathcal{PP}$. Szokták véletlen gépként is értelmezni: akkor fogad el, ha az elfogadás valószínűsége több mint 1/2. Ennek az elfogadó szabálynak azonban nincs gyakorlati haszna. Az új elnevezéssel inkább azt hangsúlyozzuk, hogy a valódi jelentősége az osztálynak az, hogy az összeszámlálási problémákat fogja meg.

Az első osztály ami valóban függvényeket tartalmaz (ez a klasszikus összeszámolási probléma formalizmusa: bizonyos struktúrákhoz rendel egy elemszámot, a megszámlálandó objektumok számát). A második kettő osztály szorosan kapcsolódik az elsőhöz, de ezek már nyelvosztályok. Ezen kettő szimpatikus a bonyolultságelmélet szempontjából, ahol alapvetően nyelvosztályokkal foglalkozunk.

A fenti feladatok mindegyike $\#\mathcal{P}$-beli. Egyetlen kivétel a DETERMINÁNS. Ez negatív értéket is felvehet, így ekkor elfogadó számítási utak számaként nem interpretálható. Ennek ellenére a DETERMINÁNS függvény

$$det_o M := \sum_{\pi \in S_n, sign(\pi)=0} \prod_{i=1}^{n} M_{i,\pi(i)}$$

és

$$det_1 M := \sum_{\pi \in S_n, sign(\pi)=1} \prod_{i=1}^{n} M_{i,\pi(i)}$$

két „fele" már $\#\mathcal{P}$-beli, ha a mátrix elemeinek természetes számokat engedünk meg (ezek neve legyen DETERMINÁNS$_0$ és DETERMINÁNS$_1$).

Mielőtt elkezdünk bizonyítani egy fontos megjegyzést teszünk.

Megjegyzés. Feltettük, hogy a tanú szalag ω input mellett $t(|\omega|)$ tanúkaraktert tartalmaz. A futások száma azonban nem szükségszerűen $|\Gamma|^{t(|\omega|)}$ (Γ a tanúszalag ábécé-je). A géppel azonban elolvastathatjuk az összes karaktert. Ekkor problémák keletkezhetnek.

Ezzel lelassulhat gépünk: Ez nem baj, polinomiális idejű marad.

Az elfogadó futások száma, viszonya az elvető futások számához képest, az elfogadó futások számának paritása változhat. Ez sem okoz gondota következő meggondolások után.

Ha leálló állapotba jutunk, akkor olvassuk el a többi tanúkaraktert és csak akkor fogadjuk el, ha eredetileg elfogadó volt leállásunk és utána a $000\ldots00$ volt a tanúszalag eredetileg nem olvasott része (feltesszük, hogy $0 \in \Gamma$). Ezzel gépünk futása *standard* lesz: minden tanúkaraktert elolvas és az elfogadó futások száma nem változik (így ennek paritása sem). Ezzel beláttuk, hogy standard nem-determinisztikus gépekkel dolgozva is ugyanahhoz a $\#\mathcal{P}$, $\oplus\mathcal{P}$ osztályhoz jutunk.

$\mathcal{MAJ}$-$\mathcal{P}$ esetén más meggondolás szükséges (most $0, 1 \in \Gamma$ feltevéssel élünk): Ha leálló állapotba jutunk, akkor olvassuk el a többi tanúkaraktert (erről feltehetjük, hogy legalább egy ilyen van). Akkor fogadjunk el, ha 1 volt a tanúszalag első, eredetileg nem olvasott karaktere. Akkor vessük el, ha 0 volt a tanúszalag első, eredetileg nem olvasott karaktere. Ezzel gépünk futása standard lesz: minden tanúkaraktert elolvas és az elfogadó/elvető futások száma kiegyensúlyozódik. Az eredeti helyzet visszaállításához a következő módosítást tehetjük: Akkor is fogadjunk el, ha eredetileg elfogadó volt leállásunk és utána a $000\ldots00$ volt a tanúszalag eredetileg nem olvasott része (persze ezzel a korábbi elvető leállásunkra vonatkozó szabályunkat felülírtuk). Illetve akkor is vessünk el, ha eredetileg elvető volt leállásunk és utána a $111\ldots11$ volt a tanúszalag eredetileg nem olvasott része. Így az eredeti futásoknak egy olyan futáshalmaz felel meg, amiben az elfogadó/elvető futások száma között pontosan kettő a különbség annak megfelelően, hogy eredetileg hogy állt le a gép. Ezzel gépünk futása standard lesz: minden tanúkaraktert elolvas és az elfogadó futások nagyságrendi viszonya az elvető futások számához képest nem változik.

1.3. $\#\mathcal{P}$-teljes problémák

Definíció. Egy $\tau : \Sigma^* \to \mathbb{N}$ függvény $\#\mathcal{P}$-teljes függvény, ha

(i) $\tau \in \#\mathcal{P}$,

(ii) minden $f \in \#\mathcal{P}$-hez ($f : \Gamma^* \to \mathbb{N}$) létezik R polinom idejű redukciós algoritmus (ez $R : \Gamma^* \to \Sigma^*$ függvényt számol ki), amelyre $\tau(R(\omega))$-ból kiszámolható $f(\omega)$ polinom időben.

Korábban már megjegyeztük, hogy ha egy összeszámlálási probléma erdeménye olyan, hogy 0 mivoltának eldöntése $\mathcal{NP}$-teljes, akkor egy nehéz problémával állunk szemben. Mostmár ezt matematikailag pontosabban és erőteljesebben is megfogalmazhatjuk.

1. Tétel. *#HAMILTON, #SAT, #3SAT $\#\mathcal{P}$-teljesek.*

Bizonyítás. Nem bizonyítjuk. A megfelelő döntési problémák $\mathcal{NP}$-teljesek. Azaz egy $\mathcal{NP}$ Turing-gépre az eldöntési probléma redukálható egy HAMILTON/SAT/3SAT problémára. A redukció lényege, hogy a T által elfogadandó inputok hamaza HAMILTON körrel rendelkező gráfba/kielégíthető CNF formulába/kielégíthető 3CNF formulába képződjenek, illetve a T által elvetendő inputok hamaza HAMILTON körrel nem rendelkező gráfba/kielégíthetetlen CNF formulába/kielégíthetetlen 3CNF formulába képződjenek. A klasszikus redukciók vizsgálata azt mutatja, hogy azok vagy eleve bijekciók vagy könnyen módosíthatók úgy, hogy a redukciótól elvártakat egy bijekció valósítsa meg. Ennek ellenőrzését, a szükséges ötletek megkeresését az érdeklődő hallgatóra bízzuk. ■

Példaink sora végén azonban párosítási problémákkal találkozunk. Ezek döntési megfelelői hatékony algoritmusokkal megoldhatók. Ez azonban az összeszámlálási feladatokról nem mond semmit. Talán meglepő, hogy a fenti probléma is $\#\mathcal{P}$-teljes.

2. Tétel (Valiant). *#PÁROS-GRÁF-PÁROSÍTÁS és a PERMANENS probléma $\#\mathcal{P}$-teljes.*

Ennek bizonyítás időigényes. Nem végezzük el, nem vizsgaanyag. Az érdeklődő hallgató a jegyzet appendix-ében megtalálja.

1.4. $\#\mathcal{P}$ ereje

Észrevétel. Hogyan viszonyul két olyan polinomiális gép ereje, amelyek közül az egyik hozzáférhet egy $\mathcal{MAJ}$-SAT orákulumhoz, a másik egy #SAT orákulumhoz? Erejük megegyezik: #SAT orákulumból $\mathcal{MAJ}$-SAT kérdések triviálisan megválaszolhatóak. A fordított viszony bináris kereséssel oldható meg.

Jelölés. $\mathcal{P}^{\mathcal{MAJ}\text{-}\mathcal{P}} = \mathcal{P}^{\#\mathcal{P}} (= \mathcal{P}^{\mathcal{PP}})$.

Marad a kérdés: hogyan viszonyul a $\mathcal{P}^{\mathcal{MAJ}\text{-}\mathcal{P}} = \mathcal{P}^{\#\mathcal{P}}$ nyelvosztály a korábbi osztályainkhoz? Erről a következő tétel azt mondja, hogy az új osztály meglepően erős. A „meglepő” jelző azért jogos, mert az 1989-ben megjelent eredmény nem várt nagy áttörés volt a bonyolultságelméletben. 1998-ban Seinosuke Toda Gödel-díjat kapott ezen cikkéért.

3. Tétel (Toda-tétel). $\mathcal{P}^{\mathcal{MAJ}\text{-}\mathcal{P}} \supseteq \mathcal{PH}$

A bizonyítás meghaladja ezen kurzus kereteit.

1.5. $\oplus\mathcal{P}$ ereje

Az összeszámlálási problémák bonyolultságának tárgyalását azzal zárjuk, hogy a paritási probléma (habár bizonyos értelemben könnyebb mint az általános összeszámlálás) mégis nehéz.

4. Tétel (Valiant–Vazirani-tétel).

$$\mathcal{NP} \subset \mathcal{RP}^{\oplus\mathcal{P}}$$

Bizonyítás. A bizonyítandó szerint egy $\mathcal{RP}$ algoritmus minden $\mathcal{NP}$ problémát megtud oldani, ha egy $\oplus\mathcal{P}$ -beli orákulunokhoz hozzáférhet. Persze tudjuk, hogy elegendő $3SAT$-ot megoldani és $\oplus\mathcal{P}$ ereje benne rejlik $\oplus SAT$-ban, azaz abban a problémában, hogy adott $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ $3SAT$ probléma kielégítő értékeléseinek száma páros-e vagy páratlan.

Az állításnál erősebb tételt igazolunk. $3SAT$-ot úgy oldjuk meg, hogy egy olyan orákulumot használunk, ami egy adott φ problémára megmondja, hogy nem kielégíthető, illetve egyetlen kielégítő értékelése van. Amennyiben kielégítő értékeléseinek száma több mint egy, akkor outputja tetszőleges lehet. Ezen probléma neve $USAT$ és nyilván könnyebb mint $\oplus SAT$ ($\oplus SAT$ egy speciális esete).

A bizonyító $\mathcal{RP}$ algoritmus $3SAT$ megoldására egyszerű: Véltelen változó halmazokat generálunk: $R_1, R_2, \ldots, R_{n+1}$, és véletlen paritásokat generálunk π_1, π_2, …, π_{n+1} (a véletlen generálások függetlenül uniform eloszlással történnek). Majd kérdéseket teszünk fel az $USAT$ orákulumhoz:

- φ,
- „φ teljesül, továbbá R_1-ben azon változók számának paritása, ami 1 értéket kap π_1-e”
- „φ teljesül, továbbá R_1-ben azon változók számának paritása, amelyek 1 értéket kapnak π_1-e, továbbá R_2-ben azon változók számának paritása, amelyek 1 értéket kapnak π_2-e”

- „φ teljesül, továbbá R_1-ben azon változók számának paritása, amelyek 1 értéket kapnak π_1-e, továbbá R_2-ben azon változók számának paritása, amelyek 1 értéket kapnak π_2-e, továbbá R_3-ban azon változók számának paritása, amelyek 1 értéket kapnak π_3-e"

És így tovább az utolsó kérdésig az orákulumhoz: φ teljesül, továbbá $R_1, R_2, \ldots, R_{n+1}$ mindegyikében azon változók számának paritása, amelyek 1 értéket kapnak rendre $\pi_1, \ldots, \pi_{n+1}$. (Ezen kérdések mindegyike könnyen megfogalmazható 3CNF alakban.) Ha bármikor az orákulum elfogad, akkor tudjuk hogy a kérdés biztos kielégíthető, így speciálisan φ is. Ha mindig nemleges választ kapunk az orákulumtól, akkor VALÓSZÍNŰLEG-ROSSZ állapottal állunk le.

Nyilván csak akkor hibázhatunk, ha $I_\varphi = \{x : \varphi(x) = 1\}$ nem üres és nem egyelemű. Ekkor alkalmas k (természetesen n-nél, a változók számánál nem nagyobb) pozitív egészre $2^{k-1} < |I_\varphi| \leq 2^k$.

Az alábbi lemma alapján készen vagyunk (a szokásos hibajavítást eredményező iterált futtatásokkal).

5. Lemma. *Legyen $I \subset \{0,1\}^n$, amelyre $2^{k-1} < |I| \leq 2^k$. Legyenek $R_1, R_2, \ldots, R_{k+1}$ véletlen változó/koordináta halmazok, $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{k+1}$ véletlen paritások. Legyen I_ℓ azon I-beli vektorok halmaza, amelyekre teljesül, hogy $R_1, R_2, \ldots, R_\ell$ mindegyikére az általuk leírt pozíciókba rendre $\pi_1, \ldots, \pi_\ell$ paritású sok 1-es esik. Ekkor*

$$\mathbb{P}[I_{k+1} \text{ halmaz 1 elemű}] > \frac{1}{8}$$

A lemma bizonyítása: Legyen x, y két különböző elem $\{0,1\}^n$-ből. Azt mondjuk, hogy $R_1, R_2, \ldots, R_{k+1}$ sorozat megkülönbözteti őket, ha valamelyik i-re x-nek és y-nak az R_i-be eső bitjei közül az 1-esek számának paritása különböző. Ekkor

$$\mathbb{P}[x \text{ és } y \text{ nem megkülönböztetett}] = \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Valóban, legyen D azon koordináták halmaza, ahol x és y különbözik. R_i akkor és csak akkor különbözteti meg x, y-t, ha D-t páratlan sok elemben metszi. Mivel D egy nem üres halmaz, ezért ez egy $1/2$ valószínűségű esemény.

Ezen események különböző i-kre függetlenek, ami alapján a fenti egyenlőség nyilvánvaló. Így, ha $x, y \in I$ két különböző elem, akkor

$$\mathbb{P}[x \text{ nem megkülönböztetett valamelyik más } I\text{-beli elemtől}] < \frac{|I|}{2^{k+1}} \leq \frac{1}{2},$$

$$\mathbb{P}[x \text{ megkülönböztetett mindegyik más } I\text{-beli elemtől}] > \frac{1}{2}.$$

Azt mondjuk, hogy x *túléli* a $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{k+1}$ sorozatot, ha $x \in I$ és R_1, R_2, …, R_{k+1} mindegyikére az általuk leírt pozíciókba rendre $\pi_1, \ldots, \pi_{k+1}$ paritású sok 1-es esik. Ennek valószínűsége $1/2^{k+1}$.

Legyen x egy elem $\{0,1\}^n$-ből. „$I_{k+1} = \{x\}$" pontosan az az esemény, hogy x I mindegyik más elemétől megkülönböztetett az $R_1, R_2, \ldots, R_{k+1}$ sorozat által, továbbá x túléli a $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{k+1}$ sorozatot. Ennek valószínűsége nagyobb mint

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^{k+2}}.$$

Az „$I_{k+1} = \{x\}$” események, ahogy x végigfut I elemein diszjunktak és együtt kiadják az „$|I_{k+1}| = 1$” eseményt. A diszjunktság miatt a valószínűség nagyobb mint

$$|I| \cdot \frac{1}{2^{k+2}} > 2^{k-1} \cdot \frac{1}{2^{k+2}} = \frac{1}{8},$$

ahogy bizonyítani kellett. ■

2. APPENDIX: Valiant-tétel bizonyítása

Először nézzük meg melyik problémát is vizsgáljuk.

Észrevétel. A következő függvények ugyanazok (a megfelelő kódolás mellett).

(i) G egyszerű páros gráf $\mapsto$ teljes párosítások száma,

(ii) M_{nxn} 0-1 mátrix $\mapsto perM$,

(iii) G egy párhuzamos élek nélküli irányított gráf $\mapsto \#\{V(G)$ parkettázásainak száma irányított körökkel$\}$,

Bizonyítás. (i)-ben, ha a két színosztály mérete különbözik, akkor a hozzárendelt érték biztos 0. A nem érdektelen esetben az alsó pont-felső pont szomszédsági mátrix egy 0-1-mátrix, amely permanense a gráfbeli teljes párosítások száma.

Ha az (ii)-ben szereplő mátrixot egy n pontú irányított gráf (hurokélek megengedettek, párhuzamos élek nem) „odavezet él” relációját leíró mátrixnak gondoljuk, akkor a permanenset kiadó 1-es szorzatok halmaza azonosítható azon körhalmazok halmazával, amik csúcshalmazai diszjunktan kiadják $V(G)$-t.

A bizonyítás teljes lesz, ha észrevesszük, hogy mindkét fenti gondolatmenet megfordítható. ■

Mielőtt a bizonyításhoz fognánk az előző problémahármas súlyozott változatát is bevezetjük.

Észrevétel. A következő függvények ugyanazok (a megfelelő kódolás mellett).

(i) M_{nxn} egész mátrix $\mapsto perM$,

(iii) G egy párhuzamos élek nélküli $\mathbb{Z}$-súlyozott irányított gráf $\mapsto \sum\{\prod_{e\in E(\Phi)} w_e :$ Φ csúcsparkettázás irányított körökkel$\}$

6. Tétel (Valiant-tétel). *0-1PERMANENS egy $\#\mathcal{P}$-teljes függvény.*

Megjegyzés. Valiant tétele valójában egy kicsit gyengébb. Ő Turing-redukciót használva igazolta (1979) a teljsséget. Az alábbi bizonyítás Ben-Dor és Halevi 1993-as bizonyításához áll legközelebb.

Bizonyítás. A bizonyítást a #3SAT-ra való visszavezetéssel végezzük. A #3SAT azt számolja ki, hogy egy φ 3CNF-nek hány kielégítő értékadása van.

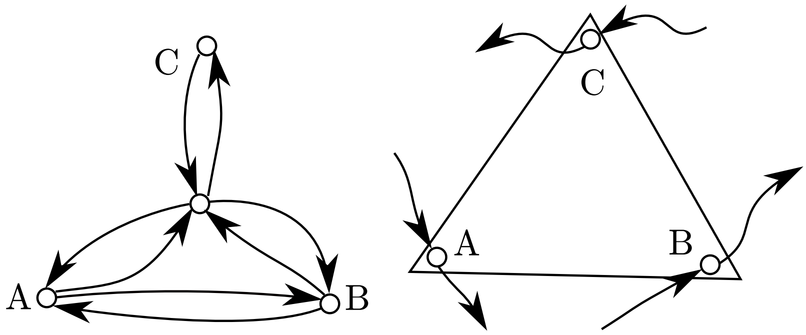
A 3CNF-hez egy alkalmas irányított gráfot konstruálunk, amely irányított körökkel történő csúcs-parkettázásainak száma nagyon szoros összefüggésben áll a formula kielégítő értékeléseinek számával. Így a csúcs-parkettázások számából könnyen számolható a kielégítő értékelések száma. Konstrunkciónk több lépésben történik.

Először egy súlyozott gráfot konstruálunk meg, ahol a súlyok a $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ halmazból kerülnek ki. Ezekután a -1 súlyt kiküszöböjük (ára egy nagy pozitív súly lesz). Végül a problémát megoldó irányított gráfot (0-1 súlyozás) ismertetjük.

1. lépés: Súlyozott irányított gráfjainkban a 0 súlyt az él hiánya, az 1 súlyt a szokásos éljelölés, a -1, 2 és 3 súlyt a súly feltüntetése és szín jelöli.

Először csak néhány összetevőt ismertetünk.

Minden klózhoz felveszük a következő klóz-$\triangle$-gel izomorf részgráfot. (Olvasat: klóz-háromszög) Az ábránk bal oldalán a belső struktúra látszik, a jobb oldalán az, hogy a klóz-$\triangle$ hogyan illeszkedik a gráfunk többi részéhez.

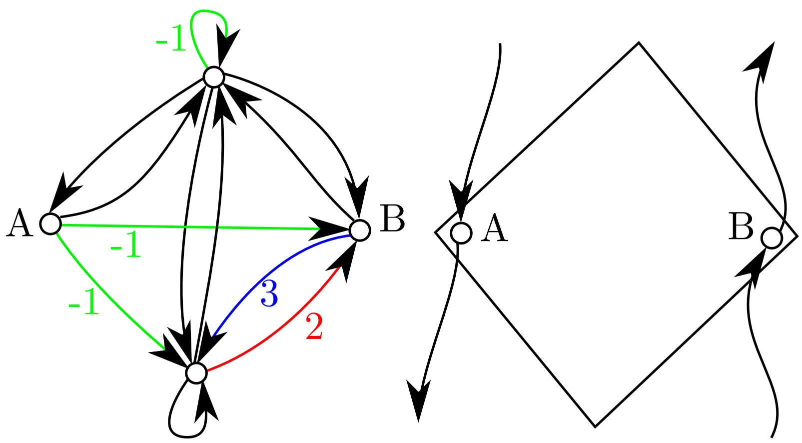


1. ábra.

A csúcsok, ahol az „alkatrész” és a „külvilág” találkozhat megbetűzöttek. A „névtelen” csúcsok az alkatrész „belsejében” vannak.

A háromszöghöz kapcsolódó külső éleket három párba csoportosítjuk: (A-ból kilépő, B-be belépő), (B-ből kilépő, C-be belépő), (C-ből kilépő, A-ba belépő). Tegyük fel, hogy mindhárom párra függetlenül egy-egy feltételt teszünk: vagy mindkét él a kör-parkettázásban szerepeljen vagy egyik sem. Az így kapott feltételrendszer (nyolc lehetőség) közül az egyik nem teljesíthető: ha a hat csatlakozó külső él mindegyikét a kör-parkettázás élének írjuk elő, akkor háromszög középső csúcsa nem fedhető. A maradék hét feltételrendszer azonban lokálisan — a háromszögön belül — egyértelműen kielégíthető.

Konstrukciónk következő összetevője egy literál-$\diamond$ (olvasd: literál-négyzet):



2. ábra.

Ennek is ismertetjük egy körfedéshez való lehetséges viszonyát:

(a) A-ra illeszkedő két külső él egyszerre szerepel vagy nem szerepel a csúcs-parkettázásban, továbbá ugyanez igaz a B-re illeszkedő két külső élre is,

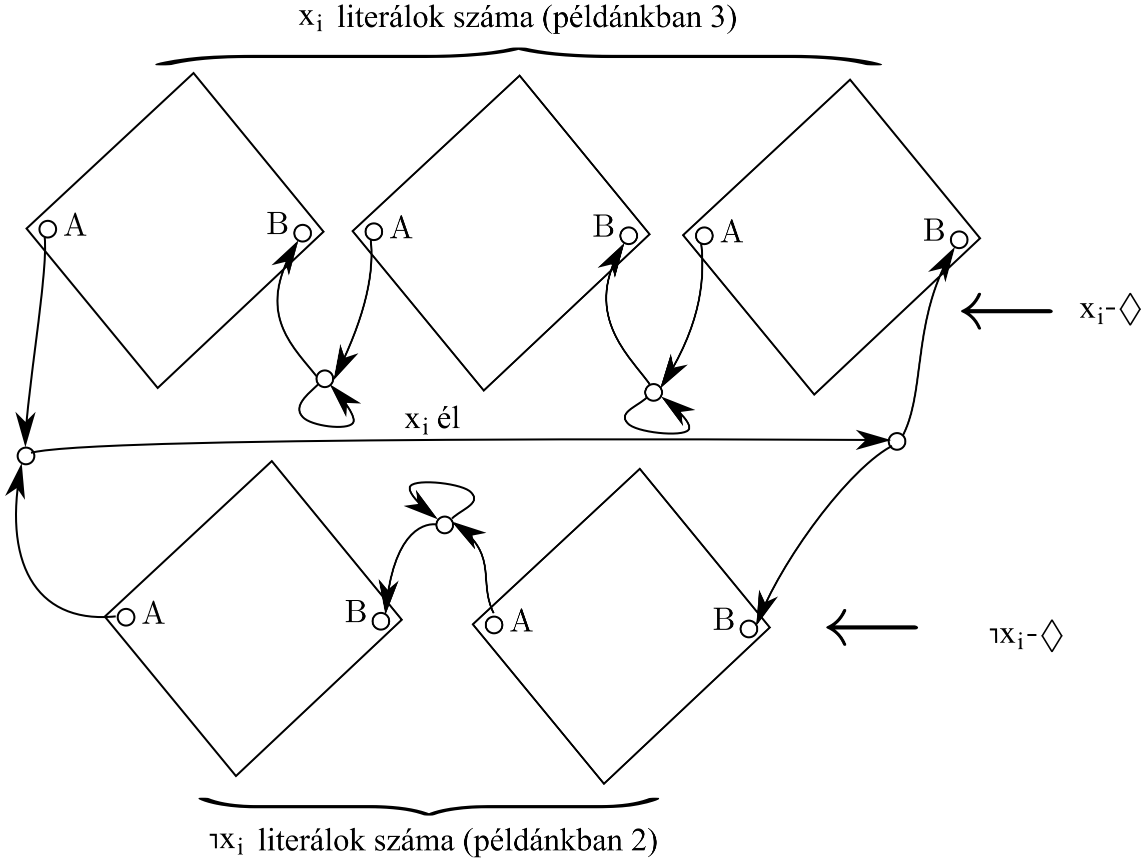
(b) a csúcsparkettázó irányított körök egyike vagy A-n belép és B-n kilép a négyzetből vagy pedig fordítva: B-n belép és A-n kilép.

Most egy pontos előírás több belső csúcs-parkettázás-töredéket is megenged egy literál-$\diamond$-en belül. Számoljuk ki a benti felhasznált élek szorzatát és a lehetőségekre összegezzük. Ekkor minden (a)-hoz tartozó előírás esetén 0-t kapunk, míg minden (b)-beli előírás esetén 4-et kapunk. (Az esetek végignézését az érdeklődő hallgatónak kell elvégeznie.)

Az összegzés lényege, hogy az előíráshoz tartozó parkettázások csoportosíthatók aszerint, hogy a négyzeten kívül hogy néznek ki. A súly-szorzatok összegzésében egy csoport közös külső része ugyanazt a tényezőt adja, ami kiemelhető. A zárójelben maradó részt számoltuk ki felül.

Legyen adva egy φ 3CNF formula. Most leírjuk, hogyan kapcsoljuk össze a fenti alkatrészeket.

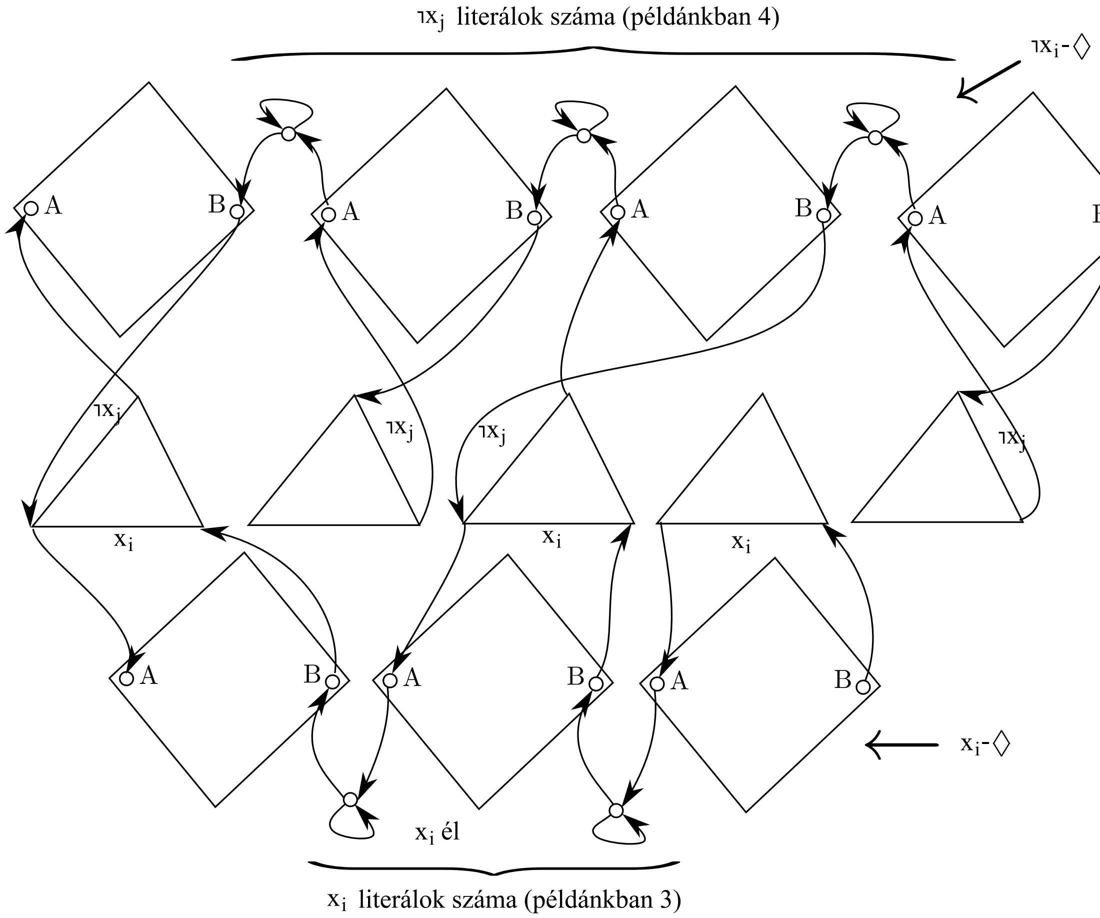
A formulában lévő literálok mindegyikére felveszünk egy-egy literál-$\diamond$-et. Minden x_i változóhoz felveszünk egy változó-élt és a változó, illetve negált változónak megfelelő φ-beli literáloknak megfelelő literál-$\diamond$-ekkel két irányított körben, az alábbi ábrán látható módon összekötjük őket:



3. ábra. Az x_i-változó élhez tartozó literál-négyzetek két körbe fűzésére egy példa (negálatlan és negált kör)

Ismét csak a betűzött csúcsoknál lesz kapcsolódási pont a „külvilággal”.

Végül minden klózra felveszünk egy-egy klóz-$\triangle$-t. A három oldal (AB, BC és CA a klózon belüli három literálnak felel meg). Az egyes litáráloknak megfelelő oldalakat a literál-$\diamond$-okkal azonosítjuk és az alábbi módon összekötjük őket:



4. ábra.

Ezzel leírtuk a φ-hez rendelt G irányított súlyozott gráfot.

Irányított körök egy csúcs-parkettázásának minden csúcsot le kell fedni, a változó-élek kezdőpontjait is. Ezekből azonban egyetlen él indul ki: a változó-él. A megfeleló kör folytatása két irányba történhet: a változónak megfelelő négyzetek felé vagy negált változók felé. Így egy körökkel történő csúcs-parkettázásnak megfelel egy értékadás. Persze több csúcs-parkettázás ugyanazt az értékadást írhatja le. A csúcs-parkettázások között kijelölünk néhány speciálisat, amiket *standardnak* nevezünk. Ezekben az a kör amelyik egy x_i-változó-élt tartalmazza a választás után (x_i vagy $\neg x_i$ köre felé fordul-e) mindig belép a megfelelő négyzetbe, majd a másik oldalon kilép, így végig járja a teljes kört és záródik az x_i-változó-él köre. A nem választott kör négyzeteiben és a klózok háromszögeiben lévő csúcsok még fedetlenek. A négyzetek csúcsait fedjük úgy, hogy a négyzetbe belépünk, majd kilépünk. A háromszögek lefedését ezekután végezzük el. Ha egy klóz háromszög mindhárom oldalához be nem járt négyzet társul, akkor (és csak akkor) a háromszög fedése nem oldható meg (különben egyértelmű mit kell tenni). Ez viszont éppen az az eset, amikor a csúcs-parkettázás által leírt értékadás a klózt és így a formulát hamissá teszi. Tehát pontosan a kielégítő értékadásokhoz tartozik standard csúcs-parkettázás. Ezekhez is több. Azonban össz súlyszorzatuk mindegyiknek ugyanaz:

A négyzeteken belül függetlenül választható lehetőségek állítják össze a teljes listát. Legyen m a négyzetek száma, azaz φ-ben leírt literálok száma, azaz a klózok számának háromszorosa. Egy kielégítő értékadáshoz tartozó standard csúcs-parkettázások össz súly-szorzata 4^m. Egy nem kielégítő értékadáshoz nem tartozik standard csúcs-parkettázás.

A standard csúcs-parkettázások pontosan azok a csúcs-parkettázások, amelyek minden négyzethez úgy viszonyulnak, hogy egy körük belép, majd kilép. A nem standard csúcs-parkettázások tehát pontosan azok, amikre teljesül, hogy legalább egy négyzetben A és B fedése is a négyzethez viszonyítva belső vagy külső körök által megoldott. Azaz a négyzet belső körei vagy a négyzet összes csúcsát, vagy A kivételével, vagy B kivételével, vagy A, B kivételével a maradék csúcsokat parkettzázzák. Ezek azonban össz szorzat-súlyban 0-t adnak.

Tehát a standard és nem-standard csúcs-parkettázások az össz szorzat-súlyban $4^m \cdot K$-et adnak, ahol K a φ kielégítő értékadásainak száma.

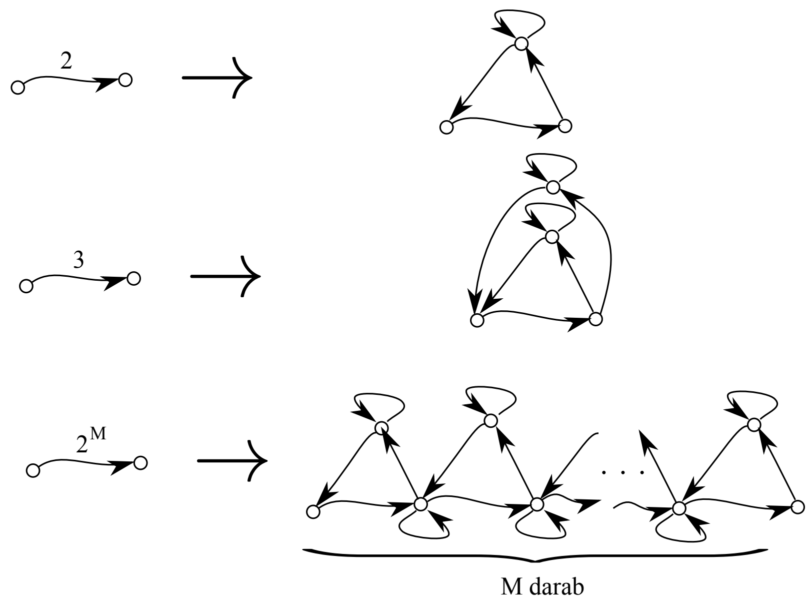
2. lépés: Ezt a lépést a mátrix nyelvezettel legegyszerűbb leírni. Tehát az előző lépésben definiált G súlyozott irányított gráfunk helyett nézzük a B „odavezet él” relációt leíró mátrixot (elemei $-1, 0, 1, 2, 3$ számokból kerülnek ki a súlyozást is kódolandó). Ennek a mátrixnak a permanense 4^m-szer a csúcs-parkettázások száma (speciálisan nem-negatív). A következő becslések teljesülnek B permanensére (N a csúcsok száma, M egy alkalmasan választott paraméter):

$$0 \leq perB \leq N!3^N < 2^M.$$

Rendeljünk a szomszédsági mátrixunkhoz egy olyan $\widetilde{B}$ mátrixot, ahol a -1-ek helyére 2^M-et írunk. Ekkor $per\widetilde{B} \equiv perB \pmod{2^M+1}$.

A fenti két összefüggés alapján $per\widetilde{B}$ alapján $perB$ könnyen számolható.

3. lépés: Legyen $\widetilde{G}$ a $\widetilde{B}$ mátrixnak megfelelő súlyozott irányított gráf (élsúlyai már nem-nagatívok). A súlyokat az alábbi lokális helyettesítésekkel kiküszöböljük:



5. ábra.

Legyen $\widehat{G}$ az így kapott irányított (súlyozatlan) gráf. Ennek körparkettázásai és $\widetilde{G}$ körparkettázásait élsúly-szorzat multiplicitással számolva két olyan sokaságot adnak, amelyek között természetes bijekció létesíthető.

$\widehat{G}$ a redukciónk végeredménye (az M paraméterrel együtt). A fentiek alapján ha ennek megállapítjuk a csúcs-parkettázásainak számát (egy 0-1PERMANENS kérdés), modulo $2^M + 1$ vesszük, elosztjuk 4^m-mel, akkor megkapjuk a φ-t kielégítő értékadások számát. Azaz redukciónk a tételt bizonyítja. ■